Matematica ed elementi di statistica
Corso di laurea in Scienze e tecnologie per i beni culturali - a.a. 2014-15
Esercizi 11: Integrali

Integrali indefiniti. Calcolare i seguenti integrali indefiniti, verificando il risultato indicato.

1. $\int \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$
2. $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x}}\ dx = \frac{3}{11}\sqrt[3]{x^{11}} + c = \frac{3}{11}x^3\sqrt[3]{x^2} + c$
3. $\int (4x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 7x + 2)\ dx = \frac{2}{3}x^6 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + c$
4. $\int \left(\sqrt[5]{x} - \frac{5}{x^3} - 3\sin x + \frac{9}{x}\right)\ dx = \frac{5}{6}\sqrt[5]{x^6} + \frac{5}{2x^2} + 3\cos x + 9\ln|x| + c$
5. $\int \left(4\cos x - \frac{6}{x^2+1} + 2e^x - \frac{1}{x^4}\right) dx = 4\sin x - 6\arctan x + 2e^x + \frac{1}{3x^3} + c$
6. $\int (2x+1)^7 dx = \frac{1}{16}(2x+1)^8 + c$
7. $\int x(x^2+1)^3 dx = \frac{1}{8}(x^2+1)^4 + c$
8. $\int sin^2 x \cos x\ dx = \frac{1}{3}sin^3 x + c$
9. $\int x\sqrt{1-x^2}\ dx = \frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + c$
10. $\int \sin x\, cos^4 x\ dx = -\frac{1}{5}cos^5 x + c$
11. $\int (2x-1)(x^2-x)^3\ dx = \frac{1}{4}(x^2-x)^4 + c$
12. $\int (2x^3+1)\sqrt{x^4+2x}\ dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^4+2x)^3} + c$
13. $\int \sqrt{3-x}\ dx = -\frac{2}{3}\sqrt{(3-x)^3} + c$
14. $\int x\sqrt[3]{4+x^2}\ dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(4+x^2)^4} + c$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{2+x}} dx = 2\sqrt{2+x} + c$
16. $\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx = -\sqrt{9-x^2} + c$
17. $\int \frac{1}{3x+2} dx = \frac{1}{3}\ln|3x+2| + c$
18. $\int \frac{1}{1-6x} dx = -\frac{1}{6}\ln|1-6x| + c$
19. $\int \frac{x}{x^2+10} dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+10| + c$
20. $\int \frac{x+2}{x^2+4x+1} dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4x+1| + c$
21. $\int \frac{x^2-2}{x^3-6x} dx = \frac{1}{3}\ln|x^3-6x| + c$
22. $\int \frac{x-1}{x+5} dx = x - 6\ln|x+5| + c$

23. $\int \frac{x-4}{x-2} dx = x - 2\ln|x-2| + c$

24. $\int \frac{1-x}{x+3} dx = -x + 4\ln|x+3| + c$

25. $\int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} + c$

26. $\int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

27. $\int e^{2-x} dx = -e^{2-x} + c$

28. $\int x^2 \cdot e^{x^3+4}\, dx = \frac{1}{3} e^{x^3+4} + c$

Integrali di funzioni razionali fratte. Calcolare i seguenti integrali, verificando il risultato indicato.

1. $\int \frac{x-16}{x^2-2x-8} dx = 3\ln|x+2| - 2\ln|x-4| + c$
2. $\int \frac{3x-4}{x^2-3x+2} dx = \ln|x-1| + 2\ln|x-2| + c$
3. $\int \frac{12x+27}{x^2+x-12} dx = 3\ln|x+4| + 9\ln|x-3| + c$
4. $\int \frac{2x+5}{x^2-4} dx = \frac{9}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + c$
5. $\int \frac{2x+1}{x^2+25} dx = \ln(x^2+25) + \frac{1}{5}\arctan\frac{x}{5} + c$
6. $\int \frac{1}{x^2-5x+4} dx = \frac{1}{3}\ln|x-4| - \frac{1}{3}\ln|x-1| + c$
7. $\int \frac{x^2-6x+4}{x^2+2x+4} dx = x - \ln(x^2+2x+4) + \frac{8\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}(x+1)}{3}\right) + c$
8. $\int \frac{1}{4x^2+12x+9} dx = \frac{-1}{2(2x+3)} + c$
9. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+4} dx = 3\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + c$
10. $\int \frac{2x+3}{x^2+6x+9} dx = 2\ln|x+3| + \frac{3}{x+3} + c$

Integrali per sostituzione. Calcolare i seguenti integrali per sostituzione, verificando il risultato indicato.

1. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}} dx = 2\arctan\sqrt{x} + c$
2. $\int \frac{e^{\tan x}}{cos^2 x} dx = e^{\tan x} + c$
3. $\int \frac{1}{1+e^x} dx = x - \ln(1+e^x) + c$
4. $\int sin^4 x\, cos^3 x \;\, dx = \frac{1}{5} sin^5 x - \frac{1}{7} sin^7 x + c$
5. $\int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx = 2\arctan\sqrt{2x-1} + c$
6. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x+1}} dx = \frac{3}{64}(2x+1)^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{20}(2x+1)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{16}(2x+1)^{\frac{2}{3}} + c$

7. $\int \frac{1}{x(ln^2x+4\ln x+5)} dx = \arctan(\ln x + 2) + c$

Integrazione per parti. Calcolare i seguenti integrali per parti, verificando il risultato indicato.

1. $\int x \cdot \cos x \; dx = x \sin x + \cos x + c$
2. $\int x \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$
3. $\int x^2 \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$
4. $\int x \cdot e^x \, dx = xe^x - e^x + c$
5. $\int x \cdot e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c$
6. $\int x \cdot e^{-x} \, dx = -e^{-x}(x + 1) + c$
7. $\int x^3 e^x \, dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$
8. $\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$
9. $\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$
10. $\int cos^2 x \; dx = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + c$
11. $\int x \arctan x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + c$
12. $\int e^x \sin x \; dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$
13. $\int e^x \cos x \; dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c$
14. $\int e^{2x} \cos x \; dx = \frac{1}{5} e^{2x} (\sin x + 2 \cos x) + c$

Integrali definiti. Calcolare i seguenti integrali definiti, verificando il risultato indicato.

1. $\int_{-1}^{1} (x^2 + 4) \, dx = \frac{26}{3}$
2. $\int_{-2}^{2} (x^3 + 2x) \, dx = 0$
3. $\int_{0}^{2} e^{x+2} \, dx = e^4 - e^2$
4. $\int_{-1}^{1} \sqrt[5]{x} \, dx = -\frac{5}{6}$
5. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\sqrt{2}}{2}$
6. $\int_{0}^{2} (x^2 - 3x + 1) \, dx = -\frac{4}{3}$
7. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x + 4) \cos x \, dx = -5 - \frac{\pi}{2}$
8. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (x - 1) \sin x \, dx = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}(x+2)\sin x\,dx = -\frac{\sqrt{3}}{12}\pi - \sqrt{3} + \frac{5}{2}$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}(x-6)\cos x\,dx = \frac{\pi}{12} - 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+3)\sin x\,dx = 4$

12. $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$

13. $\int_{-1}^0 x\,e^{-3x}\ dx = -\frac{1}{9} - \frac{2}{9}e^3$

14. $\int_0^2 x\,e^{4x}\ dx = \frac{1}{16} + \frac{7}{16}e^8$

15. $\int_{-4}^1 \ln(x+5)\,dx = 6\ln 6 - 5$

16. $\int_3^5 \ln(x-2)\,dx = -\,2 + 3\ln 3$

17. $\int_5^7 \ln(x-4)\,dx = 3\ln 3 - 2$

18. $\int_6^9 \ln(x-5)\,dx = 4\ln 4 - 3$

19. $\int_{-5}^1 \ln(x+6)\,dx = 7\ln 7 - 6$

20. $\int_1^2 \ln(2x-1)\,dx = \Big[x\ln(2x-1) - x - \frac{1}{2}\ln(2x-1)\Big]_{x=1}^{x=2} = \frac{3}{2}\ln 3 - 1$

21. $\int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-9x+20}dx = 16\ln 2 - 9\ln 3$

22. $\int_{-1}^0 \frac{x-3}{x^2+x-2}dx = \frac{7}{3}\ln 2$

23. $\int_{-2}^5 \frac{3x-2}{x^2-3x-18}dx = -\frac{5}{3}\ln 2$

24. $\int_1^6 \frac{x-4}{x^2-7x}dx = \frac{1}{7}\ln 6$

25. $\int_{-4}^{-2} \frac{2x-1}{x^2+10x+25}dx = 2\ln 3 - \frac{22}{3}$

26. $\int_5^8 \frac{x-1}{x^2-8x+16}dx = \ln 4 + \frac{9}{4}$

27. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x-3}{x^2+2}dx = \ln 2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{4}$

Aree di figure piane

1. Calcolare l'area della parte di piano delimitata dall'asse delle ascisse e dalla funzione sinusoide nell'intervallo $[0,\pi]$. [Area = 2]
2. Calcolare l'area della curva delimitata dalla cubica di equazione $y = x^3$ nell'intervallo $[-1,0]$. [Area = $\frac{1}{4}$]
3. Determinare l'area della parte di piano delimitata dalla curva di equazione $y = -x^2 + 4x - 3$ e dall'asse x. [Area = $\frac{4}{3}$]