

STUDIO DI FUNZIONE

$$f(x) = -x e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{Dominio: } x \neq 0 \quad \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(-x) = -(-x) e^{-\frac{1}{-x}} = x e^{\frac{1}{x}} \neq f(x) \quad f \text{ non \u00e9 pari} \quad f(-x) \neq -f(x) = x e^{-\frac{1}{x}} \quad f \text{ non \u00e9 dispari}$$

$\cap$ uni: one y : $x=0$ escluso dal dominio $\Rightarrow$ non ci sono $\cap$ con one y

one x : $y=0$ $0 = -x e^{-\frac{1}{x}} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 & \text{NON ACC.} \\ e^{-\frac{1}{x}}=0 & \text{MAI} \end{matrix} \Rightarrow$ non ci sono $\cap$ one x

SEGNO di $f(x)$: $-x e^{-\frac{1}{x}} > 0$

$-x > 0$ per $x < 0$

$e^{-\frac{1}{x}} > 0$ sempre nel dominio

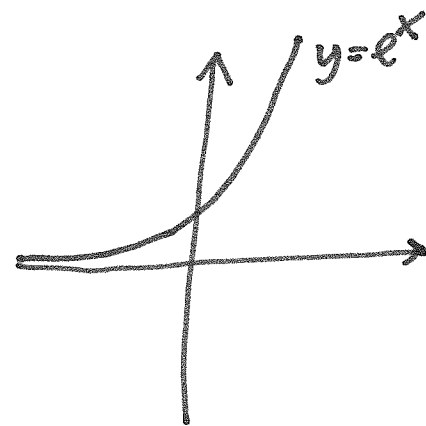
		0	
$-x$	+++		----
$e^{-\frac{1}{x}}$	+++		++++
$f(x)$	+		-

$f(x) > 0$ per $x < 0$

$f(x) < 0$ per $x > 0$

ASINTOTI $\lim_{x \rightarrow 0^+} -x e^{-\frac{1}{x}} = -0^+ e^{-\frac{1}{0^+}} = -0^+ e^{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} -x e^{-\frac{1}{x}} = -0^- e^{-\frac{1}{0^-}} = -0^- e^{+\infty} = 0 \cdot \infty$ FORMA INDETERMINATA



PER RISOLVERE IL LIMITE, FACCIAMO UN CAMBIAMENTO DI VARIABILE

$$\frac{1}{x} = t$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{diventa} \lim_{t \rightarrow -\infty}$$

$$1 = tx$$

$$x = \frac{1}{t}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} -xe^{-\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} -\frac{1}{t} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} -\frac{e^{-t}}{t} = -\frac{+\infty}{-\infty} \quad \text{FORMA INDETERMINATA}$$

$$\text{POSSIAMO APPLICARE DE L'HOPITAL:} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-(e^{-t})(-1)}{1} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-t} = +\infty = \lim_{x \rightarrow 0^-} -xe^{-\frac{1}{x}}$$

LA RETTA $x=0$ È ASINTOTO VERTICALE

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-\frac{1}{x}} = -\infty e^{-\frac{1}{\infty}} = -\infty e^0 = -\infty \cdot 1 = -\infty$$

NON C'È ASINTOTO ORIZZONTALE

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^{-\frac{1}{x}} = +\infty e^{-\frac{1}{-\infty}} = +\infty e^0 = +\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-xe^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-\frac{1}{x}} = -e^0 = -1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-\frac{1}{x}} + x = -\infty + \infty \quad \text{FORMA INDETERMINATA}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(-e^{-\frac{1}{x}} + 1) = +\infty \cdot 0$$

$$q = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-t}}{t} \stackrel{(H)}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{+e^{-t}}{1} = 1$$

$$\text{PONIAMO } \frac{1}{x} = t \\ x = \frac{1}{t}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{diventa} \lim_{t \rightarrow 0^+}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{diventa} \lim_{t \rightarrow 0^-}$$

$$q = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1-e^t}{t} \stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{+e^t}{1} = 1 \Rightarrow \text{la retta } y = -x + 1 \text{ è ASINTOTO OBLIQUO}$$

DERIVATA PRIMA

$$f'(x) = -e^{-\frac{1}{x}} + (-1)e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = -e^{-\frac{1}{x}} - \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} =$$

$$= -e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = -e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{x+1}{x}$$

$$\left(-\frac{1}{x}\right)' = (-x^{-1})' = -(-1)x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

SEGNO DI $f'(x)$ $-e^{-\frac{1}{x}} > 0$ MAI nel dominio

$$\frac{x+1}{x} > 0$$

N: $x+1 > 0$ per $x > -1$
D: $x > 0$

	-1	0
$-e^{-\frac{1}{x}}$	---	---
$\frac{x+1}{x}$	---	---
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

$f(x)$ è crescente per $-1 < x < 0$

$f(x)$ è decrescente per $x < -1$ e per $x > 0$

Nel punto $x_0 = -1$, $f(x)$ ha un minimo dove $f(-1) = -(-1)e^{-\frac{1}{-1}} = e' = e \sim 2,7$

DERIVATA SECONDA

$$f''(x) = -\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} - \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x - e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = -\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} - \frac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x}}{x^2} + \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = -\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3}$$

$$f''(x) > 0 \quad -\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} > 0 \quad N: -e^{-\frac{1}{x}} > 0 \text{ mai nel dominio}$$

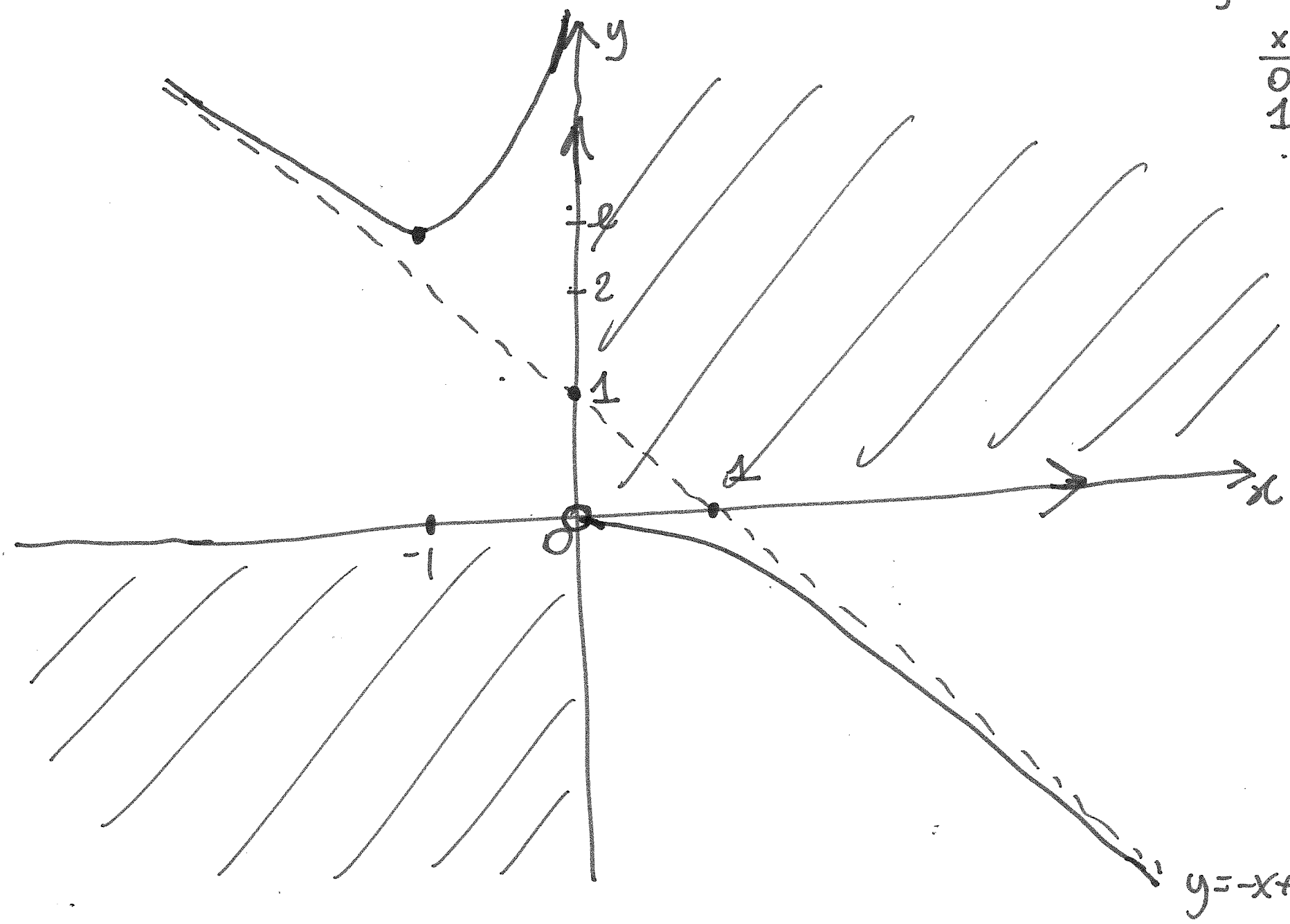
$$D: x^3 > 0 \text{ per } x > 0$$

Nel punto $x=0$ non c'è flesso perché 0 è escluso dal dominio

		0	
N	---		---
D	---		+++
$f''(x)$	+		-
$f(x)$	U		∩

$$y = -x + 1$$

x	y
0	1
1	0



FUNZIONE

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{1+x}$$

Domini: $1+x > 0$
 $1+x \neq 0$

$x > -1$
 $x \neq -1$

$x > -1$ Domini = $(-1, +\infty)$

f non è pari né dispari

Non y: $x=0$

$f(0) = \frac{\log(1)}{1} = \frac{0}{1} = 0$

$\cap$ ori:
 $(0,0)$

Non x: $y=0$ $0 = \frac{\log(1+x)}{1+x}$

$\log(1+x) = 0$

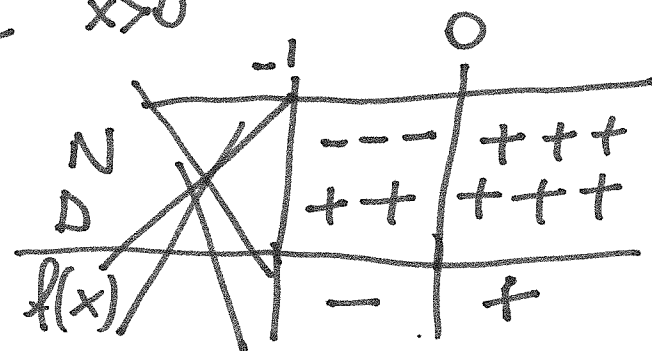
$1+x = 1 \Rightarrow x = 0$

SEGNO di f(x)

$\frac{\log(1+x)}{1+x} > 0$

N: $\log(1+x) > 0$ $1+x > 1$ $x > 0$

D: $1+x > 0$ per $x > -1$



$f(x) > 0$ per $x > 0$ $f(x) < 0$ per $-1 < x < 0$

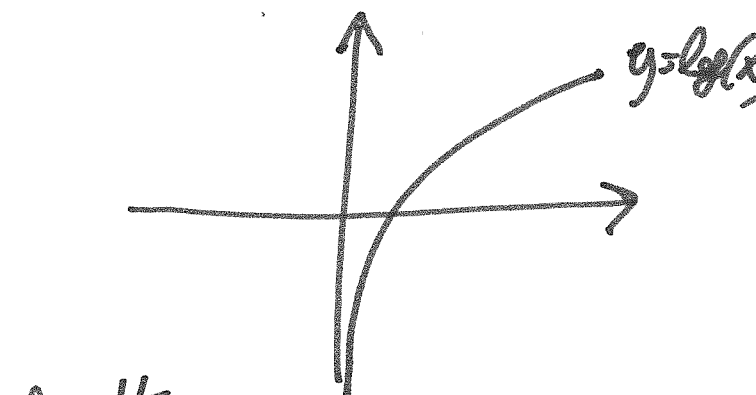
ASINTOTI

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\log(1+x)}{1+x} = \frac{\log(0^+)}{0^+} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

la retta $x = -1$ è ASINTOTO VERTICALE

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+x)}{1+x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ FORMA INDETERMINATA

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+x)}{1+x}$



la retta $y = 0$ è ASINTOTO ORIZZONTALE

DERIVATA PRIMA

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} \cdot \cancel{(1+x)} - \log(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1 - \log(1+x)}{(1+x)^2}$$

$$(\log(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

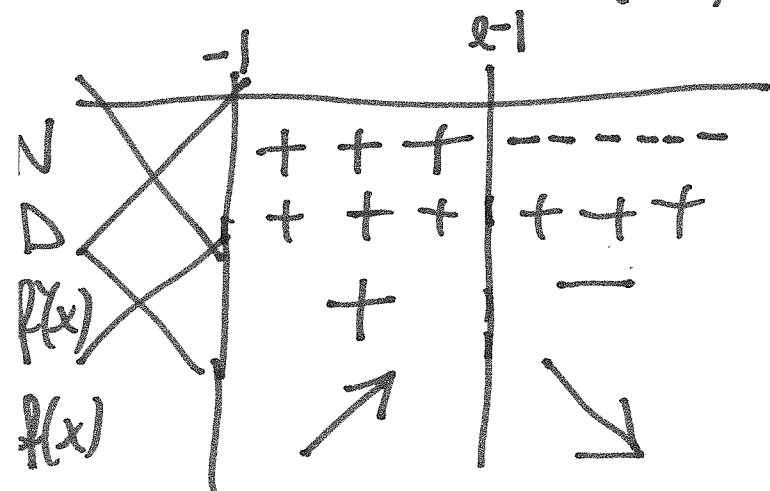
SEGNO DI $f'(x)$

$$\frac{1 - \log(1+x)}{(1+x)^2} > 0$$

$$N: 1 - \log(1+x) > 0 \quad 1 > \log(1+x) \quad e = e^1 > 1+x$$

$$D: (1+x)^2 > 0 \text{ sempre nel dominio}$$

$$x < e-1$$



$f(x)$ è crescente per $-1 < x < e-1$

$f(x)$ è decrescente per $x > e-1$

Nel punto $x_0 = e-1$, $f(x)$ ha un massimo dove $f(e-1) = \frac{\log(e)}{e} = \frac{1}{e}$

$$f(e-1) = \frac{1}{e}$$

DERIVATA SECONDA

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{1+x} \cdot \cancel{(1+x)} - 2(1+x)(1 - \log(1+x))}{(1+x)^4} = \frac{\cancel{(1+x)}(-1 - 2 + 2\log(1+x))}{(1+x)^3} = \frac{2\log(1+x) - 3}{(1+x)^3}$$

$$f''(x) > 0$$

$$N: 2\log(1+x) - 3 > 0$$

$$2\log(1+x) > 3$$

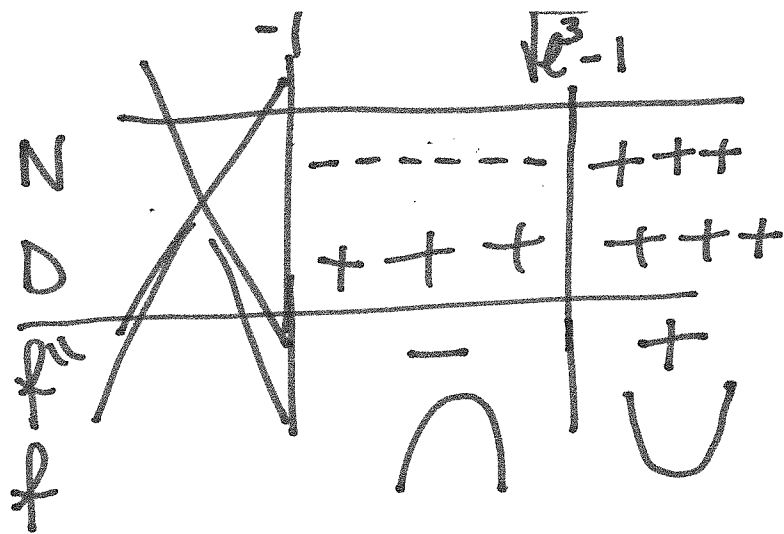
$$\log(1+x) > \frac{3}{2}$$

$$1+x > e^{\frac{3}{2}}$$

$$x > e^{\frac{3}{2}} - 1 = \sqrt{e^3} - 1$$

$$D: (1+x)^3 > 0 \quad (1+x) > 0$$

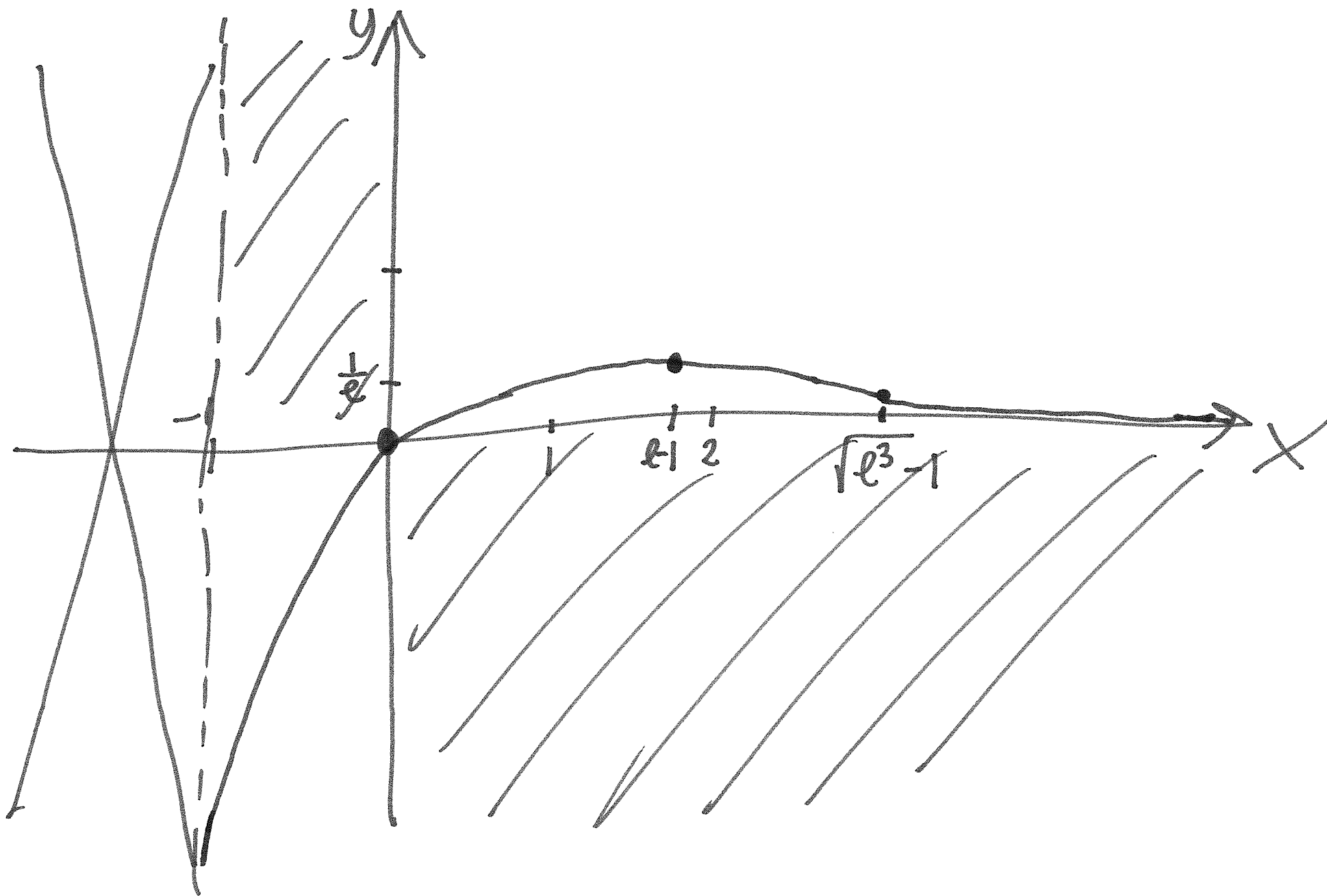
$$x > -1$$



$f(x)$ he concavità verso il basso per $-1 < x < \sqrt{e^3} - 1$
 $f(x)$ he concavità verso l'alto per $x > \sqrt{e^3} - 1$

Nel punto $x_1 = \sqrt{e^3} - 1$, f he un flesso d'ordine

$$f(\sqrt{e^3} - 1) = \frac{\log(e^{\frac{3}{2}})}{e^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^3}}$$



FUNZIONE

NON È RICHiesto lo studio della derivata seconda

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{2x+1}}$$

$$\text{Dominio } \frac{2x-3}{2x+1} \geq 0$$

$$\begin{aligned} N \geq 0 & \quad 2x-3 \geq 0 & x \geq \frac{3}{2} \\ D > 0 & \quad 2x+1 > 0 & x > -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Né pari né dispari

$\cap$ ore y: non esistono

$\cap$ ore x: $(\frac{3}{2}, 0)$

	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
N	--	-- • ++
D	-- ○ ++	++
$\frac{N}{D}$	+	-

$$\text{Dominio: } x < -\frac{1}{2} \text{ o } x \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Dominio} = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$$

Segno: $f(x) > 0$ nel dominio sempre tranne che in $x_0 = \frac{3}{2}$

Asintoti verticale la retta $x = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$$

Asintoti orizzontale la retta $y = 1$

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{(2x-3)(2x+1)^3}}$$

$f(x)$ è sempre crescente nel dominio

In $x_1 = \frac{3}{2}$, f ha un minimo (dove f non è derivabile)

