11/02/2013 Prova scritta di matematica Parte II – Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali

Cognome e Nome .... Matricola ....

1. **Sistemi lineari** *(8 punti)*

Siete in possesso di Euro 65 in monete da Euro 2 ed Euro 1. Sapendo che il numero di monete da 2 supera di 9 il numero di monete da 1, quante monete da 2 e da 1 avete? Risolvere il sistema con il metodo di Cramer e commentare il risultato.

N_1 = numero di monete da 1 €

N_2 = " " " " 2 €

$$\begin{cases} N_1 + 2 \cdot N_2 = 65 \\ N_2 = N_1 + 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} N_1 + 2N_2 = 65 \\ -N_1 + N_2 = 9 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 65 \\ -1 & 1 & 9 \end{array}\right) \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3$$

$$\det(A_{N_1}) = \begin{vmatrix} 65 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 65 - 18 = 47$$

$$\det(A_{N_2}) = \begin{vmatrix} 1 & 65 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 9 + 65 = 74$$

$$N_1 = \frac{\det(A_{N_1})}{\det(A)} = \frac{47}{3} \simeq 15{,}7$$

$$N_2 = \frac{\det(A_{N_2})}{\det(A)} = \frac{74}{3} = 24{,}7$$

Il sistema ha soluzione da un punto di vista matematico, ma dal ~~punto~~ punto di vista pratico non ce l'ha, perché N_1 ed N_2 devono essere interi.

11/02/2013 Prova scritta di matematica Parte II – Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali

Cognome e Nome .... Matricola ....

2. **Operazioni fra matrici** *(6 punti)*

Scrivere il risultato del prodotto fra le seguenti matrici *(2 punti)* e determinare il rango *(4 punti)* della matrice prodotto.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+6 & 2 \\ \cancel{4} & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = A$$

$$\det(A) = 60 - 8 = 52 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$$

11/02/2013 Prova scritta di matematica Parte II – Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali

Cognome e Nome .... Matricola ....

3. **Probabilita'** *(6 punti)*

In un'urna avete 6 palline nere numerate da 1 a 6 e 4 palline bianche numerate da 7 a 10. Si fa una estrazione.

a) Qual e' la probabilita' che esca un numero pari? *(2 punti)*

b) Qual e' la probabilita' che esca un numero pari sapendo che sara' estratta per certo una pallina nera? *(4 punti)*

a) $N_{TOT}^{CASI} = 10 \quad N_{PARI} = 5 \quad P(n_{PARI}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

b) $P(n_{PARI} | NERA) = \dfrac{P(\{n_{PARI}\} \cap \{NERA\})}{P(\{NERA\})}$

$P(\{n_{PARI}\} \cap \{NERA\}) = P(\{2,4,6\}) = \frac{3}{10} \qquad P(\{NERA\}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow P(n_{PARI} | NERA) = \dfrac{3/10}{3/5} = \frac{\cancel{3}}{10} \cdot \frac{5}{\cancel{3}} = \frac{1}{2}$

Approfondimento. In generale

$P(\{n_{PARI}\} \cap \{NERA\}) \neq P(\{n_{PARI}\}) \cdot P(\{NERA\})$

perchè PARI / NERE non sono eventi indipendenti.

Verifichiamo con il conteggio. risulta $P(n_{PARI} \cap NERA) = \frac{3}{10}$

Facendo il prodotto otteniamo:

$P(\{n_{PARI}\}) \cdot P(\{NERA\}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

* Il risultato è uguale a quello ottenuto dal conteggio, ma è un caso.

* Infatti se le PALLINE NERE fossero le prime 7

$\Rightarrow P(\{n_{PARI}\}) \cdot P(\{NERE\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{20}$

Usando il conteggio avremmo

$P(\{n_{PARI}\} \cap \{NERE\}) = P(\{2,4,6\}) = \frac{3}{10} \neq \frac{7}{20}$!!!!

11/02/2013 Prova scritta di matematica Parte II – Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali

Cognome e Nome .... Matricola ....

4. **Probabilita'** *(10 punti)*

Si lanciano simultaneamente due dadi.

a) Quanti sono i possibili eventi? *(2 punti)*

b) Qual e' la probabilita' che escano due numeri pari? *(2 punti)*

c) Qual e' la probabilita' che esca un numero dispari in un dado e il numero 6 nell'altro? *(2 punti)*

d) Qual e' la probabilita' che esca 2 nel primo dado e 6 nel secondo sapendo che uscira' sicuramente 6 nel secondo? *(4 punti)*

a) $N(\Omega_1) = 6 \quad N(\Omega_2) = 6 \quad N(\Omega_1 \times \Omega_2) = 36$

b) $P(N_1 \text{ PARI} \wedge N_2 \text{ PARI}) = P(N_1 \text{ PARI}) \cdot P(N_2 \text{ PARI})$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

c) $P(\{N_1 \text{ DISPARI} \cap N_2 = 6\} \cup \{N_1 = 6 \cap N_2 = \text{DISPARI}\})$

SONO DISGIUNTI

$= P(\{N_1 \text{ DISPARI}\} \cap \{N_2 = 6\}) + P(\{N_1 = 6\} \cap \{N_2 = \text{DISPARI}\})$

SONO INDIPENDENTI.

$= P(N_1 \text{ DISPARI}) \cdot P(N_2 = 6) + P(N_1 = 6) \cdot P(N_2 = \text{DISPARI})$

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

d) $P(N_1 = 2 \wedge N_2 = 6 \mid N_2 = 6) = \dfrac{P(\{N_1 = 2 \wedge N_2 = 6\} \cap \{N_2 = 6\})}{P(\{N_2 = 6\})}$

$$= \frac{P(\{N_1 = 2 \wedge N_2 = 6\})}{P(\{N_2 = 6\})} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{36} \cdot \frac{6}{1} = \frac{1}{6}$$