Matematica ed elementi di statistica
Corso di laurea in Scienze e tecnologie per i beni culturali - a.a. 2014-15
Esercizi 4: Funzioni

Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = x + 4$ $[\mathbb{R}]$
2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ $[\mathbb{R}]$
3) $f(x) = \frac{x-1}{x+6}$ $[\mathbb{R} \setminus \{-6\}]$
4) $f(x) = \frac{3x-2}{(x-3)^3}$ $[\mathbb{R} \setminus \{3\}]$
5) $f(x) = \frac{4x}{x^2-5x+6}$ $[\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}]$
6) $f(x) = \frac{2x}{3x^2+12}$ $[\mathbb{R}]$
7) $f(x) = \sqrt{x-5}$ $\left[[5;\ +\infty[\right]$
8) $f(x) = \sqrt[3]{7-3x}$ $[\mathbb{R}]$
9) $f(x) = \sqrt{x^2-7x}$ $[]-\infty; 0] \cup [7;\ +\infty[]$
10) $f(x) = \sqrt{3x+2} + \sqrt{4x}$ $\left[[0;\ +\infty[\right]$
11) $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x+2}}$ $\left[]-\infty; -2[\cup \left[\frac{1}{3};\ +\infty\right[\right]$
12) $f(x) = \sqrt{\frac{x-x^2}{x^2+3}}$ $\left[[0; 1]\right]$
13) $f(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2-6x+9}$ $\left[[-4; 3[\cup]3; 4]\right]$
14) $f(x) = \frac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x+2}}$ $\left[\left[\frac{1}{3};\ +\infty\right[\right]$
15) $f(x) = \frac{\sqrt{4x-6}}{\sqrt[3]{x^3-8x^2}}$ $\left[\left[\frac{3}{2}; 8\right[\cup]8;\ +\infty[\right]$

Disegna il grafico delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x < -1 \\ x^2, & \text{se } -1 \le x \le 1 \\ -x+2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$
2) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{se } x \ge 0 \\ -x^2 + 1, & \text{se } -2 < x < 0 \\ \frac{1}{2}x - 4, & \text{se } x \le -2 \end{cases}$
3) $f(x) = \begin{cases} -6, & \text{se } x < -2 \\ -2x^2 + 2, & \text{se } -2 \le x \le 1 \\ 2x - 2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$
4) $f(x) = \begin{cases} 2x + 6, & \text{se } x \le -1 \\ x^2 - 2x + 1, & \text{se } x > -1 \end{cases}$
5) $f(x) = \begin{cases} -2x^2 - 8x - 6, & \text{se } x \le -1 \\ 2x^2 - 3, & \text{se } -1 < x < 2 \\ -\frac{5}{3}x + \frac{25}{3}, & \text{se } x \ge 2 \end{cases}$

Determina, quando è possibile, $f \circ g$ e $g \circ f$

1) $f(x) = x + 2,\ \ g(x) = x - 3$ $\quad [f \circ g = g \circ f = x - 1]$
2) $f(x) = 2x^2 + 1,\ g(x) = -x + 2$ $\quad [f \circ g = 2(-x + 2)^2;\ \ g \circ f = -(2x^2 + 1) + 2]$
3) $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = x^4$ $\quad \left[g \circ f = \frac{1}{x^4}\right]$
4) $f(x) = \sqrt{x - 3},\ g(x) = \frac{x^2}{x+2}$ $\quad \left[g \circ f = \frac{\left(\sqrt{x-3}\right)^2}{\sqrt{x-3}+2}\right]$
5) $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = |x - 2|$ $\quad \left[f \circ g = \sqrt{|x - 2|};\ \ g \circ f = \left|\sqrt{x} - 2\right|\right]$
6) $f(x) = \frac{x}{x^2+2},\ g(x) = \sqrt[3]{x + 9}$ $\quad \left[f \circ g = \frac{\sqrt[3]{x+9}}{\left(\sqrt[3]{x+9}\right)^2+2};\ \ g \circ f = \sqrt[3]{\frac{x}{x^2+2} + 9}\right]$
7) $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 4},\ g(x) = x + 3$ $\quad \left[g \circ f = \sqrt{x^2 - 7x + 4} + 3\right]$

Determina, quando è possibile, l'inversa delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = x + 4$ $\quad [f^{-1}(x) = x - 4]$
2) $f(x) = x^2 - 2$ $\quad [f$ non è iniettiva$]$
3) $f(x) = x - 1$ $\quad [f^{-1}(x) = x + 1]$
4) $f(x) = -2x^2 + 8$ $\quad [f$ non è iniettiva$]$
5) $f(x) = |x - 5|$ $\quad [f$ non è iniettiva$]$

Date le funzioni $f(x) = x^2 + 3,\ \ g(x) = \sqrt{x}$, trova:

a) $f \circ g$
b) $g \circ f$
c) Per quali valori di *x* si ha che $f \circ g = g \circ f$ $\quad [x = -1]$
d) Per quali valori di *x* si ha che $f \circ g = 2g \circ f$ $\quad [x = 1]$

Date le funzioni $f(x) = 4x - 3,\ \ g(x) = \frac{1}{x}$, determina i valori di *x* per i quali si ha che:

a) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{2}$ $\quad \left[x = \frac{8}{7}\right]$
b) $(g \circ f)(x) = -1$ $\quad \left[x = \frac{1}{2}\right]$
c) $f(x) - g(x =)(f \circ g)(x)$ $\quad \left[x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$
d) $2g(x) - 3f(x =)(g \circ f)(1)$ $\quad \left[x = \frac{2\pm\sqrt{10}}{6}\right]$

Funzioni esponenziali

Determina il dominio delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = e^{x+2}$ $\quad [\mathbb{R}]$
2) $f(x) = \frac{4}{3^x}$ $\quad [\mathbb{R}]$
3) $f(x) = 2^{\frac{x}{x^2-1}}$ $\quad [\mathbb{R}]$
4) $f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$ $\quad [x \geq 1]$
5) $f(x) = \sqrt{4^x}$ $\quad [\mathbb{R}]$
6) $f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x}}}{x^2-4}$ $\quad [\mathbb{R} \setminus \{0, \pm 2\}]$

Risolvere le seguenti equazioni esponenziali:

1) $2^x = 8$ $[x = 3]$
2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} = 16$ $[x = -2]$
3) $3^x + 9 = 0$ $[\emptyset]$
4) $e^x - 1 = 0$ $[x = 0]$
5) $e^{2x} + 3e^x = 0$ $[\emptyset]$
6) $4^{2x+1} = 8^{2x-1}$ $\left[x = \frac{5}{2}\right]$
7) $8^{x-1} = \sqrt[3]{2^{x-3}}$ $\left[x = \frac{3}{4}\right]$
8) $3^x - 3^{x-2} + 3^{x+1} = 35$ $[x = 2]$

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali:
1) $2^x \geq 16$ $[x \geq 4]$
2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \frac{1}{27}$ $[x \leq 3]$
3) $e^x < -1$ [impossibile]
4) $e^x \leq e^4$ $[x \leq 4]$
5) $2e^x - 2 > 0$ $[x > 0]$
6) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \leq \frac{1}{25}$ $[x \geq 2]$
7) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+3} < \left(\frac{5}{2}\right)^{x-2}$ $\left[x > -\frac{1}{2}\right]$
8) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} < 64$ $[x > -2]$
9) $\frac{35}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \geq \frac{7}{10}5^x$ $\left[x \leq \frac{2}{3}\right]$
10) $\frac{e^{x^2-9}}{3x+5} \leq 0$ $\left[x < -\frac{5}{3}\right]$

Funzioni logaritmiche
Determinare il dominio delle seguenti funzioni:
1) $f(x) = logx - 18$ $[x > 0]$
2) $f(x) = ln(x^2 - 2)$ $\left[x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}\right]$
3) $f(x) = \frac{ln(x-1)}{2^x}$ $[x > 1]$
4) $f(x) = ln\left(\frac{x^2-25}{x+4}\right)$ $[\,]-5,-4[\,\cup\,]5,+\infty[\,]$
5) $f(x) = log|x + 4|$ $[\mathbb{R} \setminus \{-4\}]$
6) $f(x) = \sqrt{lnx + 7}$ $[\,[e^{-7},+\infty[\,]$
7) $f(x) = ln(2e^x)$ $[\mathbb{R}]$
8) $f(x) = \frac{x+4}{ln(-3x+1)}$ $\left[x < \frac{1}{3} \wedge x \neq 0\right]$

Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche:
1) $5\ln x = 0$ $[x = 1]$
2) $\ln(2x) - 9 = 0$ $\left[x = \frac{e^9}{2}\right]$
3) $\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = 0$ [impossibile]
4) $\log 21 - \log(x + 5) - \log(23 - x) = -\log 7$ $[x = 2 \vee x = 16]$
5) $\log(5x - 2) + \log(x + 3)^2 = \log 7 + \log(x + 3) + 2\log(5x - 2)$ $\left[x = \frac{1}{2}\right]$

6) $\log(5+x) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log(x+3) + \log 2$ $[x = -1]$
7) $\log(2-3x) + \log(x+2) = \log 5$ $\left[x = -1 \vee x = -\frac{1}{3}\right]$
8) $\log(2x^2+5x-3) - \log(x+3) = \log(4-x)$ $\left[x = \frac{5}{3}\right]$
9) $3\log x + 9 = 0$ $[x = e^{-3}]$
10) $\ln\left(\frac{x-1}{x+4}\right) = 0$ [impossibile]
11) $\frac{\ln(x-1)}{\ln(x+4)} = 0$ $[x = e]$

Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche:
1) $\log x \geq 10$ $[x \geq 10^{10}]$
2) $\log_{\frac{1}{3}} x \geq 1$ $\left[0 < x \leq \frac{1}{3}\right]$
3) $\ln x - 7 < -1$ $[0 < x < e^6]$
4) $\ln(x+3) - \ln(x^2-27) \geq 0$ $\left[\sqrt{27} < x \leq 6\right]$
5) $\ln x^2 \leq 0$ $[(-1 \leq x < 0) \vee (0 < x \leq 1)]$
6) $\frac{\ln(x+12)}{3x-6} \leq 0$ $[-11 \leq x < 2]$
7) $\log_{\frac{4}{5}}(2-x^2) - \log_{\frac{4}{5}}(1-2x) < 0$ $\left[1-\sqrt{2} < x < \frac{1}{2}\right]$
8) $\frac{1}{2}\log(-x^2+2x) < \log x$ $[1 < x < 2]$
9) $\log(x+5) - \log(4-x) + \log(3x-1) > \log(3x-1) - \log(x+4)$ $\left[\frac{1}{3} < x < 4\right]$
10) $\log_{\frac{1}{4}}(x^2-6) - \log_{\frac{1}{4}}(x-3) > -1$ $[\emptyset]$