Prof. Cinzia Bisi

"Matematica per Biologia"

F. Brinati - A. Calabri

Per ricevimento mandate mail a:

cinzia.bisi@unife.it

Limiti e continuità:

$\forall x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ valgono le formule:

a) $$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$$

b) $$\lim_{x \to x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

c) $$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right] \cdot \left[\lim_{x \to x_0} g(x)\right]$$

d) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$$

se $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

Da ciò discende:

Prop.
Somma, differenza, prodotto di funzioni continue, così come il rapporto di funzioni cont. (con denominatore $\neq 0$) è una funzione continua.

Def. f è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Infatti se f, g sono funzioni continue in x_0 allora:

$$\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0).$$

Continuità e composizione di funzioni

- Sia f una funzione con limite $l \in \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$. Sia g continua in l.

Allora se x abbastanza vicino a x_0, $f(x)$ è vicino a l per cui $g(f(x))$ vicino a $g(l)$.

Ovvero:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)}$$

In particolare:

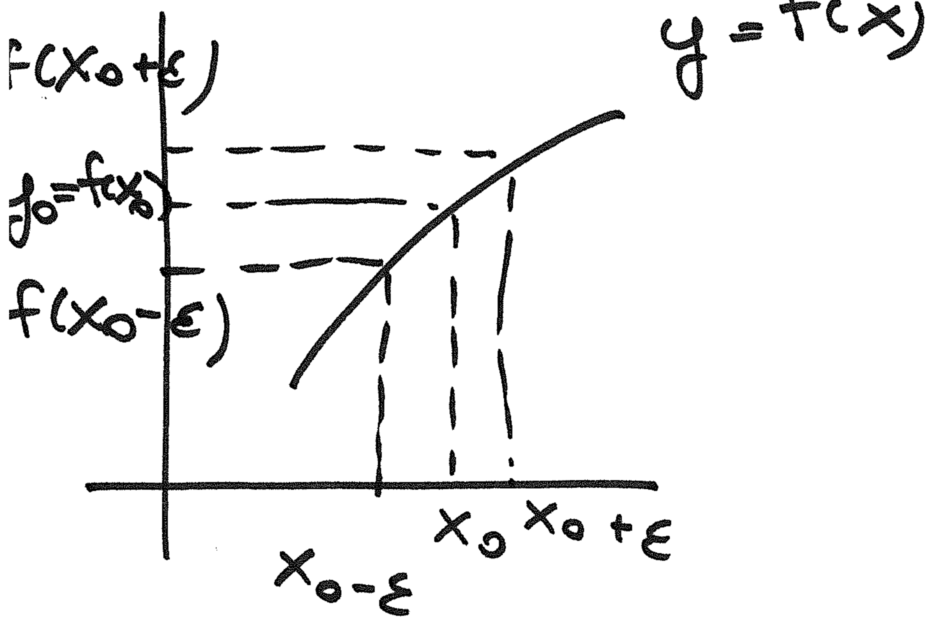
- la composizione di 2 funzioni continue è continua quando è definita.

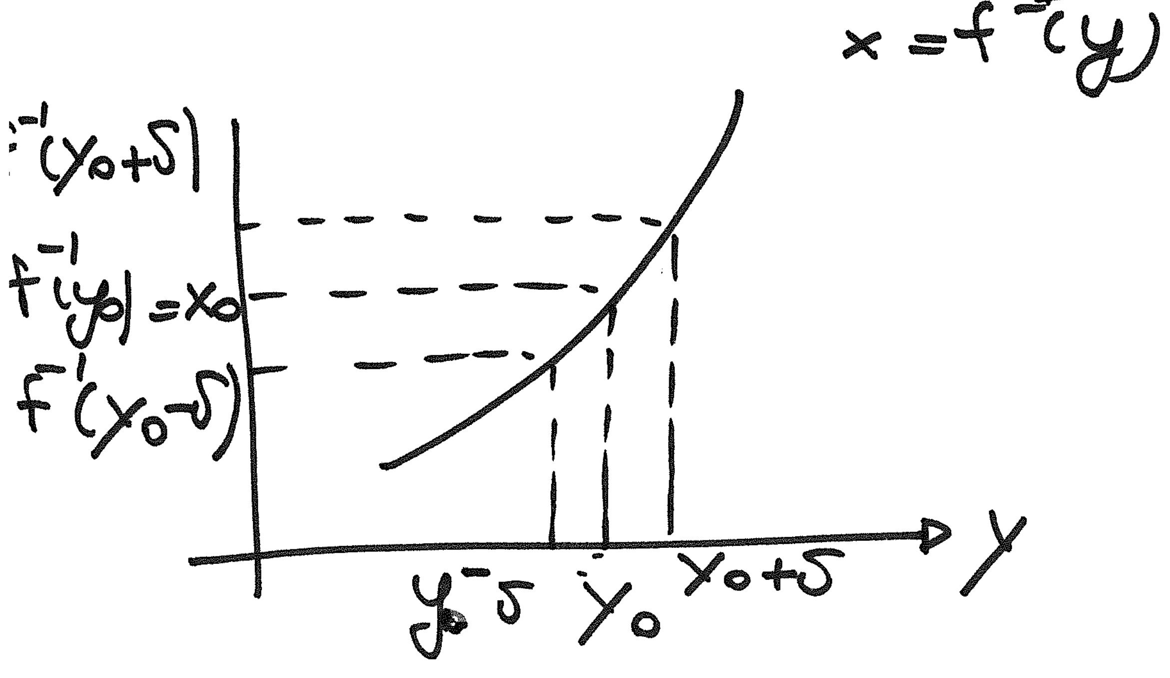
<u>Continuità</u> e <u>inversione</u> di <u>una funzione</u>.

Sia f una funzione continua e invertibile definita su un intervallo $\Rightarrow$ anche l'<u>inversa</u> è continua.

Infatti:

Quando $y = f(x)$ tende a $y_0 = f(x_0)$ allora l'unica cosa che può fare $x = f^{-1}(y)$ è tendere a $x_0 = f^{-1}(y_0)$.



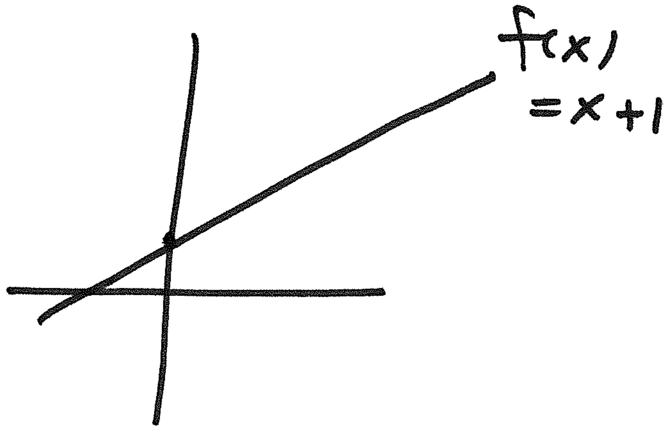


ex.

$f(x) = x+1$

$y = x+1$

$x = y-1$



$f^{-1}(x) = y-1$

- L'inversa di una funzione continua reale di variabile reale definita su un intervallo, quando $\exists$, è continua.

Continuità e elevamento a potenza.

- f, g continue, $f(x) > 0 \ \forall x$ allora $h(x) = f(x)^{g(x)}$ è continua

5.5

In generale vale la formula:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \left[\lim_{x \to x_0} f(x)\right]^{\lim_{x \to x_0} g(x)}}$$

se $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$.

Vale quasi sempre, tranne che per le forme indeterminate:

$$1^{\pm\infty}, \quad (+\infty)^0$$

Mentre:

$$(+\infty)^c = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ 0 & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

$$(\ell)^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < \ell < 1 \end{cases}$$

Analog.

$$(\ell)^{-\infty} = \left(\frac{1}{\ell}\right)^{+\infty}$$

- Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, allora la

formula di prima vale:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$$

e se $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) > 0$ allora

$$0^c = 0, \quad 0^{+\infty} = 0$$

- Se invece $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

6.5

altra forma indet. 0^0.

Confronto tra limiti

- Funzioni più grandi hanno limiti più grandi.

- se $\boxed{f(x) \leq g(x)}$ per $\forall x$ vicino a $x_0 \in \mathbb{R}$, allora

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)}$$

Vale anche se $x_0 = \pm\infty$.

Teorema dei 2 carabinieri

Può essere usato per dimostrare l'esistenza di limiti.

• supponiamo

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

$\forall x$ vicino a x_0

supponiamo di sapere

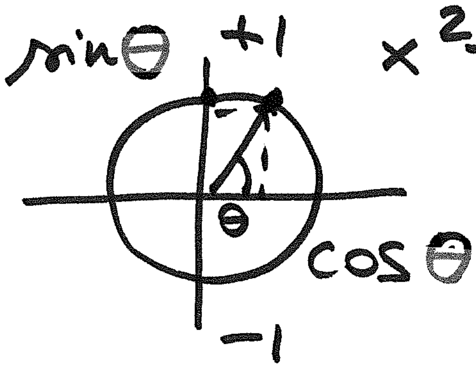
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

Allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

Ex.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \le \sin x \le 1$



$x^2+y^2=1$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\underset{\nwarrow f}{-\frac{1}{x}} \le \underset{\nwarrow g}{\frac{\sin x}{x}} \le \underset{\nwarrow h}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

Anche $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

Oss.

La disuguaglianza stretta $f(x) < g(x)$ NON implica la disuguaglianza stretta tra i limiti.

es. $\frac{1}{x} < \frac{2}{x} \quad \forall x > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Es.

Dove è continua la funzione

$f(x) = x^3 - 3x + 1$?

sol. : $\forall$ polinomio è cont. su tutto $\mathbb{R}$.

2.3) f è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

Es.

$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Dove è cont. ?

Sol.

Per $x = 2$ non è definita.

Per $x = 2$ non è continua.

Se $x \to 2^- \Rightarrow (x-2) \to 0^-$

es. $x = 1{,}999$

$$\left.\frac{1}{x-2}\right|_{1{,}999} = \frac{1}{-0{,}001} = \frac{-1}{\frac{1}{1'000}}$$

$= -1'000$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

Se $x \to 2^+ \Rightarrow (x-2) \Rightarrow 0^+$

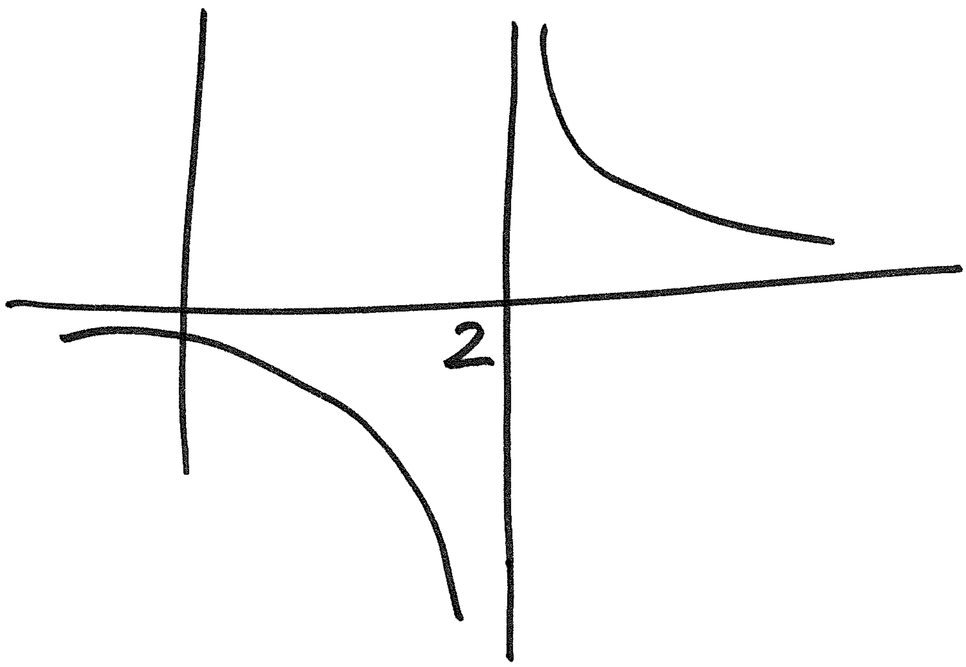
Quindi $\dfrac{1}{x-2} \xrightarrow[x \to 2^+]{} +\infty$

8.5

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\forall a \neq 2 \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{a-2} \in \mathbb{R}$$



2 e' una <u>discontinuità all'infinita</u>.

f è cont. $\forall x \neq 2$, su $(-\infty, 2) \cup$
$\cup (2, +\infty)$.

Es.

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

Dove è cont.?

Sol.

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

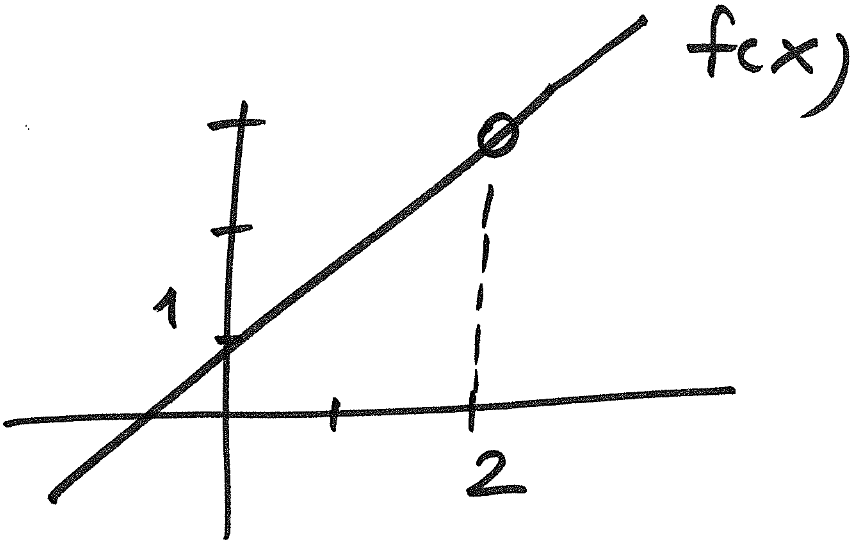
$$f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)}$$

$\forall (x-2) \neq 0 \Rightarrow f(x) = x+1$

$x = 2$ discontinuità eliminabile

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$$

1.5



$$\tilde{f} = \begin{cases} f & \forall x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$

f è cont. $\forall x \neq 2$.

<u>Es</u>.

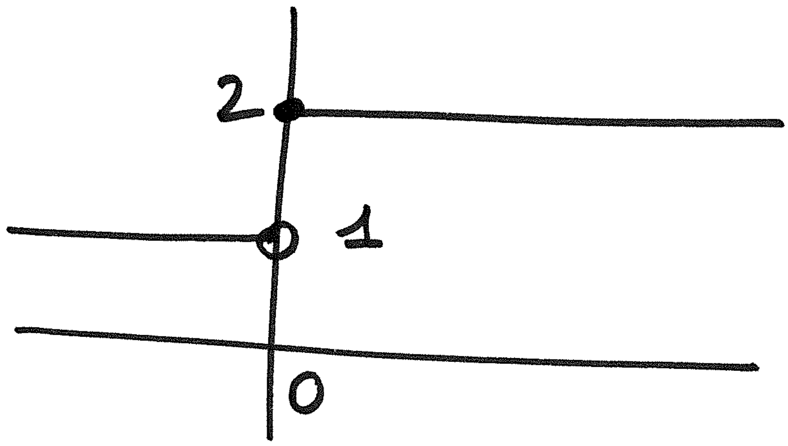
$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

Dove è cont.?

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$$

$$\neq$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$$



f è discontinua solo in 0 e la <u>discontinuità</u> è detta <u>di salto</u>.

$\forall x \neq 0$ f è cont.

<u>Es.</u>

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}\right) & x \neq 0 \\ -\frac{1}{4} & x = 0 \end{cases}$$

È cont. in 0?

Sol. :

(a) $f(0) = -1/4$

(b) $\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2+x} - 1/2\right) = \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{2-(2+x)}{2(2+x)}\right)$

$= \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{-x}{4+2x}\right) = -1/_{4+2x}$

(c) $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2+x} - 1/2\right) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{-1}{\underbrace{4+2x}_{4}}$

$= -1/4$

(d) $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = f(0) = -\frac{1}{4}$

f è cont. in 0.

15

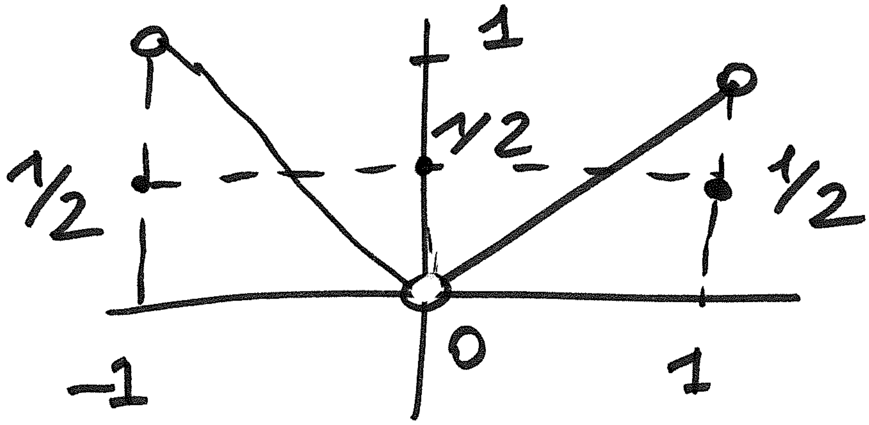
Teorema di Weierstrass

$\forall$ f.ne continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo limitato e chiuso $[a, b] \subsetneq \mathbb{R}$ ha sempre un p.to di massimo ed 1 punto di minimo

⚠ Il teorema è falso se per es. la funzione NON è continua nell'intervallo limitato e chiuso.

es. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \forall x \neq -1, 1, 0 \\ 1/2 & x = -1, 0, 1 \end{cases}$$



Non ci sono min. e max.

<u>Oss.</u> f <u>non</u> cont. nel grafico

$\Rightarrow$ non è continua.

<u>Teorema dei valori medi</u>

sia

$f: I \to \mathbb{R}$ continua,

$I \subseteq \mathbb{R}$ limitato o illimitato

siano $y_0 \leq y_1$, t.c. $y_0, y_1 \in$

$\in f(I)$. Allora f assume

tutti i valori intermedi tra

y_0 e y_1, i.e. $[y_0, y_1] \subseteq f(I)$.

Ovvero nel grafico <u>NON</u> ci sono salti.

I può essere aperto, chiuso, semi-aperto, semi-retta, tutto $\mathbb{R}$.

<u>Teorema di esistenza degli zeri</u>.

Se $f: I \to \mathbb{R}$ continua, definita su $I \subseteq \mathbb{R}$, ammette valori positivi e negativi, allora ha anche almeno uno zero $x_0 \in I$, i.e. $\exists\, x_0 \in I$, $f(x_0) = 0$

Ex.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+2}{x-2} = +1$$

Ricordo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + \dots a_0}{b_m x^m + \dots b_0}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \\ \operatorname{sign}\left(\dfrac{a_n}{b_m}\right) \cdot \infty & \text{se } n > m \\ 0 & \text{se } m > n \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n + \dots a_0}{b_m x^m + \dots b_0} =$$

$$
= \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m} & n = m \\[2ex] \operatorname{sign}\left(\dfrac{a_n}{b_m}\right)(-\infty)^{n-m} & \text{se } n > m \\[2ex] 0 & \text{se } n < m \end{cases}
$$

Ex.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-3}{(x^2-3)}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+2}{(x^2-8)}$$

Ex.

$$\lim_{x \to 3^{\pm}} \frac{5}{3-x}$$

$$\lim_{x \to 2^{\pm}} \frac{x+2}{x-2}$$

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{x^2+1}{\underbrace{x^2-2x+1}_{=(x-1)^2}}$$

b)