FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

si usano per rappresentare fenomeni periodici.

Def. f è periodica di periodo $P>0$ se $f(x+P)=f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

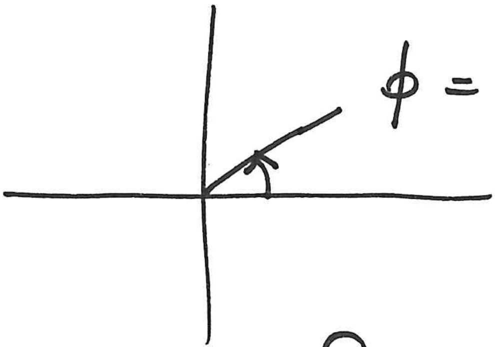
Oss. Una f.ne è periodica di periodo P se il suo grafico NON cambia per traslazioni orizzontali (a sx. o a dx) di P o suoi multipli.

Ex. Le f.ni costanti sono periodiche

Un oggetto matematico periodico è l'ANGOLO

$$90^\circ \quad e \quad 90^\circ + \underbrace{360^\circ}_{} = 450^\circ$$

sono lo stesso angolo.



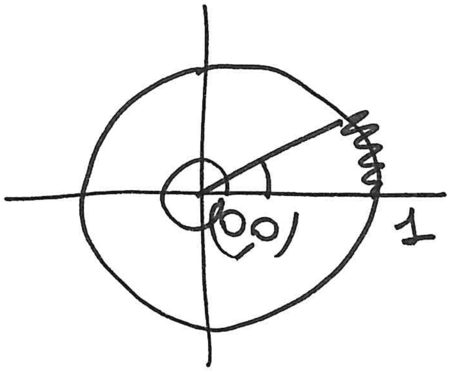
$$\phi = \phi + 360^\circ$$

Il grado non ha alcun significato geometrico.

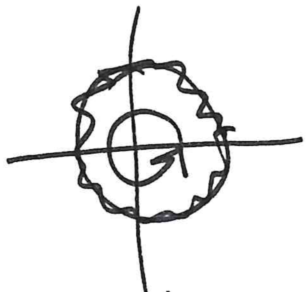
Il radiante (rad) è più naturale ed è legato a lunghezze geometriche.

Def. L'angolo di 1 radiante è l'angolo che sottende un arco di lunghezza 1 nella cfra di centro (0,0) e raggio 1.

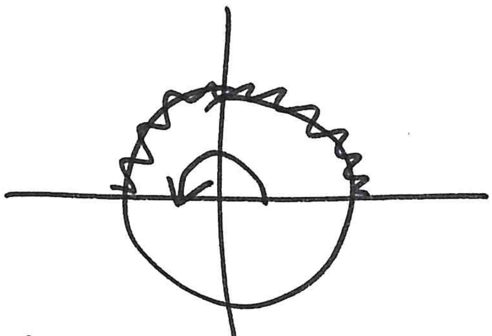
La misura in radianti di un angolo coincide con la lunghezza di arco sotteso nella cfra di centro (0,0) e raggio 1.



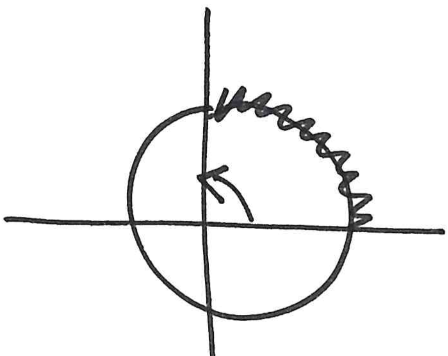
ex. L'angolo giro = $360°$ = 2π rad.



ex. L'angolo piatto = $180°$ = π rad.



ex. L'angolo retto = $90°$ = $\pi/2$ rad



Regola generale:

angolo di d° sottende $\left(\frac{d}{360}\right)$ di

cfra per cui misura $(\cancel{2}\pi)\cdot\frac{d}{\cancel{360}_{180}}$

$$\boxed{d^\circ = \frac{\pi}{180}\cdot d \text{ rad}}$$

Per alcuni angoli notevoli:

$1^\circ = \pi/180$ rad

$30^\circ = \pi/6$ rad $= \frac{\cancel{30}^{1}}{\cancel{180}_{6}}\pi$ rad

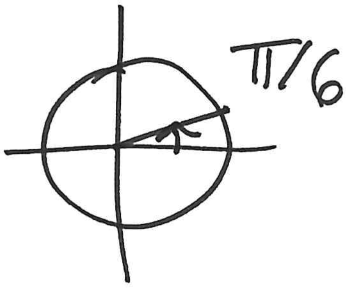
$45^\circ = \frac{\cancel{45}^{1}}{\cancel{180}_{4}}\pi$ rad $= \pi/4$ rad.

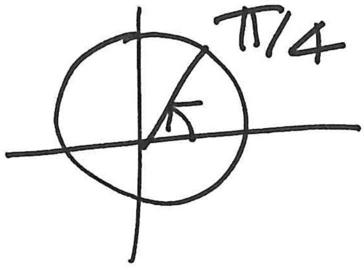
$60^\circ = \pi/3$ rad ; $90^\circ = \pi/2$ rad

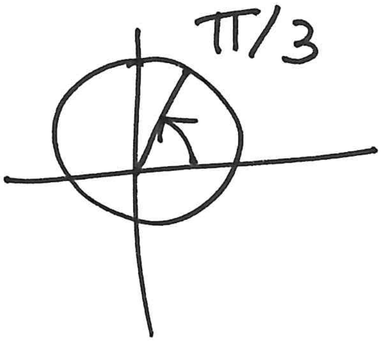
Viceversa

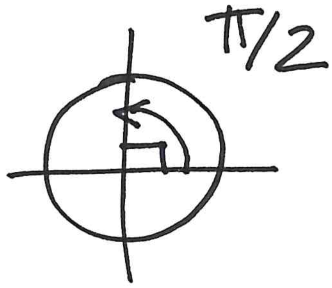
$$r \text{ rad} = \left(\frac{180 \cdot r}{\pi}\right)^{\circ}$$

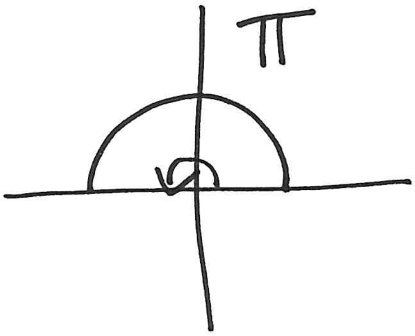
(prima molt.vo per $\pi/180$
ora molt.co per $\frac{180}{\pi}$).











$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 57{,}29\ldots^{\circ}$$

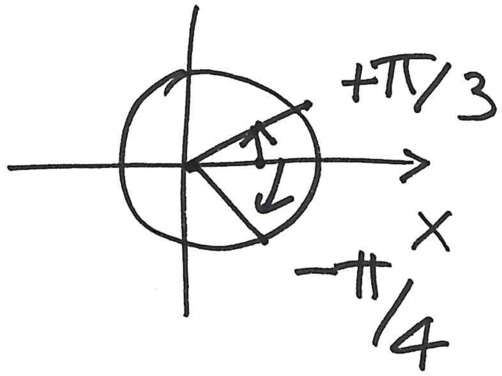
Oss.

Gli angoli hanno 1 verso.

Se li misuro in senso antiora=rio $\Rightarrow \phi > 0$

Se li misuro in senso orario

$\phi < 0$.



• La misura degli angoli è perio=dica

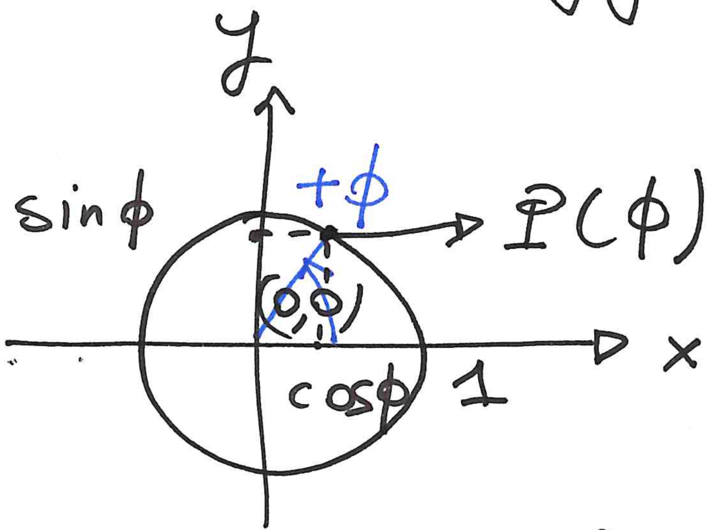
Angolo di r radianti o di $(r+2\pi)$ rad. è lo stesso angolo.

$(r-2\pi)$ rad.

Idem per $(r \pm 2\pi k)$, $k \in \mathbb{N}$

Sfrutto la periodicità dell'angolo per definire 2 f.ni periodiche su $\mathbb{R}$, principali:

$C \subset \mathbb{R}^2$ cfra centrata in $(0,0)$ e raggio 1.



$+\phi$ identifica un solo p.to $P(\phi) \in C$.

Def. $\cos\phi$ = ascissa di $P(\phi)$

$\sin\phi$ = ordinata di $P(\phi)$

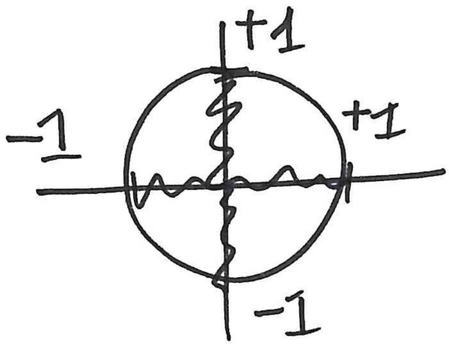
Oss.

- $\cos(\phi) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $\sin(\phi) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  f.ni periodiche di periodo 2π

$\forall k \in \mathbb{Z}$ $\cos(\phi + 2k\pi) = \cos(\phi)$
$\sin(\phi + 2k\pi) = \sin(\phi)$



Oss.:

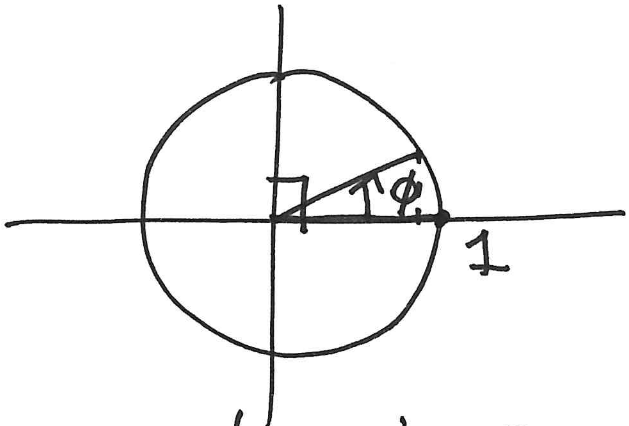
$\cos\theta,\ \sin\theta \in [-1, 1]$
ang.

$$-1 \le \cos\theta \le 1$$
$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

$$\cos\theta : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$
$$\sin\theta : \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

$\boxed{\cos\phi}$:

Il coseno assume il suo valore massimo in 0, infatti $\cos(0) = 1$



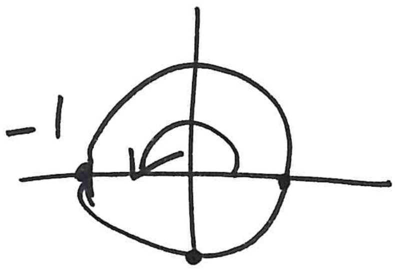
Se ϕ aumenta in senso antiorario

$\cos\phi$ diminuisce.

$\cos(\pi/2) = 0$

Poi per $\phi > \pi/2$ $\cos < 0$ fino ad arrivare al valore minimo -1 ottenuto in π:

$\cos(\pi) = -1$



Poi ricresce sino a trovare 0 in $\frac{3}{2}\pi$.

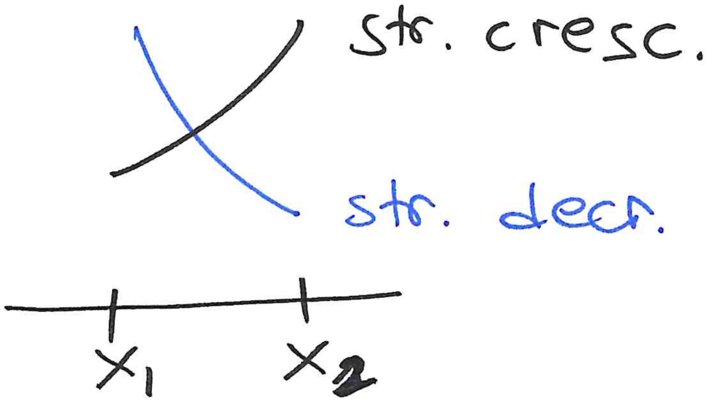
e poi ricresce sino a diventare 1 in 2π.

Riassumendo: $\boxed{\cos\phi}$

- $\cos\phi = 1$ nel p.to di max.
  $\phi = 0, 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos\phi = -1$ nel p.to di min.
  $\phi = \pi, \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos\phi = 0$ se $\phi = \pi/2, 3/2\pi,$
  $, \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos\phi > 0$ se $\phi \in (-\pi/2, +\pi/2)$
  $\phi \in (2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2)$
- Parentesi

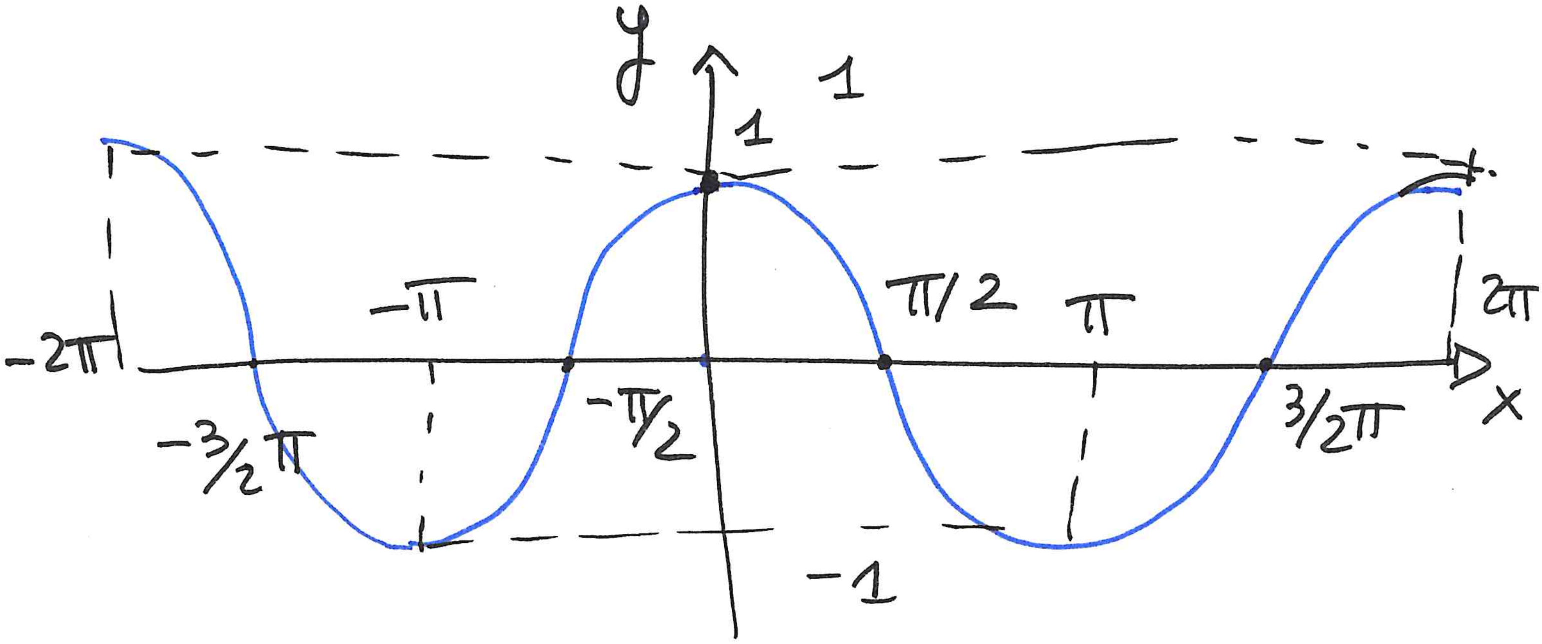
f è str. decr. se $x_1 < x_2 \Rightarrow$
$f(x_1) > f(x_2)$

f è str. crescente se $x_1 < x_2$
$f(x_1) < f(x_2)$

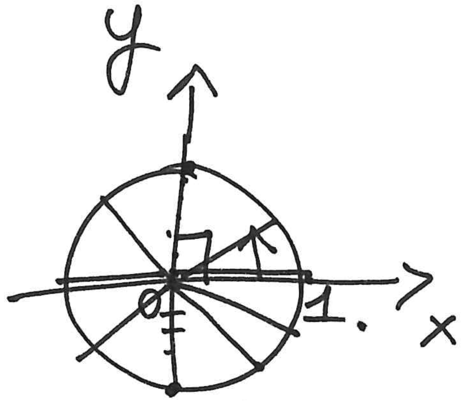


- $\cos(\phi)$ è <u>strett. decresc.</u> in $[0,\pi]$ e in $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

- $\cos(\phi)$ è <u>strett.</u> <u>crescente</u> in $[\pi, 2\pi]$, e $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.



$\boxed{\sin \phi}$



$\sin(0) = 0$

Se ϕ cresce in senso antiorario il seno cresce.

sin raggiunge il suo val. max per $\phi = \pi/2$, infatti $\sin(\pi/2) = 1$

Poi per $\phi > \pi/2$, sin cala.

sin si annulla di nuovo in π.

Poi sin diventa negativo sino a toccare il min. in $\phi = \frac{3}{2}\pi$, infatti $\sin(\frac{3}{2}\pi) = -1$

Poi dopo il minimo, il seno cresce sino a tornare 0 in 2π.

Riassumendo $\boxed{\sin\phi}$:

- $\sin\phi = 1$ in $\phi = \pi/2$ e $= \pi/2 + 2k\pi$

  valore massimo

- $\sin\phi = -1$ in $\phi = -\pi/2$ e $= -\pi/2 + 2k\pi$

  val. min. $k \in \mathbb{Z}$.

- $\sin\phi = 0$ in $\phi = 0\pi,\ k\pi$

- $\sin\phi > 0$, $\phi \in (0, \pi)$

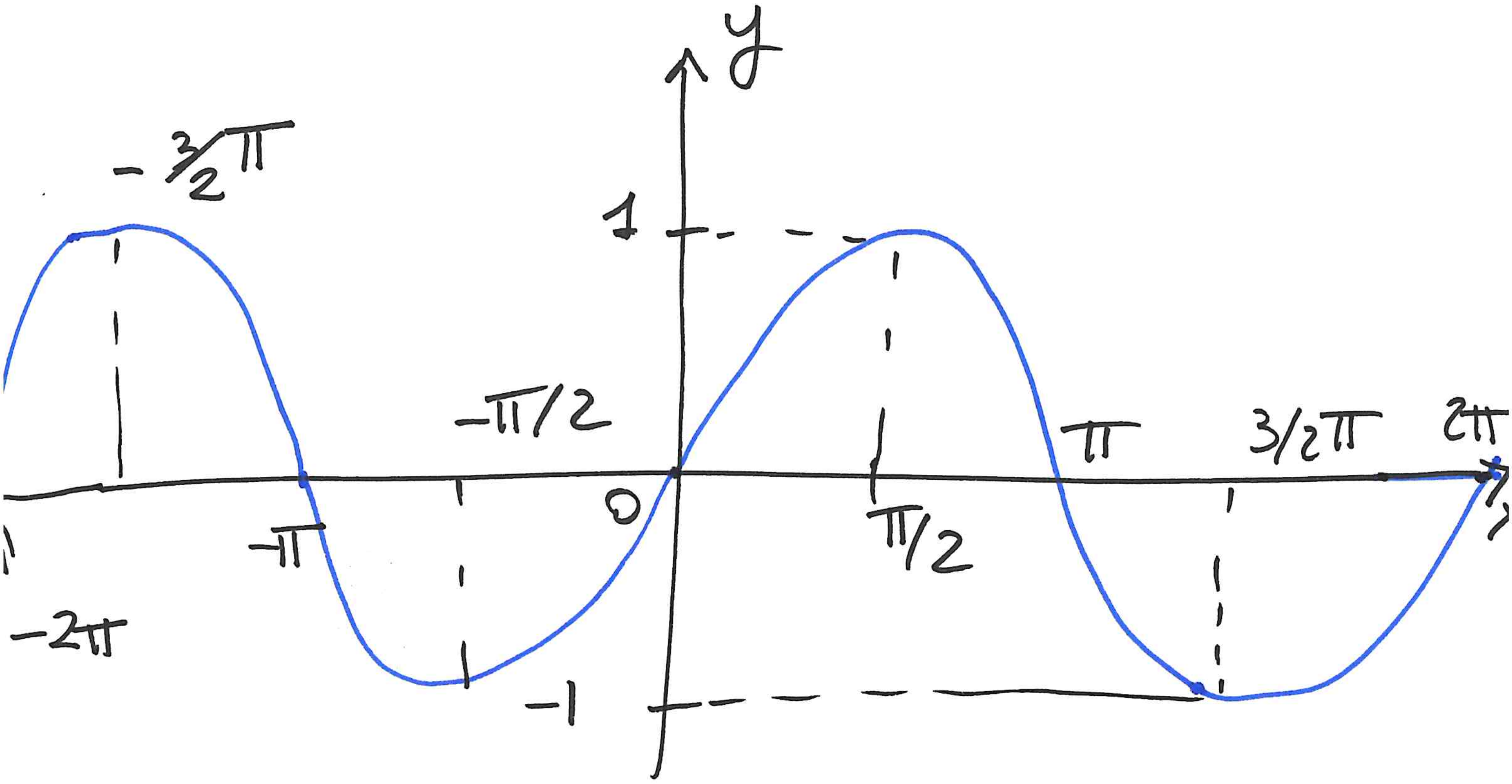
  $\in (2k\pi, (2k+1)\pi)$

- $\sin\phi$ str. cresc. in $[-\pi/2, +\pi/2]$

  $[2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$

- $\sin\phi$ str. decresc.

  in $[\pi/2, \frac{3}{2}\pi]$ e $[2k\pi + \pi/2, 2k\pi + \frac{3}{2}\pi]$

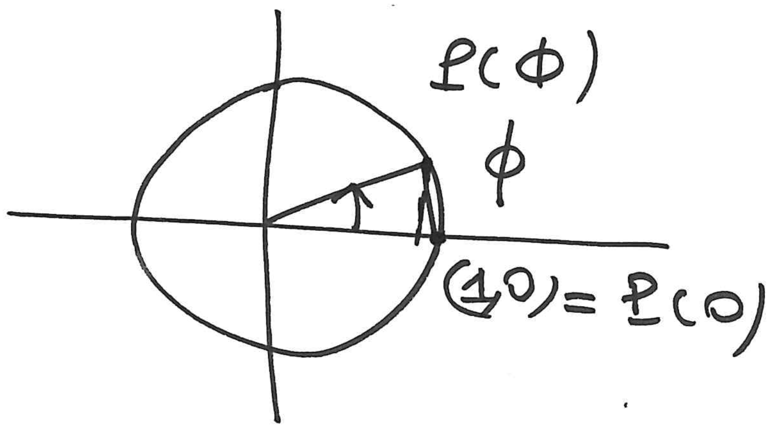


CONFRONTO TRA ANGOLO, LA CORDA, SEN ϕ, COS ϕ

$\rightsquigarrow$ CERTI LIMITI NOTEVOLI

$\sin(0) = 0$

$\sin\phi$ = ordinata $P(\phi)$



Per ϕ piccoli,
la lunghezza di arco da $P(0)$ a $P(\phi)$, lung. di corda da $P(0)$ a $P(\phi)$, il $\sin\phi$ e ϕ sono tutte grandezze molto vicine tra loro:

$\sin\phi \sim \phi$ se $\phi \ll$

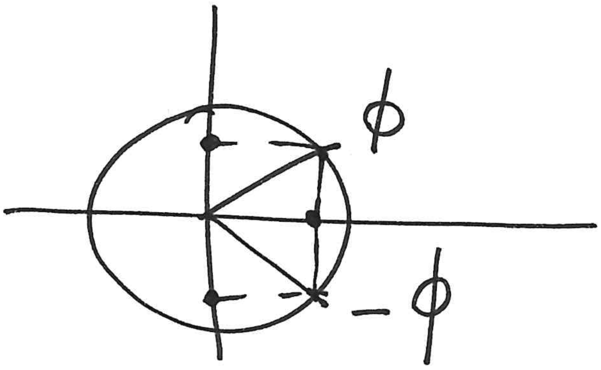
Vale il seguente limite notevole:

$$\boxed{\lim_{\phi \to 0} \frac{\sin\phi}{\phi} = 1}$$

i.e. $\sin\phi \approx \phi$ per $\phi \ll$

molto piccoli

RELAZIONE TRA sin e cos



(a) $\cos(\phi) = \cos(-\phi)$

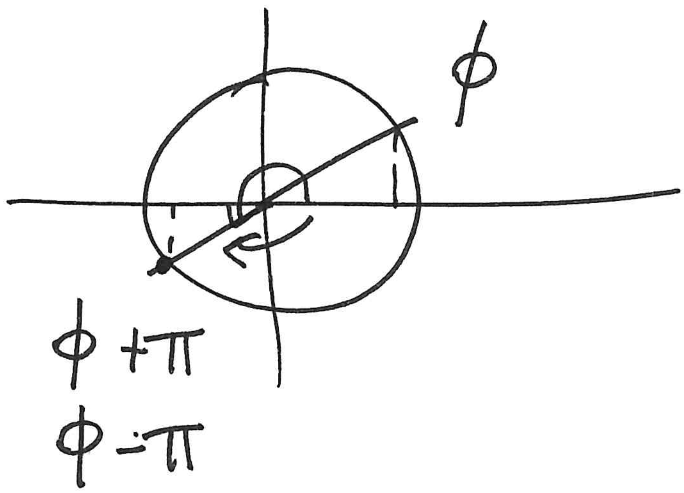
(b) $\sin(\phi) = -\sin(-\phi)$

- cos è f.ne pari
- sin è " dispari

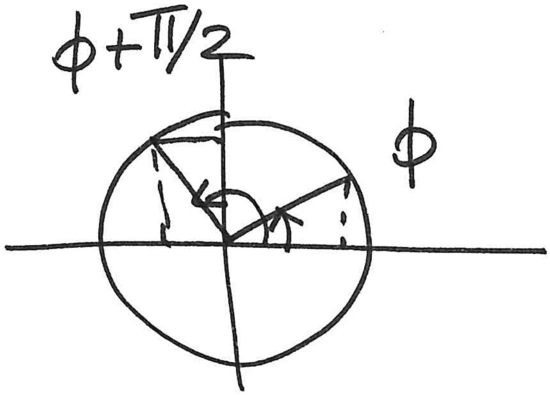
Aggiungo o tolgo π:

(c) $\cos(\phi \pm \pi) = -\cos\phi$

(d) $\sin(\phi \pm \pi) = -\sin\phi$



- Aggiungo o tolgo $\pi/2$:



e) $\cos(\phi+\pi/2) = -\sin\phi$

f) $\sin(\phi+\pi/2) = \cos\phi$

g) $\cos(\phi-\pi/2) = \sin\phi$

h) $\sin(\phi-\pi/2) = -\cos\phi$

Relazione fondamentale:

$$\boxed{\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1}$$

$$\Downarrow \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$\sin\phi = \pm\sqrt{1-\cos^2\phi}$$

$$\cos\phi = \pm\sqrt{1-\sin^2\phi}$$

Oss.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

Infatti:

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{=\sin^2 x}}{x} \cdot \frac{1}{(1+\cos x)}$$

$$\Rightarrow \Big(\lim_{x\to 0} \sin x\Big) \cdot \lim_{x\to 0}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)\Big(\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x}\Big)$$

$0 \quad 1 \quad 1/2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{\sin^2 x}}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} \right) = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \to 1} \cdot \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{\to \frac{1}{2}}$$

$= 1/2$

$$(1-\cos x) \approx \frac{x^2}{2} \qquad \text{per } x \approx 0$$

FORMULE ADDIZIONE

$$\begin{cases} \cos(\phi-\psi) = \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \\[2ex] \cos(\phi+\psi) = \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\phi+\psi) = \cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\psi \\[2ex] \sin(\phi-\psi) = \sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\psi. \end{cases}$$

$\phi = \psi$

FORMULE DI DUPLICAZ.

$$\begin{cases} \cos(2\phi) = \cos^2\phi - \sin^2\phi \\ \qquad\quad\;\; = 1 - 2\sin^2\phi \\[2ex] \sin(2\phi) = 2\sin\phi\cos\phi \end{cases}$$