

Lezione 4

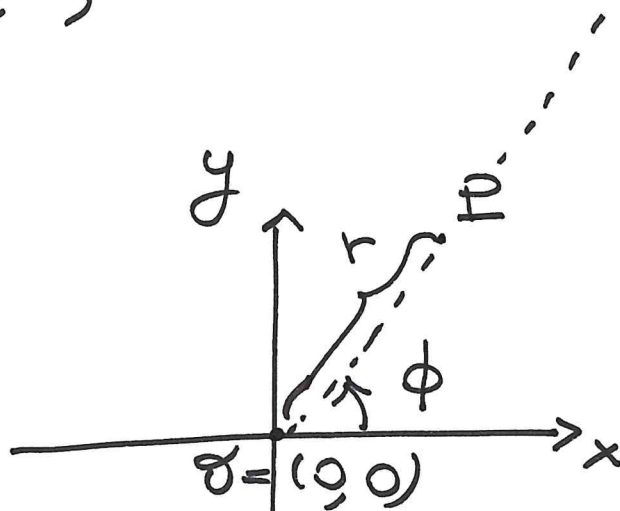
COORDINATE POLARI

Sono coordinate diverse dalle coord. cartesiane, in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Sia $P = (x, y) \neq (0,0) \leadsto$

$$\exists d(P, O) = r$$

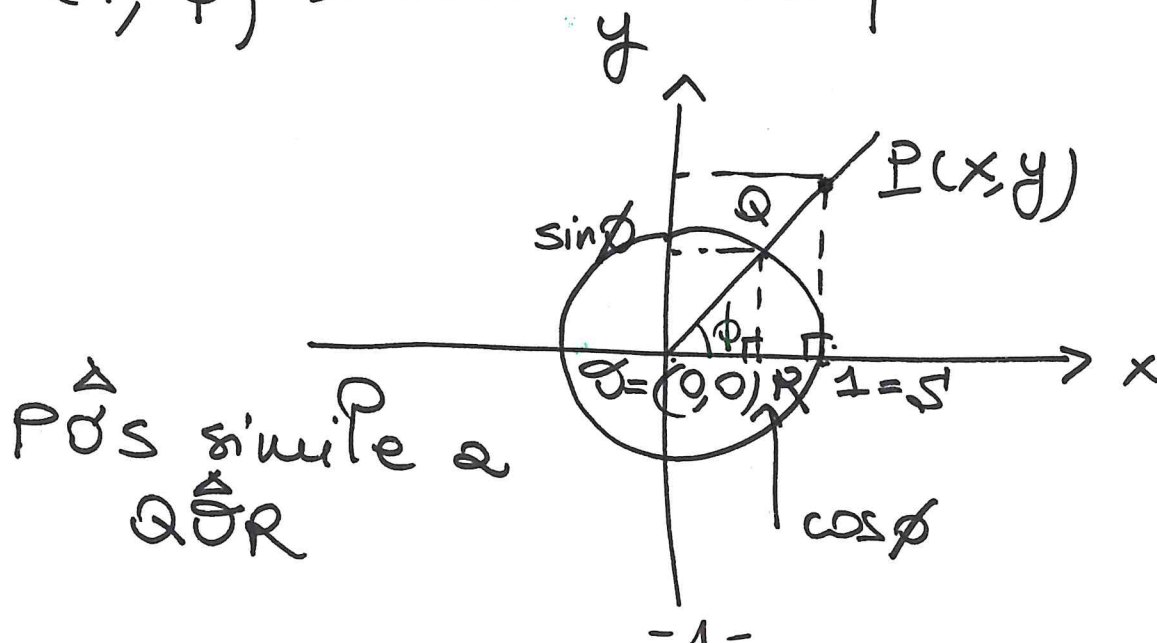
$O = (0,0)$



$\exists \phi \in [0, 2\pi)$ angolo

tra il semiasse positivo delle x
e la semiretta OP .

$(r, \phi) =$ coordinate polari di P .



$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$$

Dati $(r, \phi) \leadsto (x, y) \neq (0, 0)$

Oss. In $(0, 0)$ le coord polari non sono definite.

In $(0, 0)$ $\leadsto r = 0$, ma ϕ è indeterminato.

Domanda: Dati x, y , come trovare r e ϕ ?

r lo trovo con il Teorema di Pitagora:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad r = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

Dato r , trovo $\phi \in [0, 2\pi)$, unico

t.c.

$$\begin{cases} \cos \phi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \phi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Ex. $P = (2, \pi/4) \rightsquigarrow$ COORDINATE POLARI

$\begin{matrix} \text{"} r \text{"} & \text{"} \phi \text{"} \end{matrix}$

Trovare coord. cart.?

$$\begin{cases} x = 2 \cdot \cos \pi/4 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ y = 2 \cdot \sin \pi/4 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$Q = (\underbrace{2\sqrt{3}}_{\text{"} x \text{"}}, \underbrace{-2}_{\text{"} y \text{"}})$ $\rightsquigarrow$ COORD. CARTESIANE

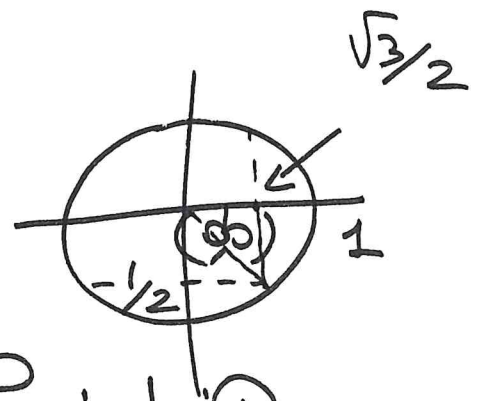
$$r = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = \textcircled{+4}$$

$\phi \in [0, 2\pi)$ t.c.

$$\begin{cases} \cos \phi = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \phi = \frac{-2}{4} = -1/2 \end{cases}$$

$$\phi = -\pi/6 + 2\pi = \textcircled{11/6 \pi}$$

$(4, 11/6 \pi) =$ coord. polari di Q.



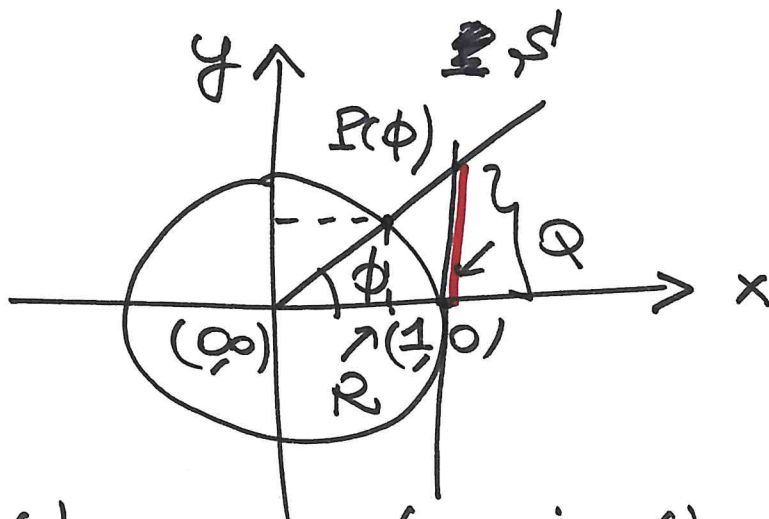
oss. le api usano le coordinate polari per spostarsi.

r = distanza dei fiori da alveare.

ϕ = direzione risp. all'asse che unisce l'alveare e sole.

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Def. $\tan \phi := \frac{\sin \phi}{\cos \phi}$
 $\text{tg } \phi$



$$P(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi)$$

Δ_{QS} è nullo e Δ_{PR} :

$$\overline{QS} : \sin \phi = 1 : \cos \phi \Rightarrow$$

$$\overline{QS} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \tan \phi$$

Prop. $\tan \phi$ di $\sin \phi$, $\cos \phi \Rightarrow$
 prop. $\tan$ su $\tan \phi$.

PROPRIETÀ $\tan \phi$

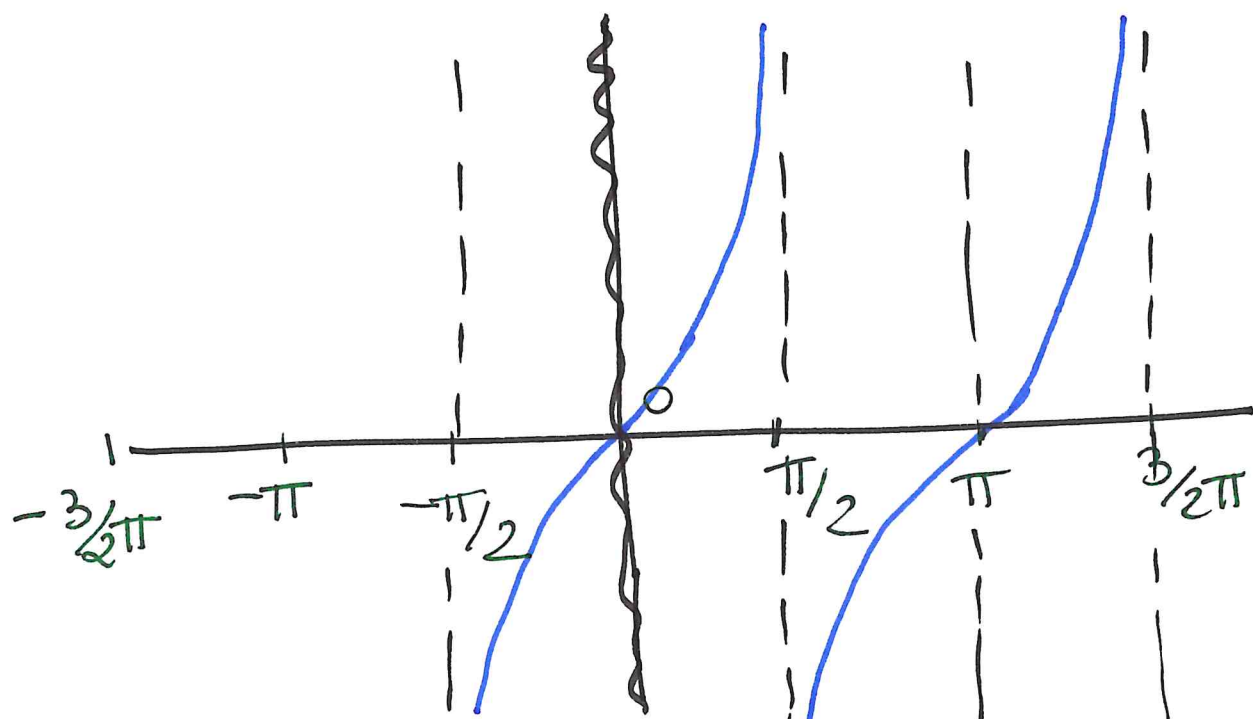
- (1) $\tan \phi$ NON è definita ove
 $\cos \phi = 0$ ovvero in $\pi/2 + k\pi$,
 $k \in \mathbb{Z}$.
- (2) $\tan \phi$ è periodica di periodo
 π , i.e. $\tan(\phi + k\pi) = \tan(\phi)$.
- (3) $\tan \phi$ è funzione dispari.
- (4) $\tan \phi$ è monotona strett. crescente
 in $(-\pi/2 + k\pi, +\pi/2 + k\pi)$

$$(5) \tan \phi > 0 \quad \text{se} \quad \phi \in (k\pi, \pi/2 + k\pi) \\ < 0 \quad \text{se} \quad \phi \in (-\pi/2 + k\pi, k\pi)$$

(6) $\tan \phi$ ha un asintoto verticale nelle singolarità i.e.:

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2 + k\pi)^{\pm}} \tan \phi = \mp \infty \\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

(7) Immagine $\tan \mid_{(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)} = \mathbb{R}$



COTANGENTE

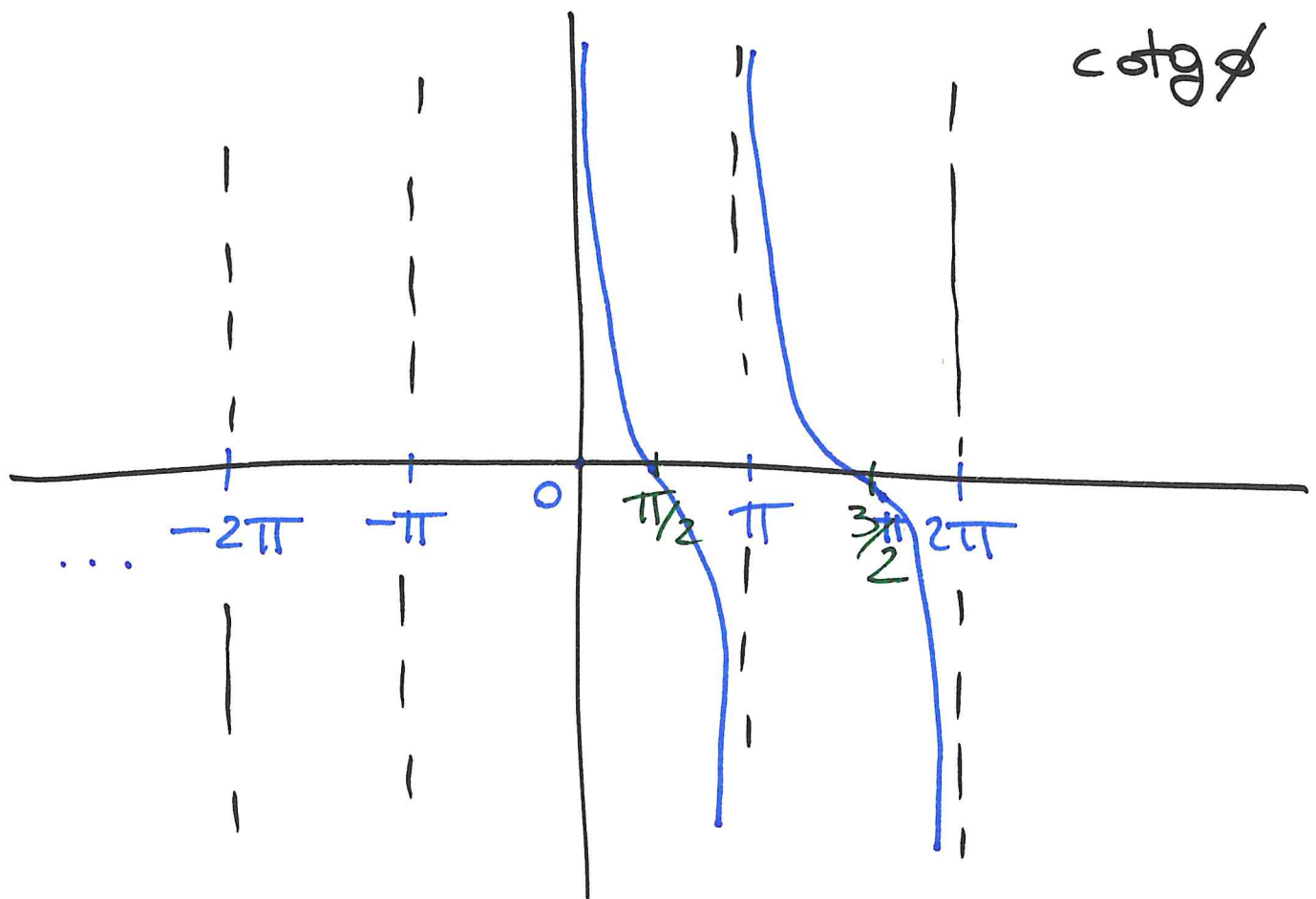
$$\begin{array}{c} \cot \phi \\ \cot \phi \\ \cot \phi \end{array} := \frac{\cos \phi}{\sin \phi} = \frac{1}{\tan \phi}$$

- (1) $\cot \phi$ NON è definita
ove $\sin \phi = 0$ ovvero $\phi = k\pi$
- (2) $\cot \phi$ è PERIODICA di periodo π .
- (3) $\cot \phi$ è DISPARI (come $\tan \phi$)
- (4) $\cot \phi$ è monotona strett.
decrescente in $(k\pi, (k+1)\pi)$
 $\forall k \in \mathbb{Z}$.
- (5) $\cot \phi > 0$ in $(k\pi, \pi/2 + k\pi)$
- (6) $\cot \phi < 0$ in $(-\pi/2 + k\pi, k\pi)$

(7) $\cot g \phi$ ha asintoto verticale

$$\lim_{x \rightarrow (k\pi)^{\pm}} \cot g \phi = \pm \infty$$

$$(8) \operatorname{Im} \cot \phi \Big|_{(k\pi, (k+1)\pi)} = \mathbb{R}$$

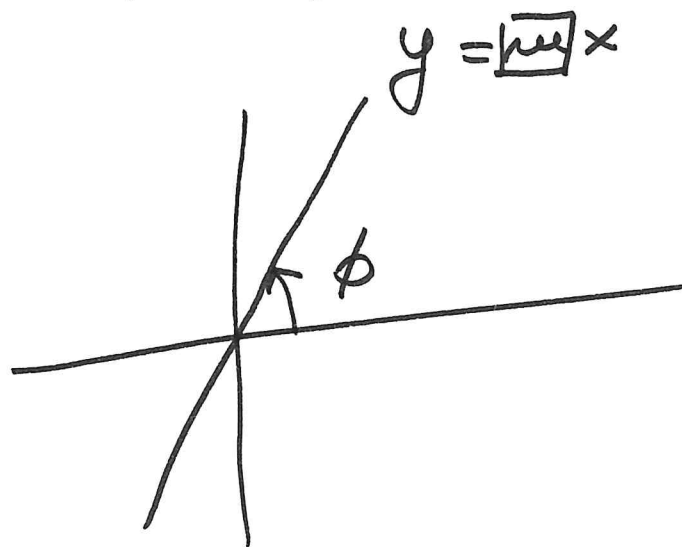


Oss. Se $f(x) = m \cdot x = y$

sia P e retta

" (x, y) abbia coord. polari (r, ϕ) "

$$\boxed{m} = \frac{y}{x} = \frac{\cancel{r} \cos \phi}{\cancel{r} \sin \phi} = \boxed{\tan \phi}$$

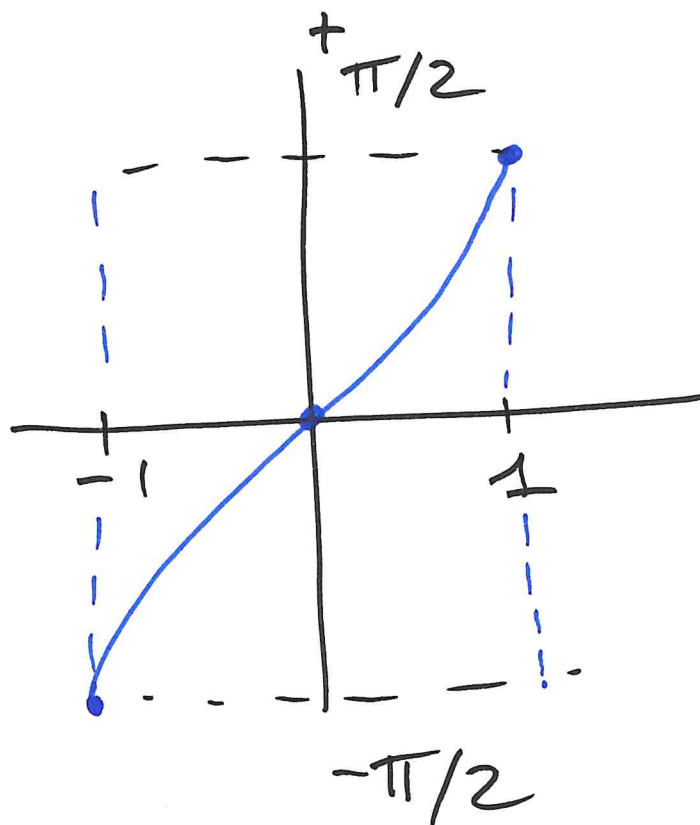


-
- Le f. m. periodiche $\sin \phi$ e $\cos \phi$ NON sono globalmente invertibili; non sono globalmente iniettive, ma se restringo l'intervallo di definizione lo diventa no.

$\sin \phi$ è str. crescente in $[-\pi/2, +\pi/2]$

con immagine $[-1, 1] \Rightarrow$
possiamo invertire e trovare:

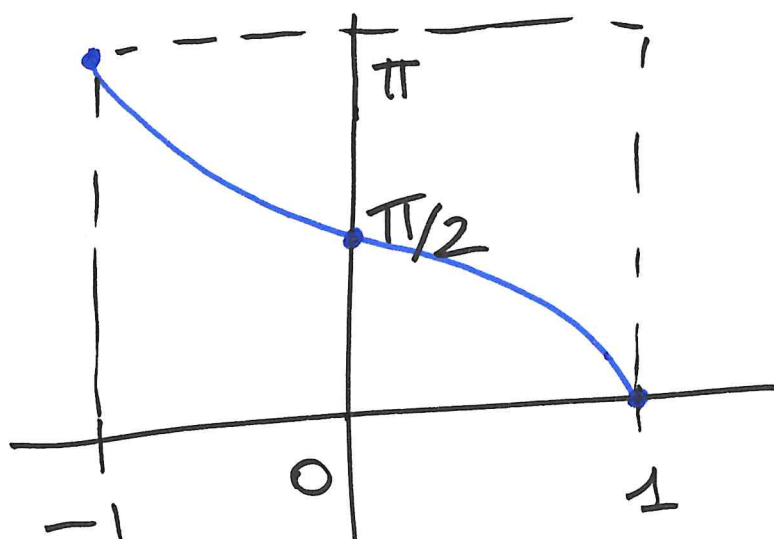
$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$



$\phi = \arcsin x$ è l'unico angolo tra
 $-\pi/2$ e $+\pi/2$ t.c. $\sin \phi = x$

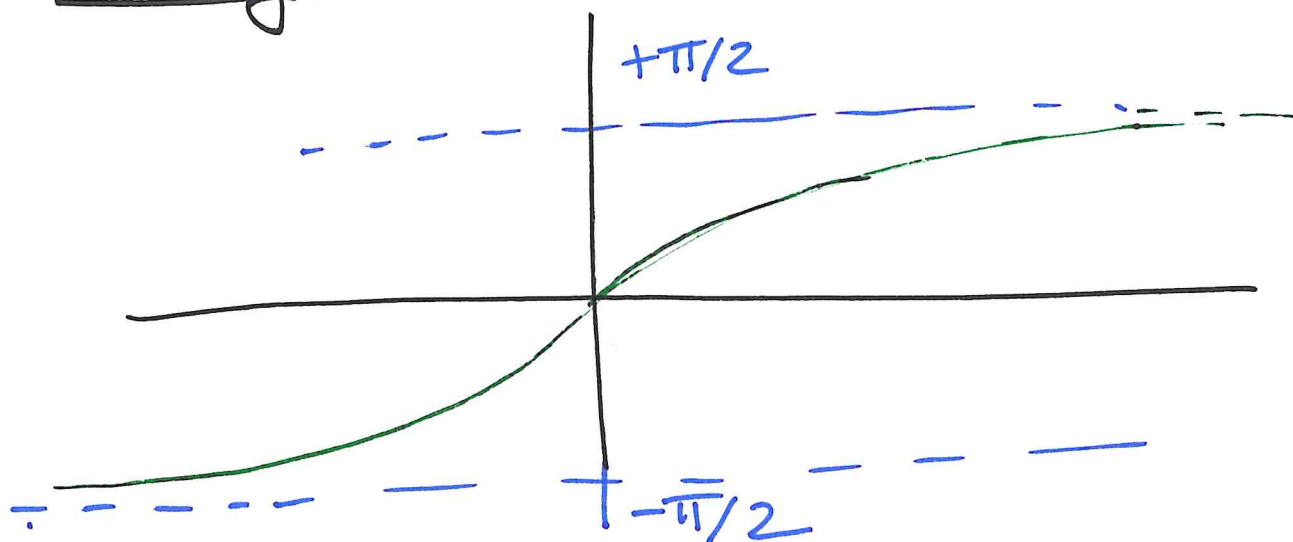
Arccos :

$\cos \phi$ iniettiva in $[0, \pi]$
con valori $[-1, 1]$



$\phi = \arccos x$ è l'unico angolo
tra 0 e π con $\cos \phi = x$

Arctg



$\phi = \arctg x$ è l'unico angolo
tra $(-\pi/2, \pi/2)$ con $\tg = x$

$\tg$ è str. crescente in $(-\pi/2, \pi/2)$
con immagine $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\pi/2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = +\pi/2$$

$$\arctg : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, +\pi/2)$$

Ex. 1 calcolare

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(4h)}{h}$$

$$(\text{Ricordarsi } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1)$$

Ex. 2

Trovare dominio di

$$\arccos\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

Ex. 3

Calcolare

$$\arctan 1 ?$$

$$\arctan 0 ?$$

$$\arccos 1 ?$$

$$\arcsin \frac{1}{2} ?$$

Ex. 4

Verificare

$$(1) \sin(3\phi) = 3\sin\phi - 4\sin^3\phi$$

($3\phi = 2\phi + \phi$ + formule
di addizione e duplica-
zione)

$$(2) \cos(3\phi) = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$$

Ex.5 Trouver le coord. polari.

$$\begin{aligned} \text{di. } (x, y) &= (2, 2) \\ (x, y) &= (-1, 0) \\ (x, y) &= (-3, 3) \end{aligned}$$

Ex.6 Trouver le coord. cart.
di.

$$(r, \phi) = (4, \frac{3}{2}\pi)$$

$$(r, \phi) = (\sqrt{3}, \pi/3)$$

$$(r, \phi) = (3, \pi)$$

DERIVATE

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad I \subseteq \mathbb{R}$$

↗ intervallo

Voglio misurare la velocità
di variazione di f in $x_0 \in I$.

Fisso $x_1 \in I$, $x_1 \neq x_0$

VARIATIONE

ASSOLUTA:

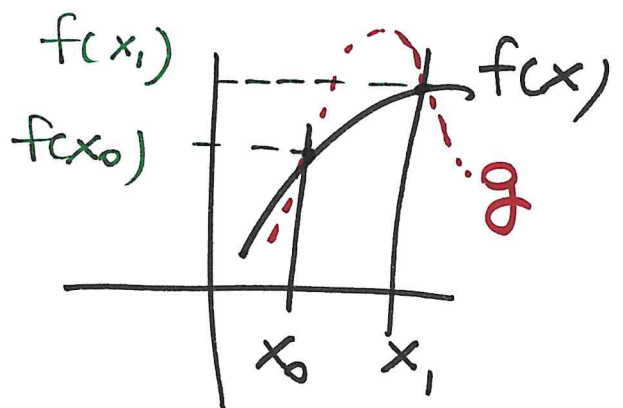
$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

$$\Delta g = \Delta f$$



troppo

grossolano



VARIATIONE MEDIA
o RELATIVA:

$$\boxed{\frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

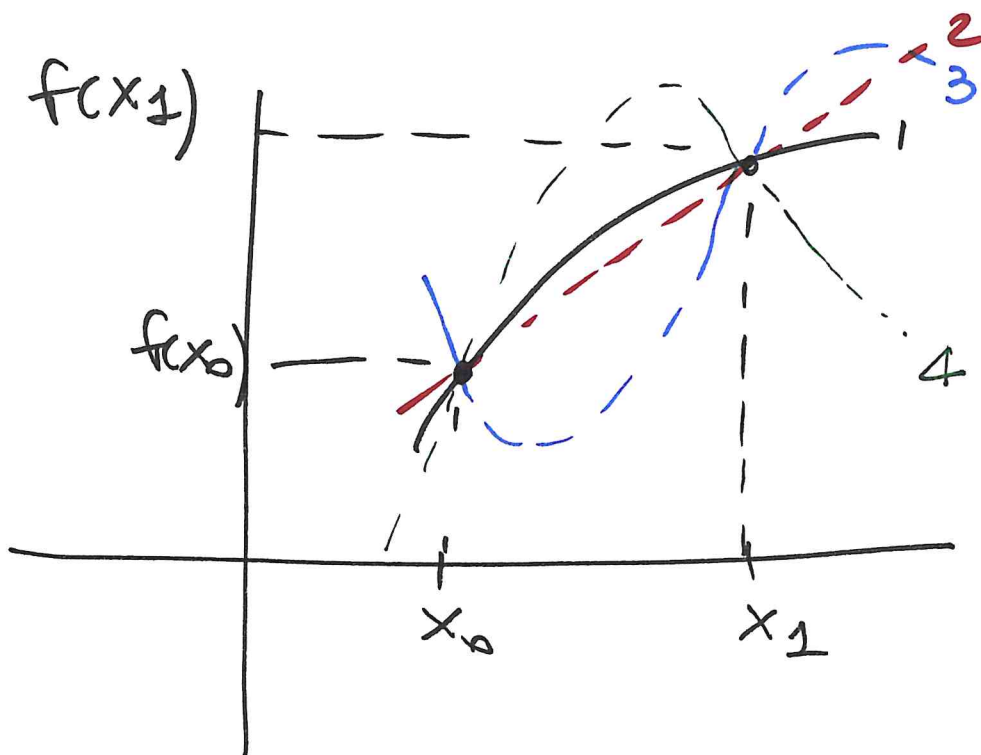
$$\Delta x = x_1 - x_0$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\underbrace{x_1 - x_0}_{\text{"}\Delta x\text{"}}} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Oss.

La variazione media = coefficiente angolare di retta secante il grafico di f , che collega $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$

$$\boxed{y = f(x_0) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot (x - x_0)}$$



Anche la variazione media,
meglio dell'assoluta e
troppo grossolana: 1, 2, 3, 4
hanno la stessa variazione
media

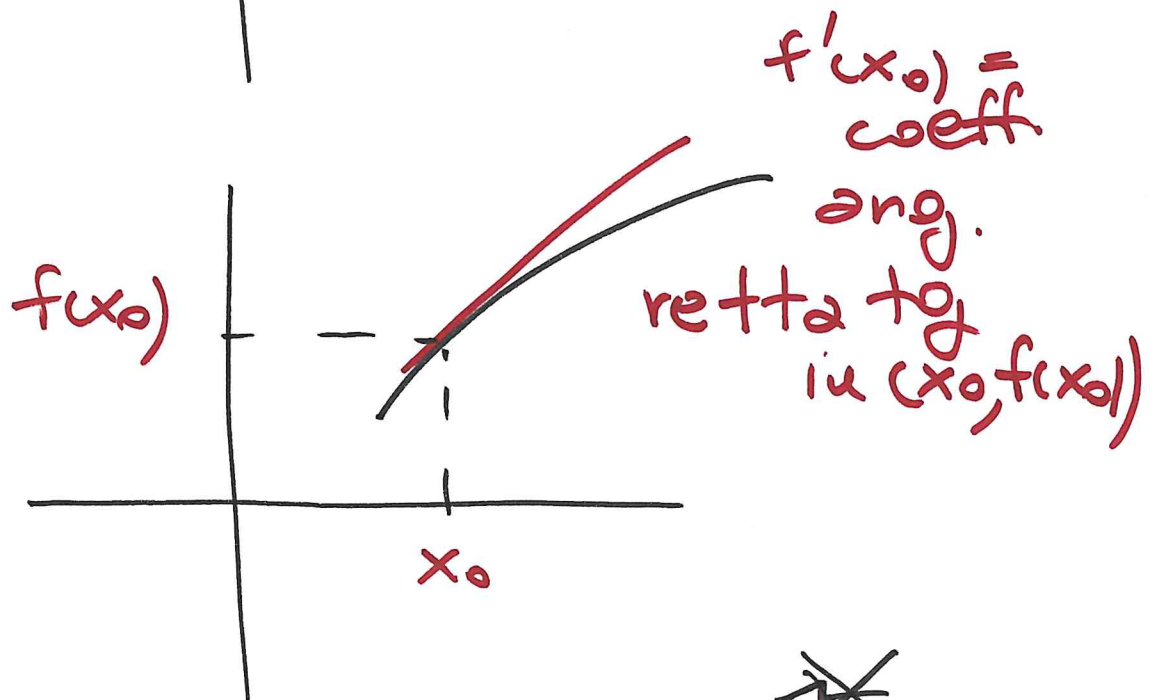
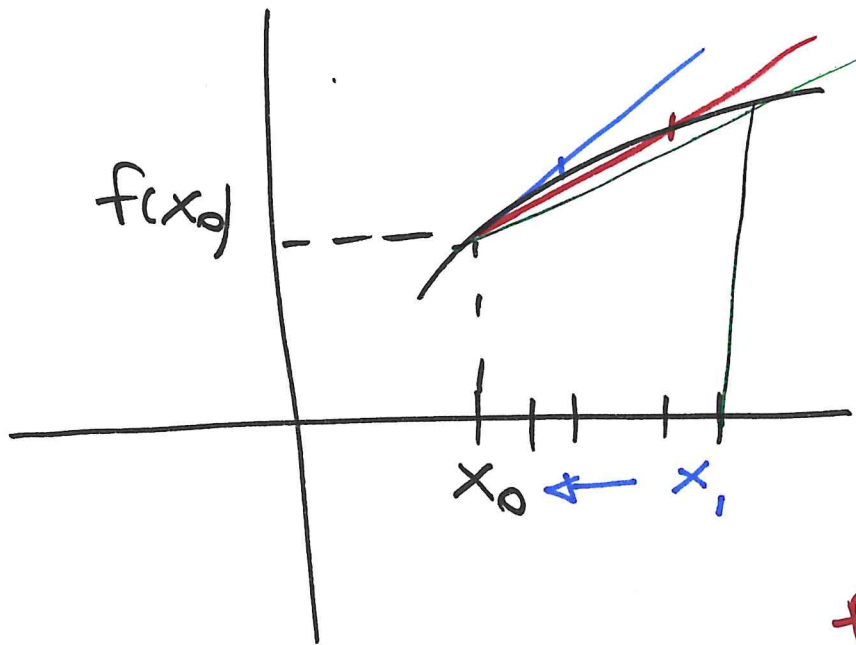
$$\frac{\text{VARIATIONE}}{\text{ISTANTANEA}} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

$$h = \Delta x$$



Oss. f derivabile in $x_0 \Rightarrow$ ~~f continua in x_0~~
 continua in x_0