

DERIVATE

Def. $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in I$, x_0 interno ad I ,
 e $\exists$ finito il limite del
 rapporto incrementale in x_0
 allora f è derivabile in x_0 :

$$\boxed{f'(x_0)} = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$\uparrow$
 rapp. increment.
 in x_0

Prop.

Se f è derivabile in x_0 $\Rightarrow f$ è
continua in x_0 .

dim.:

$$f(x) - f(x_0) = \overset{\nearrow 0}{(x - x_0)} \cdot$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$$

Facciamo $\lim_{x \rightarrow x_0}$

$f'(x_0) < +\infty$

Quindi il secondo membro $\rightarrow 0$
per cui il I membro $\rightarrow 0$, per cui
 $f(x) \rightarrow f(x_0)$. $\square$

Oss.

Se f non è cont. in $x_0 \Rightarrow$ non è
derivabile in x_0 .

Derivata destra - derivata sinistra

• f è derivabile in x_0 se il rapporto
incrementale ha limite finito
sia per $h \rightarrow 0^+$ che per $h \rightarrow 0^-$ ed i 2
limiti sono =.

• Se $\exists$ finito solo lim $\lim_{h \rightarrow 0^+}$ del

rapporto increm. $\Rightarrow f$ derivabile $\frac{dx}{dx}$

• se $\exists$ finito lim rapp.to incre =
 $h \rightarrow 0^+$
 monotone $\Rightarrow f$ è derivabile a sin.

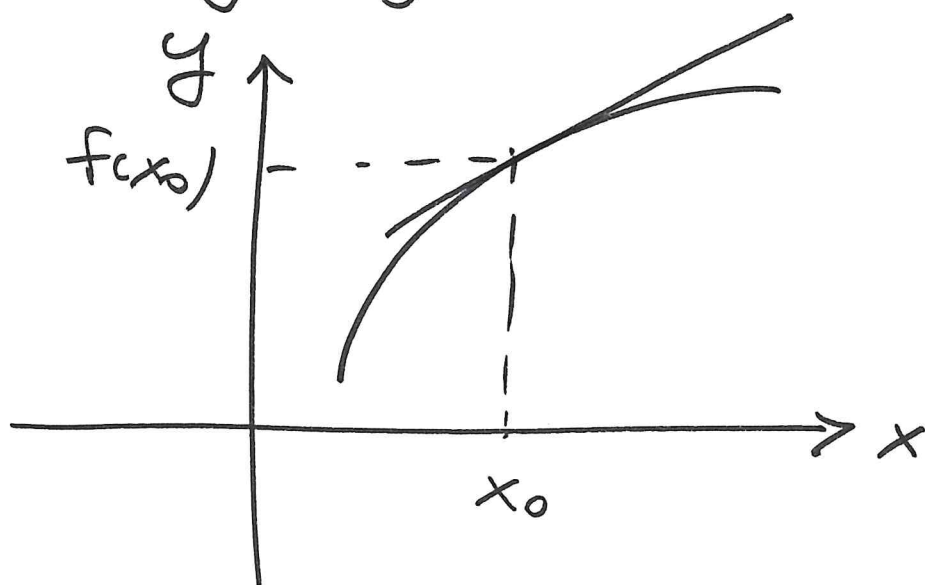
es.

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

in a posso solo avere derivata
 destra, in b posso solo avere
 una derivata sin.

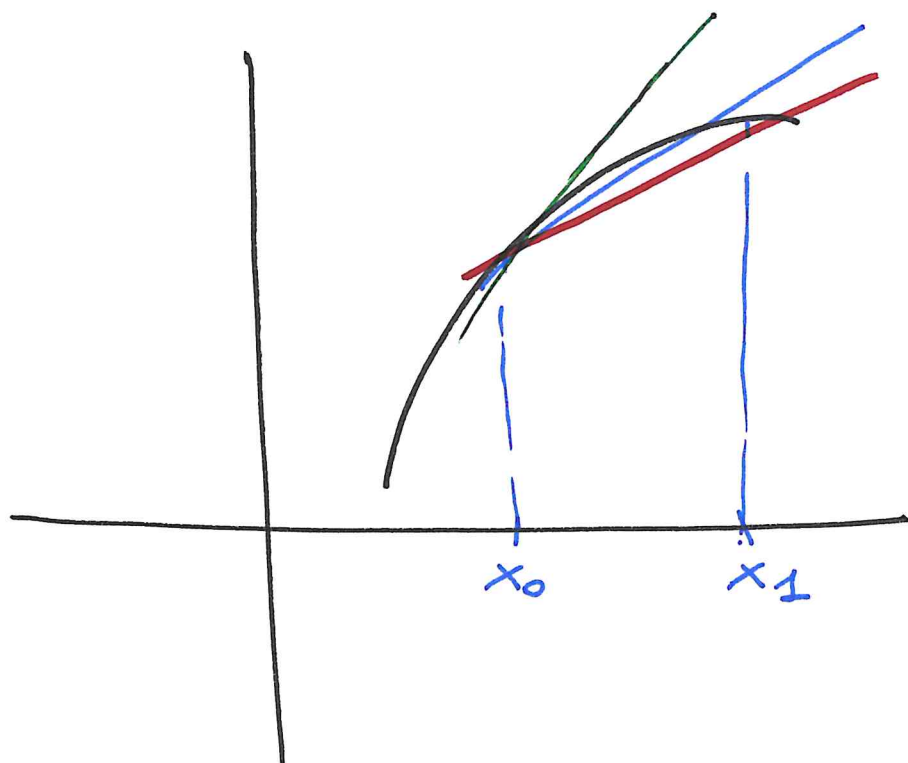
SIGNIFICATO GEOMETRICO DI $f'(x_0)$

$f'(x_0)$ è il coeff. angolare di
 retta tg il grafico di f in x_0



$$y = f(x) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot (x - x_0) \quad \text{retta sec.}$$

$$y = f(x) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \text{retta tg.}$$



Def. Sia f derivabile in $\forall x \in I$

allora definisco $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$

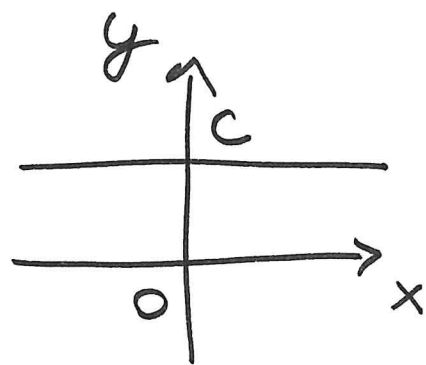
$\uparrow$
la funzione derivata
di f .

CALCOLO DELLE DERIVATE DI
F.NI ALGEBRICHE

$$(1) \boxed{f(x) = c} \quad \text{cost.} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$f' ?$$

$$f' = 0$$



$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \Rightarrow \boxed{f'(x) = 0}$$

Oss. Vale anche il viceversa

• Una funzione derivabile con

$$\boxed{f'(x) = 0} \text{ su } I \Rightarrow f \text{ è } \boxed{\text{cost.}} \text{ su } I$$

Per il significato geometrico della derivata, derivata = 0 equivale a tutte le rette tg.

al grafico sono orizzontali.

$$\Rightarrow \text{grafico}(f) \equiv \text{retta orizzontale}$$

□

(2) Derivata di una funzione lineare

$$y = f(x) = \textcircled{m} \cdot x + q \Rightarrow f'(x) = m$$

$$m, q \in \mathbb{R}.$$

lim:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{m(x+h) + q - (mx+q)}{h}$$

$$= \frac{\cancel{mx} + \cancel{mh} + \cancel{q} - \cancel{mx} - \cancel{q}}{\cancel{h}} = m$$

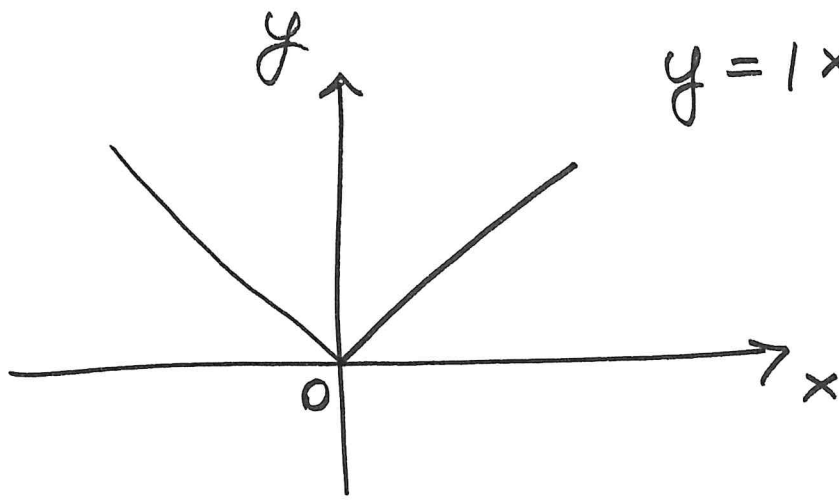
$$\lim_{h \rightarrow 0} m = m = f'(x)$$

App. invece.
è cost. non
dep. da h

• Tutte le f. ni lineari sono deri-
valori $\forall x$ e hanno $f' = \text{cost} = \text{coef}$
ficiente di x .

ex. $f(x) = |x|$

$$f'(0) \text{ , } \exists \text{ , } ?$$



$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} +1 & \text{se } h > 0 \\ -1 & \text{se } h < 0 \end{cases}$$

f non è derivabile in 0.

$\exists$ derivata dx. $\equiv +1$

$\exists$ derivata sn. $\equiv -1$

SOMMA DI 2 FUNZIONI

Prop. La somma di 2 f. ui derivabili è derivabile e

$$(f+g)' = f' + g' \quad (*)$$

es. $f(x) = u \cdot x + q$

$h(x) = q$ " g " h ; $g(x) = u \cdot x$

lim. (*) :

$$\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \frac{\underline{f(x+h)} + \underline{g(x+h)} - \underline{f(x)} - \underline{g(x)}}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$\downarrow h \rightarrow 0$ $\downarrow h \rightarrow 0$

$f'(x)$ $g'(x)$

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{c.f.d.}$$

Analogamente :

$$(f-g)' = f' - g'$$

• f, g derivabili

$$\boxed{f'(x) \equiv g'(x)} \Rightarrow \underbrace{f'(x) - g'(x)}_{\parallel} = 0$$

$$\forall x \in I \quad (f-g)'(x)$$

$$f - g = \text{cost} \Rightarrow \boxed{f = g + \text{cost}}$$

Due f.m. con la stessa derivata in ogni ptb di I differiscono per una costante.

(3) Derivate di f.m. quadratiche:

$$f(x) = \underbrace{a \cdot x^2}_{g(x)} + \underbrace{b \cdot x + c}_{h(x)}$$

$$a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f'(x) = ?$$

$$f = g + h$$

$$g(x) = \underbrace{a x^2}_{g(x)}$$

$$h(x) = b x + c$$

$$h'(x) = b$$

$$\frac{d}{dx}(ax^2) = ?$$

$$\frac{a(x+h)^2 - ax^2}{h} = \frac{a(\cancel{x^2} + 2xh + h^2)}{h}$$

$$\frac{-a\cancel{x^2}}{h} = \frac{2axh + h^2a}{h} = 2ax + \cancel{h}a \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2ax$$

$$g'(x) = 2ax$$

$$f' = g' + h'$$

$$\boxed{f'(x) = 2ax + b}$$

f' è lineare

(4) derivata di una potenza

$$\frac{d}{dx}(a \cdot x^k) = ?$$

dimu :

$$\frac{a \cdot (x+h)^k - a \cdot x^k}{h} =$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \left[a \cdot \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j! (k-j)!} x^{k-j} h^j - a x^k \right]$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{(x+h)^k}$

$$= \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(\cancel{x^k} + k x^{k-1} h + \frac{k(k-1)}{2} x^{k-2} h^2 + \dots + h^k \right) - \cancel{a x^k} \right]$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \left[a \left(k x^{k-1} h + \frac{k(k-1)}{2} x^{k-2} h^2 + \dots + h^k \right) \right] =$$

$$= \underbrace{a k x^{k-1}}_{\substack{\downarrow \\ a k x^{k-1}}} + \underbrace{\frac{k(k-1)}{2} x^{k-2} h}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ as } h \rightarrow 0}} + \dots + \underbrace{a h^{k-1}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ as } h \rightarrow 0}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} (a x^k) = k a x^{k-1}}$$

$$\frac{d}{dx} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)$$

↑
polyn. di grado n

$$= n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

La derivata prima di un polinomio di grado n è un polinomio di grado $(n-1)$.

PRODOTTO DI F.N.I.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

↑
Regola di Leibniz

⚠ FALSO $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$

dir:

$$\frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} = \quad \swarrow \pm f(x) \cdot g(x+h)$$

$$= \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h) \cdot \underline{g(x+h)} - f(x) \cdot \underline{g(x+h)}}{h} +$$

$$+ \frac{\underline{f(x)} \cdot g(x+h) - \underline{f(x)} \cdot g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x)$

$\downarrow \xrightarrow{h \rightarrow 0} g(x)$

$$= f'(x) g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \square$$

Casi particolari

$$(1) \quad \boxed{(c \cdot f)' = c' \cdot f + c \cdot f' = \boxed{c \cdot f'}}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 g usd Liebnitz

$$g(x) \equiv \cos t$$

$$(2) \quad (f^2)' = 2 \cdot f \cdot f'$$

$$f^2 = f \cdot f \quad \downarrow \quad \boxed{f' \cdot f} + \boxed{f \cdot f'} = \boxed{2f \cdot f'}$$

$g = f$ $\times \text{Liebnitz}$

$$(3) \quad (f^3)' = (f^2)' \cdot f + f^2 \cdot f'$$

$$f^3 = f^2 \cdot f \quad \downarrow \quad 2f^2 f' + f' f^2 =$$

$$\quad \quad \quad \downarrow \quad \boxed{3f^2 \cdot f'}$$

$$(4) \quad \boxed{(f^k)' = k f^{k-1} \cdot f'}$$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$$f^k = f^{k-1} \cdot f$$

DERIVATA DI F.NE RECIPROCA

$$\frac{1}{f} = \text{f.ne reciproca di } f$$
$$\left(\frac{1}{f}\right) \cdot f \equiv 1$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'$$

dim. 1

$$f \cdot \frac{1}{f} = 1$$

Applied Leibniz:

$$0 = \frac{d}{dx} (f \cdot \frac{1}{f}) = f' \cdot \left(\frac{1}{f}\right) +$$
$$+ f \left(\frac{1}{f}\right)' \Rightarrow \boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}}$$

dim. 2:

$$\frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \frac{f(x) - f(x+h)}{f(x+h)f(x) \cdot h} =$$

$$= \ominus \frac{1}{f(x+h) \cdot f(x)}$$

$$\downarrow h \rightarrow 0$$

$$-\frac{1}{f^2(x)}$$

$$= \boxed{\frac{-f'(x)}{f^2(x)}}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\downarrow h \rightarrow 0$$

$$f'(x)$$

usd Lieb.

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'} = f' \cdot \frac{1}{g} + f \left(\frac{1}{g}\right)' =$$

$$\left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{f g'}{g^2} = \left(\frac{f}{g}\right)'$$

$$= \boxed{\frac{f'g - fg'}{g^2}}$$

Ex. 1 Calcolare f' delle seguenti f :

(a) $6 \cdot x + 2 = f(x) \rightarrow f'(x) = 6$

(b) $2x^2 - 12 \cdot x + 7 = f(x) \rightarrow f'(x) = 4 \cdot x - 12$

(c) $\pi \cdot x^3 - \sqrt{2} \cdot x^2 + \sqrt{2} \cdot x - \pi$

(d) $x^5 - 3x^3 + 12 \cdot x$

(e) $x^{12} - 7x^5 + 3x^3 - \pi$

Ex. 2 Calcolare f' :

(a) $f(x) = (x-1) \cdot (x+1)$

(b) $f(x) = (2x^2 - 7) \cdot (x^3 + 3)$

(c) $f(x) = (x+1)^5 = g^k$

(d) $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$

Ex. 3 Calcule f' :

$$(a) f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$(b) f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$(c) f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$(d) f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$(e) f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$$

$$(f) f(x) = \frac{(x^2 + 2x - 3) \cdot (x^3 - 1)}{x^2 + 3x + 6}$$