

Funzioni esponenziali

$$y = a^x$$

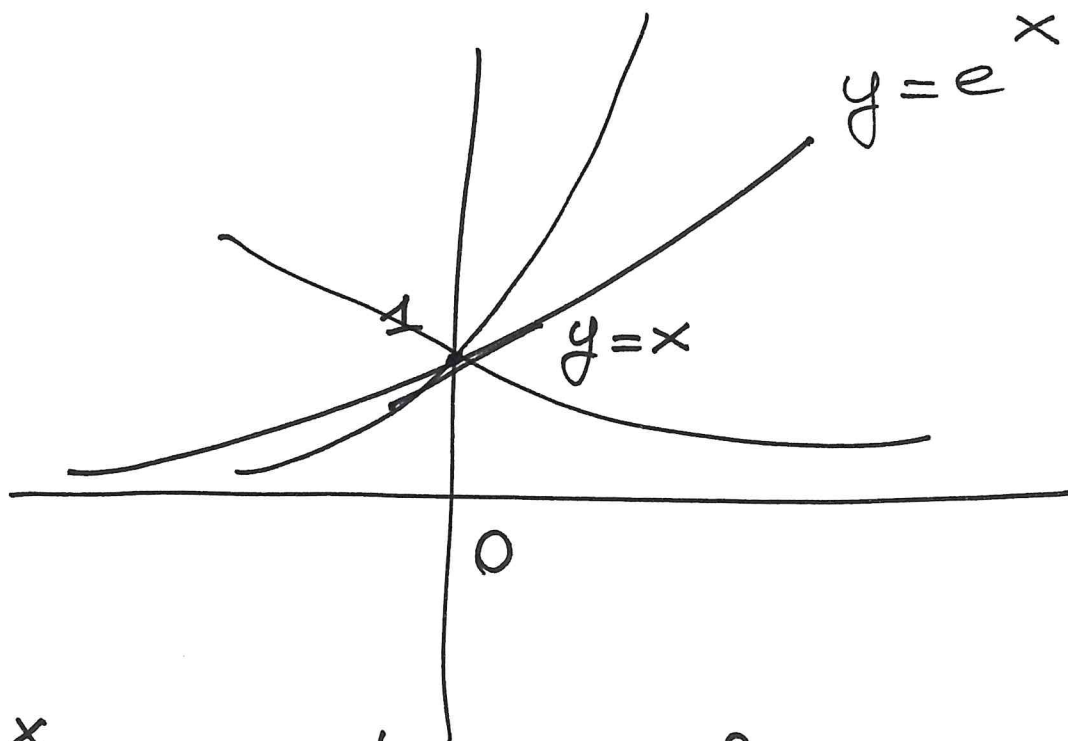
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0$ costante

- Se $a > 1 \Rightarrow y = a^x$ "sale"
- Se $a < 1 \Rightarrow y = a^x$ "scende"
- Se $a = 1 \Rightarrow y \equiv 1$ f.ne cost.
- La scelta della base a influisce sulla maggiore o minore rapidità con cui il grafico della f.ne esponenziale sale o scende.

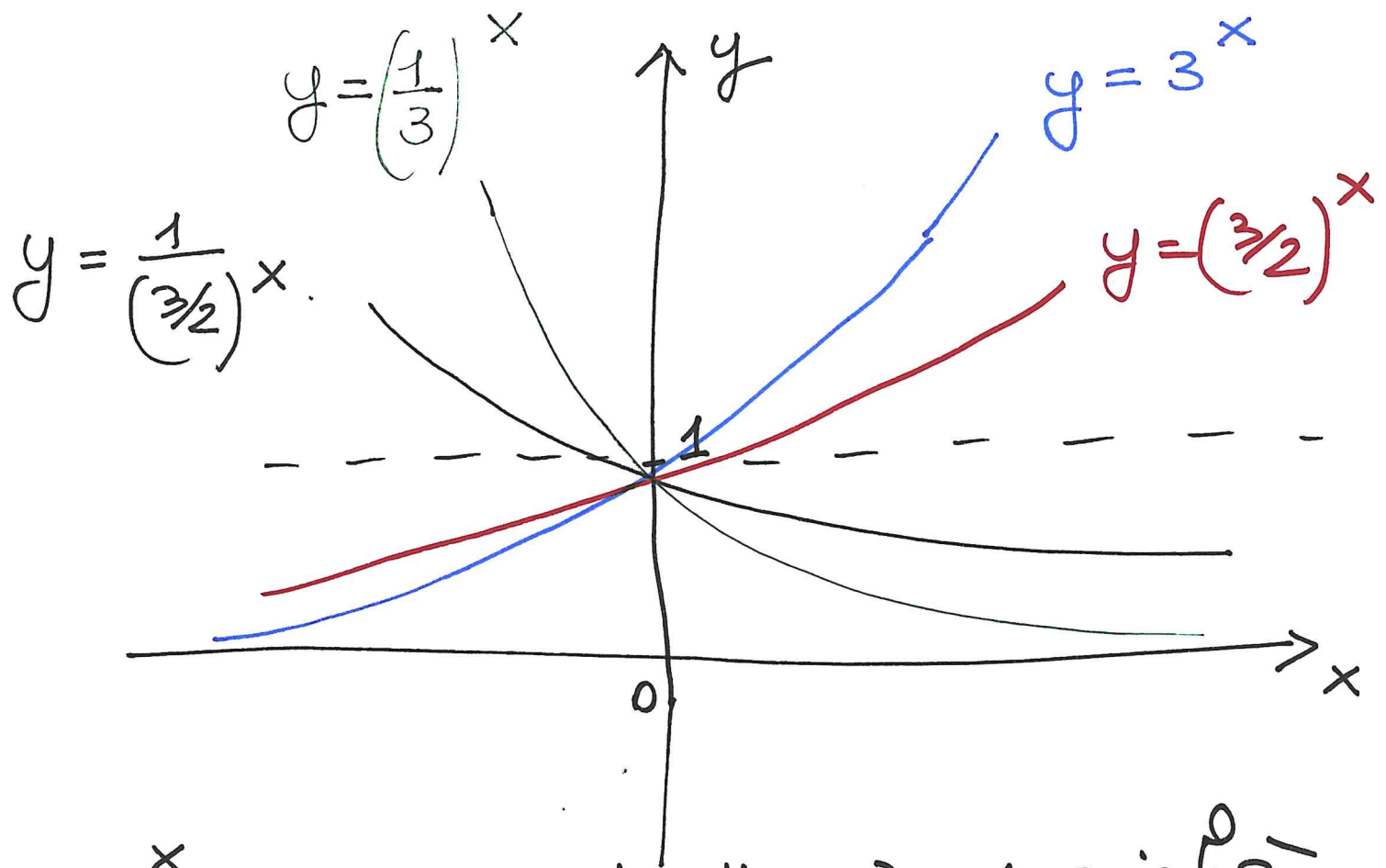
~~come~~ I matematici predili-
gono $a = e = 2,7182 \dots$
 $\uparrow$ Numero di Nepero

$$\forall a^0 = 1$$

$$e^x \rightarrow e^0 = 1$$



$y = e^x$ è l'unica funzione
 esponenziale t.c. la retta
 tangente al grafico in $(0, 1)$
 ha coefficiente angolare 1.



$y = e^x$ non è restrittivo poiché
 $\forall y = a^x$ si può scrivere
 nella forma $y = e^{m \cdot x}$

es. $y = 10^x = e^{m \cdot x}$

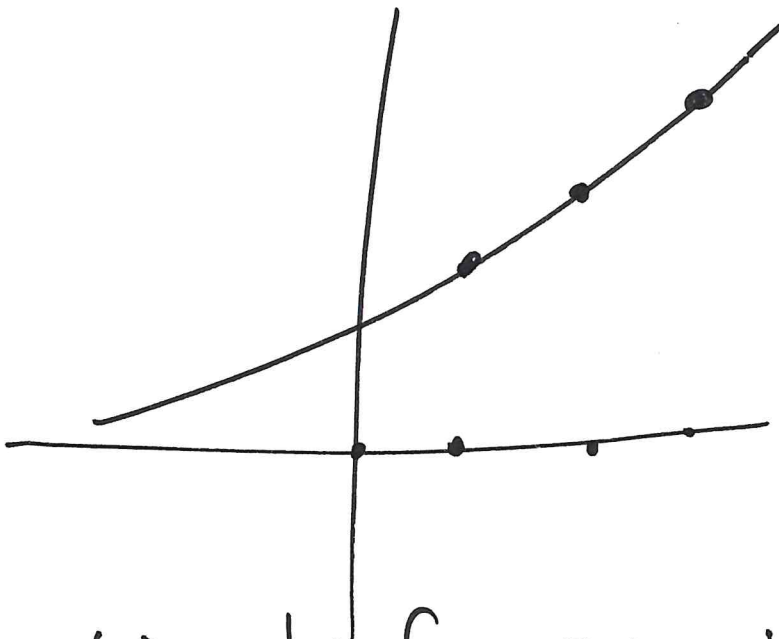
$m = 2,30259 \dots$

Oss. Le f. ni esponenziali
 sono una estensione delle
 progressioni geometriche.

$$y = k \cdot a^x$$

$$x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$k, ka, ka^2, ka^3, \dots$$



Proprietà di funzioni esponenziali

$$a^0 = 1$$

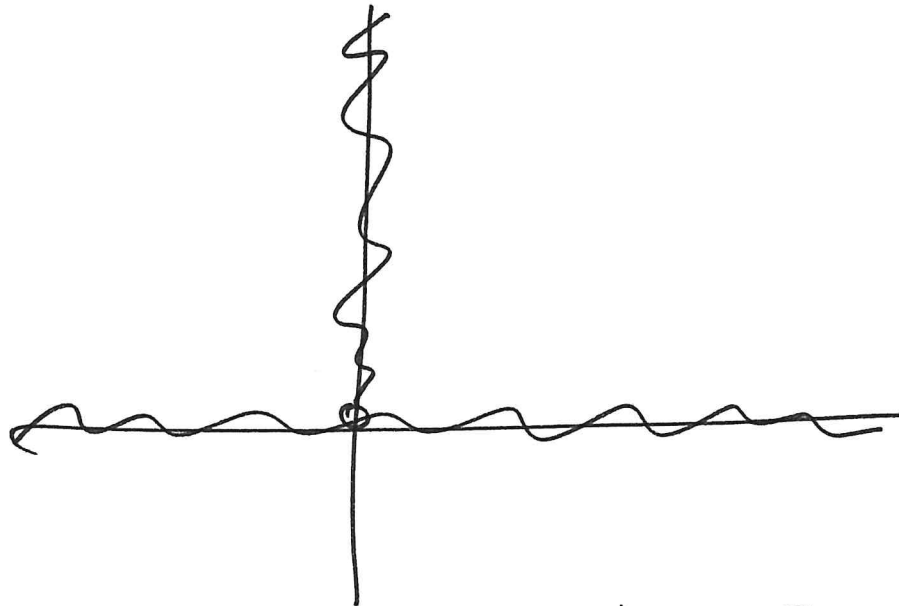
$$a^1 = a$$

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \text{e} \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$a^{x \cdot y} = (a^x)^y \dots$$

$$\text{Dom}(a^x) = \mathbb{R}$$

$$\text{Codom}(a^x) = (0, +\infty)$$



FUNZIONI LOGARITMO

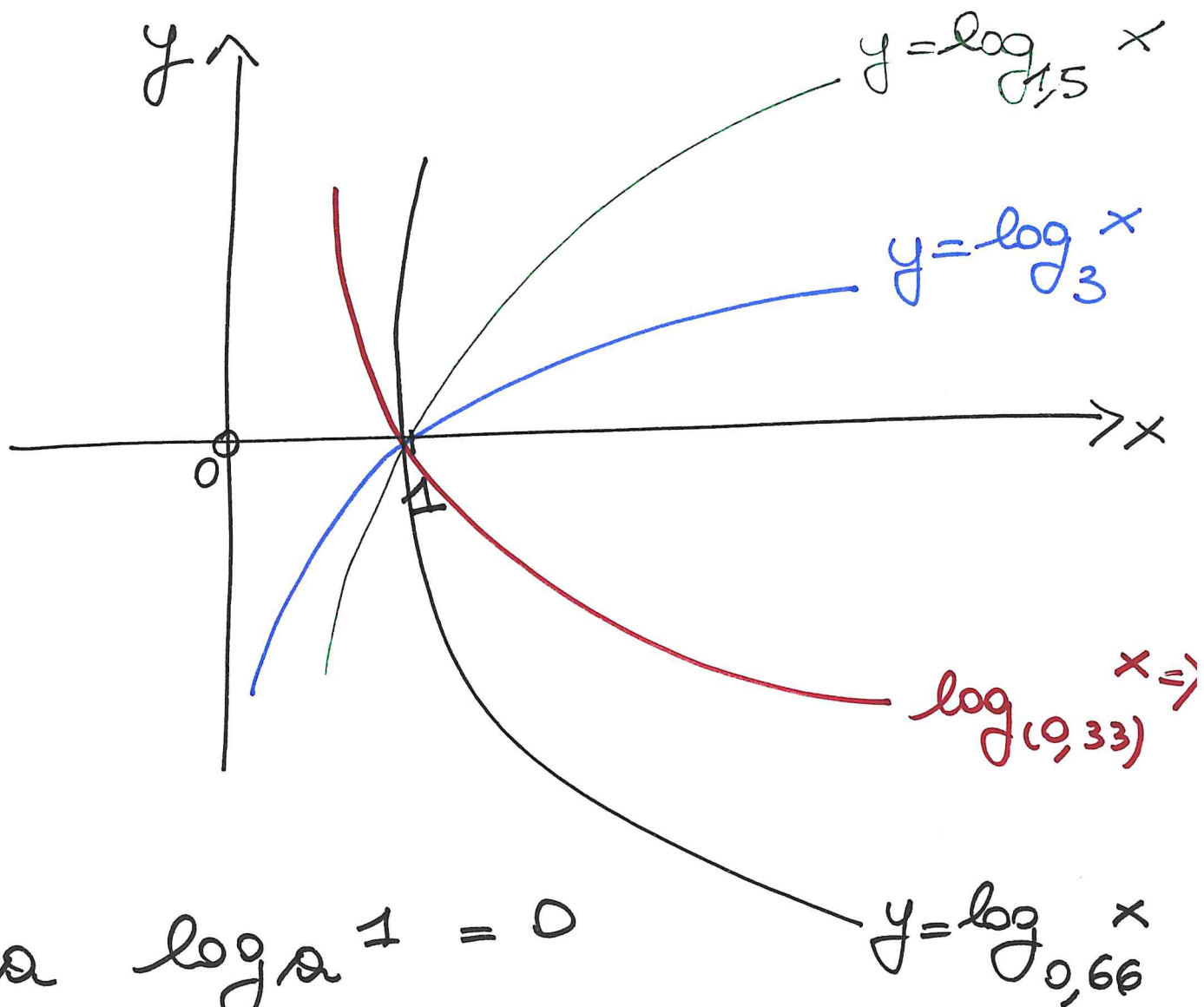
E' l'inversa della funzione

$$y = a^x \quad (a \text{ reale positivo, } a \neq 1)$$

$$\log_a x = x$$

Infatti $\log_a a^x = x$

Grafico di $y = \log_a x$



$$\forall a \quad \log_a 1 = 0$$

$$\mathcal{D}(\log_a x) = \mathbb{R}^+ = \{x > 0\}$$

$$\begin{aligned} \text{codom}(\log_a x) &= \text{Im}(\log_a x) = \\ &= \mathbb{R} = (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

Proprietà di $\log_a x$:

$$\log_a(1) = 0 \quad \forall a$$

$$\log_a a = 1 \quad \forall a$$

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$$

$$\log_a(b/c) = \log_a(b) - \log_a(c)$$

$$\log_a(b^n) = n \cdot \log_a b$$

(n numero
reale $\neq 0$)

$$\log_a(a^b) = b \quad (\forall b \in \mathbb{R})$$

$$a^{\log_a(b)} = b \quad (\forall b \in \mathbb{R}^+)$$

Le basi più frequenti
del log sono 10, e

$$\log_{10} = \text{Log} \quad \underline{\text{log. decimale}}$$

$$\log_e = \ln \quad \underline{\text{log. naturale}}$$

I log. decimali sono importanti per i conti:

$$\text{Log}(1) = 0$$

$$\text{Log}(10) = 1$$

$$\text{Log}(100) = 2$$

"
 10^2

$$\text{Log}(1.000) = 3$$

"
 10^3

$$\text{Log}(0,1) = -1$$

"
 10^{-1}

$$\text{Log}(0,01) = -2$$

$$\text{Log}(0,001) = -3 \dots$$

$$\boxed{\log 10^n = n}$$

Quindi la conoscenza della parte intera del Log decimale fornisce l'ordine di grandezza del numero.

es. $\log(x) \approx \underline{19}, 2659$

$\Rightarrow x$ è un numero reale compreso tra 10^{19} e 10^{20} .

Regole:

e^x è definita su tutto $\mathbb{R}$

$\log x$ è definita $x > 0$

$\frac{1}{x}$ " " $x \neq 0$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

è definita $Q(x) \neq 0$

$$\sqrt[n]{x}$$

n pari è definita
per $x \geq 0$

$$\sqrt[n]{x}$$

n dispari è definita
mità $\forall x \in \mathbb{R}$

Ex.

Dom. di def. ne

$$e^{f(x)} ?$$

$$\text{Dom}[e^{f(x)}] = \text{dom}(f(x))$$

$$e^{f(x)} : x \rightarrow f(x) \xrightarrow{e^x} e^{f(x)}$$

$$\text{Dom}(\log |f(x)|) ?$$

$$x \xrightarrow{x \in \text{dom}(f)} f(x) \xrightarrow{|\cdot|} |f(x)| \xrightarrow{\log_2^x} \log |f(x)|$$

$\downarrow$
 $\neq 0$

$$\text{Dom } \log |f(x)| = \{x \in \mathbb{R} / x \in \text{dom}(f) \cap \{x \in \mathbb{R} / f(x) \neq 0\}\}$$

$$\text{Dom } \log(f(x))$$

$$x \xrightarrow{f(x)} \xrightarrow{\log_a^x} \log(f(x))$$

$$\text{Dom } \log(f(x)) = \{x \in \mathbb{R} / x \in \text{dom}(f) \cap \{x \in \mathbb{R} / f(x) > 0\}\}$$

Ex.

$$\text{Dom } \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x^2+1}} \quad ?$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + 1 \geq 1$$

$\sqrt{x^2+1}$ é sempre
bem definida $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2+1} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Dom } \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x^2+1}} = (x > -1)$$

Ex. 2

$$\text{Dom}(\log(\sqrt{x})) ?$$

$$\text{Dom}(\sqrt{x}) = \{x \geq 0\}$$

$$\text{Dom}(\log \sqrt{x}) = (x > 0) \quad \sqrt{x} \geq 0$$

Ex. 3

$$\text{Dom}(\log |x^2 - 1|) ?$$

$$|x^2 - 1| \geq 0$$

$$x \neq \pm 1 \Rightarrow x^2 - 1 \neq 0$$

$$\text{Dom}(\log |x^2 - 1|) = \{x \neq \pm 1\}$$

Ex.

$$\text{Dom } \log(|x^2 - 1| + 1) \quad ?$$

$$|x^2 - 1| \geq 0$$

$$|x^2 - 1| + 1 \geq 1$$

$$\text{Dom}(\log(|x^2 - 1| + 1)) = \mathbb{R}$$

Ex.

$$\text{Dom } \frac{x-1}{e^x - 3} = \mathbb{R} \setminus \{\ln(3)\}$$

$$e^x \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \ln(3)$$

Ex.

$$\text{Dom } \frac{1}{\log(|2x - 1|)} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}, 0, 1 \right\}$$

$$2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$|2x-1| = 1$$

$$2x-1 = 1 \rightarrow x=1$$

$$-2x+1 = 1 \rightarrow x=0$$

Ex.

$$\text{Dom } \frac{1}{\ln(x^2) - 3} = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm e^{3/2}\}$$

$$x^2 \geq 0$$

$$x \neq 0$$

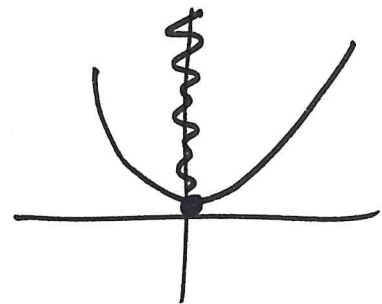
$$\ln(x^2) - 3 \neq 0$$

$$\ln(x^2) \neq 3$$

$$x^2 \neq e^3$$

$$x \neq \pm e^{3/2}$$

$$\ln(x^2) = 2 \ln(x)$$



Ex.

$$\text{Dom } \frac{1}{(\ln x)^2 - 3}$$

$$x > 0 \Rightarrow \ln x$$

$$(\ln x)^2 - 3 \neq 0$$

$$(\ln x)^2 \neq 3$$

$$\ln x \neq \pm \sqrt{3}$$

$$x \neq e^{\pm \sqrt{3}}$$

$$\text{Dom. } \frac{1}{(\ln x)^2 - 3} = \left\{ x > 0, \right. \\ \left. x \neq e^{\pm \sqrt{3}} \right\}$$

Ex.

$$\text{Dom } \log(\sqrt{x^2-1}) \quad ?$$

$$\sqrt{x^2-1} \geq 0 \quad (x^2-1) \geq 0$$

$$x^2-1 \neq 0$$

$$x > 1, \quad x < -1$$

$$\text{Dom } \log(\sqrt{x^2-1}) = (x < -1) \cup (x > 1)$$

Ex.

$$\text{Dom } \log(1-\sqrt{x}) = 0 \leq x < 1$$

$$\sqrt{x} \quad x \geq 0$$

$$1-\sqrt{x} > 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 1 \Rightarrow$$

$$x < 1$$

Ex.

$$\text{Dom}(\log(|x^2-4|)) \text{ ?}$$

$$|x^2-4| \geq 0$$

$$|x^2-4| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2.$$

$$\text{Dom}(\log|x^2-4|) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$$