

**Appunti del corso**  
**di**  
**Matematica e Statistica**



**Appunti del corso**  
**di**  
**Matematica e Statistica**

*Luciano Battaia*

Versione del 8 maggio 2012

Testo composto con  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$  e la classe di documento Komascript di Markus Kohm e Jens Uwe Morawski.

Le immagini proposte sono realizzate

- con il pacchetto PSTricks e le sue estensioni; in molti casi sono state prima costruite usando Geogebra e poi esportate direttamente in formato PSTricks;
- con Mathematica<sup>™</sup> e successiva rielaborazione con il pacchetto PSTricks.

Nessuna parte di questo testo può essere riprodotta senza il consenso scritto dell'autore.

Se gli allievi non capiscono, il torto è dell'insegnante che non sa spiegare. Né vale addossare la responsabilità alle scuole inferiori.

Dobbiamo prendere gli allievi così come sono, richiamare ciò che essi hanno dimenticato, o studiato sotto altra nomenclatura.

Se l'insegnante tormenta i suoi alunni, e invece di cattivarsi il loro amore, eccita odio contro sé e la scienza che insegna, non solo il suo insegnamento sarà negativo, ma il dover convivere con tanti piccoli nemici sarà per lui un continuo tormento.

*Giuseppe Peano* (1858 – 1932)



# Indice

<b>Premessa</b>	<b>v</b>
<b>1 Elementi di logica, insiemi, numeri, funzioni</b>	<b>1</b>
1.1 Logica proposizionale	1
1.1.1 Connettivi logici	2
1.2 Logica dei predicati	3
1.2.1 Quantificatori	3
1.3 Altri simboli di base	5
1.4 Insiemi	6
1.5 Operazioni tra insiemi	8
1.6 Relazioni binarie	10
1.7 Numeri	15
1.7.1 Il principio di induzione nei naturali	16
1.8 Intervalli di numeri reali	17
1.9 Funzioni	18
<b>2 Funzioni elementari</b>	<b>25</b>
2.1 Introduzione	25
2.2 Funzioni iniettive, suriettive, biettive	26
2.3 Funzioni composte	27
2.4 La funzione polinomiale di primo grado	29
2.5 La funzione polinomiale di secondo grado	30
2.6 La funzione valore assoluto	31
2.7 La legge di proporzionalità inversa	32
2.8 Funzioni esponenziali elementari	33
2.9 Le funzioni logaritmo	33
2.10 Cenno alle funzioni trigonometriche	35
2.11 Le funzioni potenza	37
<b>3 Limiti e continuità</b>	<b>39</b>
3.1 Considerazioni introduttive	39
3.2 Intorni di un numero o punto	43
3.3 La retta reale estesa	45
3.4 Punti di accumulazione, di frontiera, isolati	46
3.5 La definizione di limite	48
3.6 Tre teoremi fondamentali sui limiti	50
3.7 Funzioni continue	53
3.8 Il calcolo dei limiti	54
3.9 Esempi di calcolo dei limiti	55
3.10 Qualche ulteriore esempio di funzione discontinua	57
<b>4 Derivate</b>	<b>59</b>
4.1 Tangenti a una circonferenza e tangenti a una curva	59

4.2	Derivata e tangente al grafico di una funzione . . . . .	60
4.3	Derivate successive . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Grafici di funzioni</b>	<b>67</b>
5.1	I teoremi fondamentali del calcolo differenziale . . . . .	67
5.2	Massimi e minimi per una funzione . . . . .	71
5.3	Funzioni convesse e concave . . . . .	73
5.4	Asintoti al grafico di una funzione . . . . .	75
5.5	Conclusioni sul tracciamento del grafico di una funzione . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Integrali</b>	<b>81</b>
6.1	Introduzione . . . . .	81
6.2	Primitive per una funzione reale di variabile reale . . . . .	82
6.3	Area di un trapezoide . . . . .	85
6.4	Integrale definito . . . . .	86
6.5	Il calcolo degli integrali definiti . . . . .	90
<b>7</b>	<b>La matematica del discreto</b>	<b>93</b>
7.1	Successioni . . . . .	93
7.2	Limiti di successioni . . . . .	95
7.3	Introduzione al calcolo combinatorio . . . . .	97
7.3.1	Disposizioni . . . . .	97
7.3.2	Permutazioni . . . . .	99
7.3.3	Combinazioni . . . . .	100
7.4	La formula del binomio di Newton . . . . .	101
<b>8</b>	<b>Algebra lineare</b>	<b>103</b>
8.1	Operazioni tra vettori . . . . .	103
8.2	Vettori e componenti . . . . .	104
8.3	Vettori in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	104
8.4	Matrici . . . . .	105
8.5	Il prodotto tra matrici . . . . .	106
8.6	Il determinante di una matrice quadrata . . . . .	111
8.6.1	Il calcolo della matrice inversa . . . . .	113
8.7	Il rango di una matrice . . . . .	114
8.8	I sistemi lineari . . . . .	115
<b>9</b>	<b>Elementi di Calcolo delle probabilità</b>	<b>119</b>
9.1	Definizioni di probabilità . . . . .	119
9.2	La grammatica del Calcolo delle probabilità . . . . .	120
9.3	Probabilità subordinata e correlazione . . . . .	121
9.4	Variabili casuali . . . . .	123
9.5	Funzione di ripartizione . . . . .	125
9.6	Media e varianza . . . . .	126
9.7	La distribuzione binomiale . . . . .	127
9.8	Cenno alle variabili continue . . . . .	128
<b>10</b>	<b>Introduzione alla statistica descrittiva</b>	<b>131</b>
10.1	L'analisi statistica di un fenomeno . . . . .	131
10.2	Intensità e frequenza . . . . .	131
10.3	Indici statistici . . . . .	132



---

10.4 Cenno all'inferenza statistica . . . . .	134
<b>Notazioni utilizzate</b>	<b>135</b>
<b>Alfabeto greco</b>	<b>137</b>
<b>Indice analitico</b>	<b>139</b>



# Premessa

Questo testo contiene sostanzialmente il diario delle lezioni di Matematica e Statistica tenute, negli anni accademici 2009/2010 e successivi, presso la sede di Pordenone dell'Università degli studi di Udine, per il corso di laurea in Scienze e Tecnologie Multimediali della Facoltà di Scienze della Formazione. Il testo è adatto a un corso di circa 70 ore di lezione, comprensive di esercitazioni: la ristrettezza dei tempi a disposizione impone numerose limitazioni sia nella scelta degli argomenti sia nel grado di approfondimento degli stessi. Naturalmente si è tenuto conto, sia nella scelta degli argomenti che nella loro trattazione, delle caratteristiche specifiche del corso di laurea in cui viene utilizzato il testo. In particolare durante il corso si è fatto estesamente uso di software opportuni, sia per tracciare grafici, che per visualizzare i concetti via via esposti. In sostanza questo corso non vuole essere un corso di analisi assolutamente formale, quanto piuttosto una introduzione, il più possibile “visuale” ai concetti chiave dell'analisi, sempre comunque mantenendo il dovuto rigore. Lo stesso tipo di impostazione è stata seguita per la presentazione e la discussione delle tecniche di calcolo specifiche dell'analisi, come quelle relative alle derivate e agli integrali: la scelta è sempre stata quella di presentare e discutere in dettaglio i concetti fondamentali, implementando solo le regole più importanti, evitando esercizi e problemi complessi. Infatti i software di calcolo simbolico attualmente diffusi (anche freeware come Geogebra) consentono di ottenere derivate e primitive di tutte le funzioni normalmente utilizzate nelle applicazioni senza alcuna difficoltà.

La raccolta comprende lo schema delle lezioni svolte e non ha alcuna pretesa di completezza e sistematicità. Anzi, trattandosi di un *diario delle lezioni*, alcuni argomenti possono essere anche ripresi più volte in contesti diversi, a seconda delle domande e osservazioni degli studenti. Inoltre alcuni argomenti sono semplicemente accennati, per altri si è fatta una trattazione più estesa e approfondita. In ogni caso si rimanda ai testi via via consigliati per i necessari completamenti che non trovano posto in questi appunti.

Il testo contiene anche la raccolta degli esercizi svolti e/o proposti durante il corso. Alcuni argomenti teorici sono sviluppati anche negli esercizi, che fanno integralmente parte del corso.

Molte delle idee, degli argomenti e degli esempi qui proposti sono tratti, spesso integralmente, da Appunti del compianto prof. (e amico) Giorgio Tomaso Bagni che ha tenuto questo corso negli anni accademici precedenti.

Gli studenti sono pregati di segnalare eventuali, inevitabili, errori all'indirizzo di posta elettronica [batmath@gmail.com](mailto:batmath@gmail.com).



# 1 Elementi di logica, insiemi, numeri, funzioni

Scopo di questo capitolo è principalmente quello di costruire un linguaggio sufficientemente chiaro e preciso per gli sviluppi futuri del corso, anche richiamando brevemente concetti che in buona parte dovrebbero essere noti dagli studi precedenti.

In questo capitolo utilizzeremo fin da subito, specie negli esempi, gli insiemi dei numeri naturali ( $\mathbb{N}$ ), interi ( $\mathbb{Z}$ ), razionali ( $\mathbb{Q}$ ) e reali ( $\mathbb{R}$ ), le cui proprietà essenziali dovrebbero essere note dalla scuola media superiore, e sui quali torneremo, seppur brevemente, in seguito.

## 1.1 Logica proposizionale

La frase “*La neve è bianca*” esprime un fatto ritenuto da tutti *vero*, anzi universalmente vero. La frase “*La terra è una stella*” esprime invece un fatto ritenuto da tutti *falso*, anzi universalmente falso. La frase “*Pordenone è una bella città*” esprime un fatto che può essere ritenuto vero da certi individui e falso da altri. Alle frasi “*Non disturbare mentre faccio lezione*”, “*Vai a comperare il pane*”, “*Se lancio un dado esce il sei*”, “*Domani pioverà*”, non può essere attribuito un valore di verità o falsità.

Questi esempi mostrano che alcune frasi, o proposizioni, della lingua italiana (ma lo stesso succede in tutte le lingue) assumono uno ed uno solo tra i valori *vero* e *falso*, in altri casi o non c'è accordo sull'attribuzione di un valore di verità o falsità, oppure non ha proprio senso tale attribuzione.

Esistono anche esempi più complessi, come l'affermazione “*Tutti i numeri naturali pari maggiori di 2 sono somma di due numeri primi*”. Ebbene, a tutt'oggi (2009), non è possibile sapere se tale affermazione sia *vera* o *falsa*<sup>(1)</sup>, benchè non si sia trovato nessun caso in cui tale affermazione non è verificata.

Tenendo conto di queste osservazioni, daremo ora una definizione di *enunciato*, o *proposizione*, segnalando comunque che il concetto di *verità* è estremamente delicato e un'analisi del problema esula dagli scopi di questo corso.

**Definizione 1.1.** *Si chiama proposizione o enunciato ogni affermazione che assume uno e un solo valore di verità: vero o falso.*

Si noti che è implicito nella definizione data il fatto che ammettiamo che la logica di cui ci occupiamo sia *bivalente*, cioè preveda che le espressioni di cui ci occupiamo possano avere uno solo dei due valori di verità “vero” o “falso”.

---

<sup>1</sup>Si tratta della famosa *Congettura di Goldbach*, proposta sostanzialmente da Christian Goldbach nel 1742. Per esempio si ha

1.  $4 = 2 + 2$
2.  $6 = 3 + 3$
3.  $8 = 3 + 5$
4.  $10 = 3 + 7 = 5 + 5$
5. ...

Gli enunciati possono essere costituiti da una sola affermazione, come negli esempi che abbiamo proposto sopra, e li chiameremo *enunciati atomici*, oppure possono essere costituiti da più affermazioni, collegate tra di loro. Un esempio è costituito dall'enunciato “*Il sole è una stella e la terra è un pianeta*”, che si può considerare composto da due enunciati atomici (entrambi veri) connessi dalla parola “e”. Un altro modo per costruire nuovi enunciati è quello di usare la negazione “non”. Per esempio “*La terra non è una stella*” è ottenuto dalla *negazione* dell'enunciato (falso) “*La terra è una stella*”.

Si chiamano *connettivi* le parole (come la “e” dell'esempio) che collegano tra di loro due enunciati, oppure che operano su un enunciato (come il “non” dell'esempio) per ottenere un nuovo enunciato. A volte il “non” è chiamato un *operatore* invece che un connettivo, in quanto in realtà non connette due enunciati, ma agisce, “opera”, su un singolo enunciato.

Si deve notare che i connettivi collegano tra di loro due enunciati senza alcun riguardo al significato che questi possono assumere; per esempio è perfettamente legittimo l'enunciato “*Parigi è la capitale del Brasile o 2+2 vale 4*”, che è la connessione, tramite la parola “o”, di due enunciati (uno falso e uno vero). L'unica cosa che conta è il valore di verità complessivo dell'enunciato risultante.

Poichè nel linguaggio comune le parole non hanno sempre un senso univoco, in logica al posto delle parole si utilizzano dei simboli speciali per formalizzare in maniera rigorosa i connettivi e si costruiscono delle *tavole di verità* che stabiliscono le regole che permettono di dedurre la verità o meno di un enunciato composto, una volta che sia noto il valore di verità degli enunciati componenti: queste tavole di verità possono essere pensate come delle vere e proprie *definizioni* dei connettivi stessi.

### 1.1.1 Connettivi logici

Nel seguito indicheremo le proposizioni con simboli come  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$ , ... I connettivi che ci interessano sono i seguenti:

- non, oppure  $\neg$ , *negazione*:  $\text{non}\mathcal{P}$  (oppure  $\neg\mathcal{P}$ ) è vera, se  $\mathcal{P}$  è falsa, e viceversa;
- $\wedge$ , “et”, oppure “e”, *congiunzione*:  $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$  è vera se tutte due le proposizioni sono vere, altrimenti è falsa;
- $\vee$ , “vel”, oppure “o”, *disgiunzione*:  $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$  è vera se almeno una delle due proposizioni è vera, altrimenti è falsa;
- $\Rightarrow$ , “implica”, *implicazione*:  $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$  è falsa solo quando  $\mathcal{P}$  è vera e  $\mathcal{Q}$  è falsa, in particolare da una proposizione falsa si può dedurre qualsiasi cosa;
- $\Leftrightarrow$ , “se e solo se”, “condizione necessaria e sufficiente”, *equivalenza*:  $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$  è vera se  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  sono entrambe vere o entrambe false.

La tabella che segue (dove “V” indica *vero* e “F” indica *falso*) riassume in maniera formale le definizioni dei connettivi.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\neg\mathcal{P}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

**Tabella 1.1** Connettivi logici e tavola di verità

Si noti che la tabella precedente è costruita tenendo conto che ciascuno dei due enunciati atomici ha due possibili valori di verità, e che quindi per esaminare il valore di verità di un enunciato che li coinvolga entrambi devo esaminare tutte le situazioni che si possono presentare (come vedremo studiando il calcolo combinatorio, tutte le disposizioni con ripetizione di due oggetti a due a due, ovvero  $2^2 = 4$  casi). Per il solo connettivo “non” basterebbero evidentemente due sole righe nella tabella, in quanto in questo caso è coinvolto un solo enunciato atomico. Tabelle di questo tipo si chiamano *Tavole di verità*.

Il connettivo  $\Rightarrow$  ha molta importanza in matematica. Dimostrare un teorema significa infatti dimostrare la verità di  $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ , sapendo che  $\mathcal{P}$  è vera:  $\mathcal{P}$  è detta *ipotesi* e  $\mathcal{Q}$  è detta *tesi*.

Nel costruire enunciati complessi, che utilizzino ripetutamente i connettivi indicati, bisogna prestare attenzione all’ordine in cui le “operazioni” sugli enunciati vengono eseguite, ed eventualmente usare le parentesi, come nelle normali espressioni matematiche.

Vediamo un esempio in cui siano coinvolti solo due enunciati, per evitare di dover costruire una tabella troppo ampia: dati due enunciati  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$ , costruire la tavola di verità dell’enunciato  $\neg[(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q})]$ . Si veda la tabella che segue.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$	$\neg\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}$	$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q})$	$\neg[(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q})]$
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	V	F
F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V

**Tabella 1.2** *Tavola di verità della proposizione  $\neg[(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q})]$*

## 1.2 Logica dei predicati

Come abbiamo detto, il senso di una proposizione sta nel poter stabilire se è vera o se è falsa. Un’affermazione del tipo  $x < -2$  non è una proposizione, perchè il suo valore di verità dipende da  $x$ . Facendo variare  $x$  in un opportuno insieme (che deve essere precisato) si possono ottenere proposizioni vere o proposizioni false. Possiamo dire che si tratta di un proposizione dipendente da  $x$ , e indicarla con  $\mathcal{P}(x)$ :  $x$  sia chiama una *variabile* e  $\mathcal{P}(x)$  un *predicato*. Naturalmente si possono avere predicati che dipendono da più variabili, per esempio  $x + y > 0$ , e in questo caso i predicati sono anche chiamati *relazioni*.

Come abbiamo già osservato è indispensabile precisare in quale ambiente si deve scegliere la variabile (o le variabili) di un predicato. Per esempio l’affermazione “ $x$  è pari” ha senso se  $x$  è un numero naturale, non ha alcun senso se  $x$  è una frazione.

Fissato uno dei possibili valori di  $x$ , diciamolo  $x_0$ , il predicato diventa una proposizione (che sarà vera o falsa a seconda di  $x_0$ ), proposizione che si indica con  $\mathcal{P}(x_0)$ .

### 1.2.1 Quantificatori

Nella costruzione dei predicati si usano comunemente costruzioni del tipo

- *Esiste (almeno) un  $x$  tale che valga  $\mathcal{P}(x)$ .*
- *Per ogni  $x$  è verificato  $\mathcal{P}(x)$ .*

Per formalizzare queste frasi si usano due simboli logici, detti *quantificatori*

- $\forall$ , “per ogni”, *quantificatore universale*;
- $\exists$ , “esiste (almeno) un”, *quantificatore esistenziale*.

Si usa anche spesso il simbolo  $\exists!$ , oppure  $\exists_1$  per indicare che *esiste uno e uno solo*.

Nel caso di uso contemporaneo di più quantificatori si deve prestare particolare attenzione all'ordine con cui sono scritti. Un esempio chiarirà il senso di questa affermazione.

Consideriamo il predicato  $\mathcal{P}(x, y) = “x \text{ è uno studente in grado di risolvere il problema } y”$ . Allora

$$\forall y \exists x \text{ tale che } \mathcal{P}(x, y)$$

significa: “qualunque sia il problema  $y$  c'è uno studente in grado di risolverlo”. Invece

$$\exists x \forall y \text{ tale che } \mathcal{P}(x, y)$$

significa: “c'è uno studente in grado di risolvere qualsiasi problema”. Evidentemente si tratta di due situazioni radicalmente diverse.

*Osservazione 1.2.* È opportuno rendersi conto, su un esempio classico, di come la simbologia comunemente usata in matematica possa facilmente dar luogo a equivoci, senza un'effettiva conoscenza delle relazioni tra i connettivi logici.

Non è difficile provare che gli enunciati composti  $\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$  e  $(\neg\mathcal{P}) \wedge (\neg\mathcal{Q})$  hanno gli stessi valori di verità (si tratta di una delle cosiddette Leggi di De Morgan). Consideriamo ora l'equazione

$$x^2 = 1,$$

le cui soluzioni si trovano scritte usualmente nella forma

$$x = \pm 1,$$

ove si intende che sia il numero 1 che il numero  $-1$  soddisfano l'equazione (in termini logici: rendono vero, nell'insieme dei numeri reali, il predicato “ $x^2 = 1$ ”). Questo risultato andrebbe, più correttamente, espresso nella forma

$$x = 1 \vee x = -1.$$

Consideriamo ora la scrittura

$$x^2 \neq 1$$

la cui “soluzione” è usualmente scritta nella forma

$$x \neq \pm 1.$$

Ebbene, questa scrittura *non* deve essere tradotta in  $x \neq 1 \vee x \neq -1$ , che porterebbe alla conclusione che  $x^2 \neq 1$  è verificata da ogni numero reale; la traduzione logica corretta è, invece,

$$x \neq 1 \wedge x \neq -1$$

in quanto quello che si intende scrivendo  $x \neq \pm 1$  è proprio il *contemporaneo* verificarsi delle due condizioni su  $x$ .

Si può notare che  $x^2 \neq 1$  equivale a  $\neg(x^2 = 1)$  che porta a  $\neg(x = 1 \vee x = -1)$  ovvero a  $\neg(x = 1) \wedge \neg(x = -1)$ , che viene abitualmente scritta  $x \neq 1 \wedge x \neq -1$ .



### 1.3 Altri simboli di base

Tra i molti simboli che si usano nella pratica matematica ne richiamiamo qui due, per la loro importanza in questo corso.

Se dobbiamo scrivere la somma dei numeri 1, 2, 3, possiamo tranquillamente scrivere  $1 + 2 + 3$ , ma se dobbiamo scrivere la somma dei numeri da 1 a 100<sup>(2)</sup>, la scrittura esplicita diventa oltremodo pesante. Si potrebbe pensare di ovviare con l'uso dei puntini di sospensione:

$$1 + 2 + \cdots + 99 + 100.$$

La cosa però non è esente da critiche e, soprattutto, non è sempre praticabile. Per questo si introduce il cosiddetto *simbolo di sommatoria*, col quale la somma precedente si scrive

$$\sum_{i=1}^{100} i,$$

che traduce in forma compatta esattamente quello che si deve fare: sommare i numeri naturali, rappresentati genericamente dalla “variabile”  $i$ , partendo dal numero 1 e arrivando fino al numero 100.

In generale gli addendi di una somma possono essere più complessi, per esempio:

- i reciproci dei numeri naturali:  $1/i$ ,
- i quadrati dei numeri naturali:  $i^2$ ,
- un'espressione qualunque coinvolgente i numeri naturali, come il rapporto tra un naturale e il suo successivo:  $i/(i+1)$ ,
- ecc.

Se indichiamo con  $a(i)$ , o  $a_i$ , l'espressione coinvolgente il numero naturale  $i$ , la scrittura

$$(1.1) \quad \sum_{i=m}^n a_i$$

indicherà la somma di tante “copie” di quell'espressione, dove al posto di  $i$  si devono mettere, successivamente, tutti i numeri naturali dal valore iniziale  $m$  al valore finale  $n$ . Proponiamo alcuni esempi per chiarire ancora meglio il senso di quanto detto<sup>(3)</sup>.

$$\begin{aligned} - \sum_{i=5}^{10} \frac{1}{i^2} &= \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2}; \\ - \sum_{i=2}^{100} \frac{i}{i-1} &= \frac{2}{2-1} + \frac{3}{3-1} + \cdots + \frac{99}{99-1} + \frac{100}{100-1}; \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Un aneddoto, abbastanza verosimile, relativo al grande matematico tedesco Carl Friedrich Gauss (1777-1855) racconta che all'età di otto-nove il maestro, per metterlo a tacere per un bel po', gli ordinò di sommare i numeri da 1 a 100: in brevissimo tempo Gauss fornì la risposta  $50 \times 101 = 5050$ , sorprendendo anche il maestro che aveva sottovalutato l'intelligenza del suo allievo...

<sup>3</sup>Alcuni scrivono lo stesso simbolo disponendo soprattutto gli estremi in maniera leggermente diversa:

$$\sum_n^m a_i;$$

si tratta praticamente solo di una questione di gusto, e nulla cambia ovviamente per quanto riguarda il significato.

$$- \sum_{i=0}^5 (-1)^i = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 (= 0)$$

È opportuno osservare che al posto di  $i$  (che si chiama *indice della sommatoria*) si può usare una qualunque altra lettera: le scritte

$$\sum_{i=m}^n a_i \quad , \quad \sum_{j=m}^n a_j \quad \text{e} \quad \sum_{k=m}^n a_k$$

sono del tutto equivalenti (naturalmente purchè i valori iniziale e finale restino gli stessi e le espressioni che coinvolgono numeri naturali siano identiche): per questo motivo l'indice  $i$  è spesso detto una *variabile muta*.

Giova anche ricordare che, trattandosi di somme, si possono applicare le usuali proprietà, in particolare ci interessa segnalare quella associativa. Si vedano gli esempi che seguono.

*Esempi.*

$$- \sum_{i=2}^{100} \frac{2i+4}{i-1} = 2 \sum_{i=2}^{100} \frac{i+2}{i-1};$$

$$- \sum_{i=0}^{20} \frac{(-1)^i}{i} = (-1) \sum_{i=0}^{20} \frac{(-1)^{i-1}}{i}.$$

In maniera perfettamente analoga si possono considerare prodotti al posto di somme: si parla di simbolo di *produttoria*, anzichè di sommatoria e si usa la scrittura:

$$(1.2) \quad \prod_{i=m}^n a_i,$$

ove il significato dei simboli è ormai evidente.

Sommatorie e produttorie possono combinarsi tra di loro e ripetersi nella stessa espressione. In casi del genere è sufficiente applicare *ordinatamente* le definizioni che abbiamo dato.

*Esempio.*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 \left( \sum_{j=3}^6 (i-2j) \right) &= \sum_{i=1}^5 \left( (i-2 \times 3) + (i-2 \times 4) + (i-2 \times 5) + (i-2 \times 6) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^5 \left( (i-6) + (i-8) + (i-10) + (i-12) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^5 (4i-36) = 4 \sum_{i=1}^5 (i-9) = \\ &= 4 \left( (1-9) + (2-9) + (3-9) + (4-9) + (5-9) \right) = \\ &= 4(-8-7-6-5-4) = -120 \end{aligned}$$

## 1.4 Insiemi

Assumiamo la nozione di *insieme* come primitiva, fidandoci della nostra intuizione. Volendo si potrebbero usare delle circonlocuzioni, del tipo “un insieme è una *collezione* di oggetti, detti *elementi*”, ma in realtà non avremmo detto nulla di significativo: è come dire “un insieme è un

insieme". Abitualmente, ma non sempre, indicheremo gli insiemi con le lettere maiuscole corsive:  $A, B, \dots$ .

La scrittura

$$(1.3) \quad x \in A$$

sta ad indicare che l'oggetto  $x$  è un elemento dell'insieme  $A$  e si legge " $x$  appartiene ad  $A$ ". La (1.3) si può scrivere anche  $A \ni x$ . La negazione della (1.3) si scrive

$$(1.4) \quad x \notin A,$$

che si legge, naturalmente, " $x$  non appartiene ad  $A$ ". La (1.4) si può scrivere anche  $A \not\ni x$ .

Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi. Questo si può scrivere, usando i simboli logici sopra introdotti,

$$(1.5) \quad A = B \Leftrightarrow (\forall x \ x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

È conveniente introdurre uno speciale insieme, detto *insieme vuoto* e indicato con  $\emptyset$ , privo di elementi. Poiché due insiemi possono essere diversi se e solo differiscono per qualche loro elemento, dovremo ritenere che di insiemi vuoti ce ne sia uno solo.

Per assegnare un insieme possiamo usare due metodi.

1. Rappresentazione estensiva: consiste nell'elencare tutti gli elementi, per esempio  $A = \{0, \pi, \sqrt{2}, \text{Pordenone}\}$ .
2. Rappresentazione intensiva: consiste nell'assegnare gli elementi indicando una proprietà che li contraddistingue, per esempio  $A = \{x \mid x \text{ è un numero naturale pari}\}$ . La proprietà caratteristica non è altro che un predicato  $\mathcal{P}(x)$ , e l'insieme contiene i valori di  $x$  per cui il predicato è vero.

La seconda possibilità è soprattutto indicata per insiemi che contengano infiniti elementi e in particolare per sottoinsiemi di altri insiemi. Anche gli insiemi infiniti però potranno, se non sono possibili equivoci, essere descritti per elencazione. Potremo, a volte, scrivere  $A = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$  per indicare l'insieme dei numeri naturali multipli di 3, ma occorre prestare la massima attenzione. Per esempio se scrivessimo

$$A = \{2, 3, \dots\}$$

non sarebbe assolutamente possibile dedurre se intendiamo riferirci ai numeri naturali maggiori o uguali a 2, oppure ai numeri primi.

Occorre poi prestare ancora più attenzione alle rappresentazioni intensive. Esse non presentano problemi quando si usano per assegnare sottoinsiemi di un insieme noto<sup>(4)</sup>, possono invece produrre gravi difficoltà logiche in altri casi, come mostra il famoso *Paradosso del barbiere*: se il barbiere è definito come colui che fa la barba a chi non se la fa da solo, non è possibile stabilire se il barbiere si faccia o no la barba.

È da segnalare il fatto che, se per assegnare un insieme dobbiamo necessariamente avere un criterio per decidere quali sono i suoi elementi, a volte la verifica esplicita se un elemento sta o no in un insieme può essere estremamente complessa. L'esempio classico di questa situazione è quello dell'insieme,  $P$ , dei numeri primi. Mentre è immediato che, per esempio  $31 \in P$ , è molto più difficile verificare che anche  $15\,485\,863 \in P$ , e per verificare che  $2^{43\,112\,609} - 1 \in P$  (uno dei più grandi primi conosciuti alla fine del 2009, con ben 12\,978\,189 cifre) ci vogliono lunghissimi tempi di calcolo anche su un elaboratore molto potente.

<sup>4</sup>È la stessa osservazione fatta a proposito dei predicati, quando abbiamo detto che si deve precisare in quale ambiente varia la  $x$  che compare nel predicato.

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , se ogni elemento di  $A$  è anche elemento di  $B$ , diremo che  $A$  è un *sottoinsieme* di  $B$ , o che è *contenuto* in  $B$ , o anche che  $B$  è un *soprainsieme* di  $A$ , o che *contiene*  $A$ , e scriveremo

$$(1.6) \quad A \subseteq B \quad , \quad B \supseteq A.$$

Osserviamo esplicitamente che, con questa notazione, per ogni insieme  $A$  si ha  $A \subseteq A$ , cioè ogni insieme è contenuto in se stesso. Per indicare che  $A \subseteq B$ , ma che esiste qualche elemento di  $B$  che non è contenuto in  $A$  useremo la scrittura

$$(1.7) \quad A \subset B, \text{ oppure } B \supset A$$

e parleremo di sottoinsieme (o soprainsieme) *proprio*.

Tra i vari sottoinsiemi di un insieme possiamo sempre annoverare anche l'insieme vuoto:  $\emptyset \subseteq A, \forall A$ . Ci potranno interessare anche sottoinsiemi costituiti da un solo elemento: se  $a \in A$ , allora  $\{a\} \subseteq A$ . Si noti la radicale differenza che c'è tra i due simboli  $\in$  e  $\subset$  (o  $\subseteq$ ): il primo mette in relazione oggetti diversi (elementi e insiemi), il secondo mette in relazione oggetti dello stesso tipo (insiemi).

Dato un insieme  $A$  ammettiamo di poter considerare l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi, detto *insieme delle parti* e indicato con  $\mathcal{P}(A)$ . Per esempio, se  $A = \{a, b\}$ , allora

$$\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, A \}.$$

Usando l'insieme delle parti si possono costruire, "sul vuoto", insiemi molto complessi. Si vedano gli esempi che seguono.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\emptyset) &= \{ \emptyset \} \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) &= \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) &= \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \{ \emptyset \} \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \} \} \end{aligned}$$

Mentre l'insieme vuoto non ha elementi, gli insiemi qui sopra proposti hanno, nell'ordine, 1, 2, 4 elementi.

## 1.5 Operazioni tra insiemi

**Definizione 1.3.** *Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , si chiama loro unione, e si indica con  $A \cup B$ , l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad  $A$ , a  $B$  o a entrambi.*

$$(1.8) \quad A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}.$$

*Esempio.* Se  $A = \{0, 1, 2, 3\}$  e  $B = \{2, 3, 4\}$ , allora  $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

**Definizione 1.4.** *Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , si chiama loro intersezione, e si indica con  $A \cap B$ , l'insieme formato dagli elementi che appartengono contemporaneamente ad  $A$  e a  $B$ .*

$$(1.9) \quad A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}.$$

*Esempio.* Se  $A$  e  $B$  sono come nell'esempio precedente, allora  $A \cap B = \{2, 3\}$ .

Due insiemi la cui intersezione sia vuota si dicono *disgiunti*. L'insieme vuoto è sempre disgiunto da ogni altro insieme.

Le operazioni di unione e intersezione sono ovviamente associative e dunque si potrà scrivere l'unione o intersezione di più insiemi senza usare alcuna parentesi.

Saremo anche interessati a considerare *famiglie di insiemi*: se a ogni elemento di un dato insieme  $\mathcal{A} \neq \emptyset$  corrisponde un insieme  $A$ , la famiglia di insiemi sarà denotata con

$$\{ A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A} \}.$$

Quando non si darà adito a equivoci potremo anche denotare una famiglia di insiemi semplicemente con  $\{ A_\alpha \}$ , senza precisare l'insieme  $\mathcal{A}$  di variabilità degli indici. In molte situazioni l'insieme  $\mathcal{A}$  sarà l'insieme dei numeri naturali o un suo sottoinsieme. Per le unioni di tutti gli insiemi di una famiglia useremo scritte del tipo

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha, \quad \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n, \quad \bigcup_{n=0}^{10} A_n, \quad \bigcup_{n \in \{1, 2, \dots, k\}} A_n, \quad \text{ecc.},$$

e analoghe per le intersezioni<sup>(5)</sup>. Potremo anche usare notazioni abbreviate come

$$\bigcup_{\alpha} A_\alpha$$

se l'insieme di variabilità degli indici è chiaro dal contesto.

Le seguenti sono alcune proprietà di uso comune dell'unione e dell'intersezione.

$$\begin{aligned} A \cup A &= A; & A \cap A &= A; \\ A \cup B &= B \cup A; & A \cap B &= B \cap A; \\ A \cup \emptyset &= A; & A \cap \emptyset &= \emptyset; \\ A \cup B &\supseteq A; & A \cap B &\subseteq A; \\ A \cup B &= A \Leftrightarrow A \supseteq B; & A \cap B &= A \Leftrightarrow A \subseteq B. \end{aligned}$$

Valgono anche le proprietà distributive di un'operazione rispetto all'altra:

$$(1.10) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad , \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

**Definizione 1.5.** *Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , si chiama loro differenza, e si indica con  $A \setminus B$ , l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad  $A$  ma non a  $B$ .*

$$(1.11) \quad A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}.$$

*Esempio.* Se  $A$  e  $B$  sono come nell'esempio già considerato per l'unione, allora  $A \setminus B = \{ 0, 1 \}$ .

Nel caso che  $B \subseteq A$ , l'insieme  $A \setminus B$  si chiama anche *complementare di  $B$  rispetto ad  $A$*  e si indica con  $\complement_A B$ , o semplicemente con  $\complement B$  se l'insieme  $A$  è precisato una volta per tutte. In molte situazioni si conviene di fissare un insieme, detto *universo*, di cui tutti gli insiemi della teoria sono sottoinsiemi: questo evita di avere problemi tipo quelli del paradosso del barbiere. In questo caso quando si parla di complementare senza ulteriori precisazioni si intende sempre il complementare rispetto all'universo.

Assumiamo anche un altro concetto primitivo, che utilizzeremo continuamente, e precisamente quello di *coppia ordinata*, che indicheremo con  $(x, y)$ , dove è importante il posto occupato dagli elementi  $x$  e  $y$ :

$$(x, y) = (x_1, y_1) \Leftrightarrow x = x_1 \wedge y = y_1.$$

Conviene osservare esplicitamente che, in generale,

$$\{ a, b \} = \{ b, a \} \quad \text{mentre} \quad (a, b) \neq (b, a).$$

<sup>5</sup>Si noti l'analogia con la notazione usata per il simbolo di sommatoria.

**Definizione 1.6.** Dati due insiemi  $A$  e  $B$  si chiama loro prodotto cartesiano, o semplicemente prodotto, l'insieme, indicato con  $A \times B$ , delle coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad  $A$  e il secondo a  $B$ :

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{ (a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B) \} .$$

È una conseguenza immediata della definizione che  $A \times B \neq B \times A$ . Nel caso particolare che  $A = B$  si scrive anche  $A^2$  in luogo di  $A \times A$ .

Si possono considerare anche prodotti cartesiani di più di due insiemi (attenzione all'ordine!) e, nel caso del prodotto cartesiano di un insieme per se stesso  $n$  volte si scriverà  $A^n$  in luogo di  $A \times A \times \dots \times A$ .

**Definizione 1.7.** Se  $A$  è un insieme non vuoto, una famiglia  $\{ A_\alpha \}$  di sottoinsiemi di  $A$  si dirà una partizione o ripartizione di  $A$  se:

1.  $A_\alpha \neq \emptyset \forall \alpha$ ;
2.  $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ , se  $\alpha \neq \beta$ ;
3.  $\bigcup_{\alpha} A_\alpha = A$ .

Gli elementi della famiglia si diranno anche *classi*.

*Esempi.*

- Sia  $A$  l'insieme dei punti di un piano e  $r$  una retta dello stesso piano. La famiglia di tutte le rette parallele a  $r$  costituisce una ripartizione di  $A$ .
- Sia  $\mathbb{Z}$  l'insieme degli interi: la famiglia di insiemi  $\{ \mathbb{Z}^-, \{0\}, \mathbb{Z}^+ \}$  costituisce una ripartizione di  $\mathbb{Z}$ .
- Sia  $A$  l'insieme di tutte le rette di un piano e  $\mathcal{A}$  l'insieme di tutte le rette del fascio avente centro in un punto  $O$  qualsiasi. Considerato l'insieme

$$A_\alpha = \{ r \mid r \text{ è una retta parallela a una retta } r_\alpha \text{ di } \mathcal{A} \},$$

la famiglia  $\{ A_\alpha \}$  è una ripartizione di  $A$ .

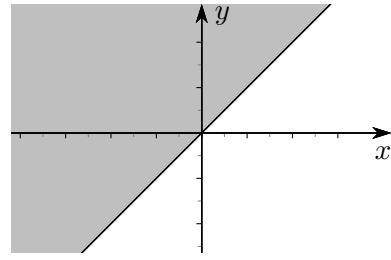
- Sia  $\mathbb{N}^+$  l'insieme dei naturali positivi e consideriamo i sottoinsiemi  $A =$  insieme dei pari,  $B =$  insieme dei primi,  $C =$  insieme dei dispari non primi. Allora la famiglia  $\{ A, B, C \}$  non costituisce una ripartizione di  $\mathbb{N}^+$ , in quanto l'unione degli elementi della famiglia riproduce  $\mathbb{N}^+$ , ma l'intersezione a due a due non è vuota perché  $2 \in A \wedge 2 \in B$ .

## 1.6 Relazioni binarie

**Definizione 1.8.** Siano  $A$  e  $B$  insiemi non vuoti. Chiamiamo relazione (binaria) tra  $A$  e  $B$  un qualunque sottoinsieme,  $\mathcal{R}$ , del prodotto cartesiano  $A \times B$ . Se  $A = B$  la relazione è detta relazione in  $A$ .

Se  $\mathcal{R}$  è una relazione e  $(a, b) \in \mathcal{R}$ , scriveremo  $a\mathcal{R}b$  e diremo che  $a$  è in relazione con  $b$ . Trattandosi di un insieme, la relazione potrà essere data sia specificando l'insieme che assegnando una proprietà caratteristica che individui gli elementi della relazione, cioè le coppie  $(a, b)$  tali che  $a$  sia in relazione con  $b$ . In sostanza una relazione è un "legame" tra due insiemi (o all'interno di uno stesso insieme) che collega, mette in relazione appunto, gli elementi a due a due.

*Esempio.* La relazione “ $\leq$ ” è una relazione in  $\mathbb{R}$ , cioè è un sottoinsieme di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Trattandosi di un sottoinsieme del piano, usando un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (monometrico) potremo costruirne una semplice rappresentazione grafica.



**Figura 1.1** *Le relazione “ $\leq$ ”*

*Esempio.* “Essere parallelo” è una relazione nell’insieme di tutte le rette dello spazio.

**Proprietà delle relazioni**

Le relazioni su un insieme  $A$  possono godere di alcune proprietà: ne elenchiamo quelle che più ci interessano.

*Proprietà riflessiva*  $\forall x \in A \ x \mathcal{R}x$ , ovvero “ogni elemento è in relazione con se stesso”. Un esempio è fornito dalla relazione di parallelismo tra le rette dello spazio:  $r \parallel r$  è vera per ogni retta  $r$  dello spazio.

*Proprietà simmetrica*  $\forall x, y \in A \ x \mathcal{R}y \Rightarrow y \mathcal{R}x$ , ovvero “se  $x$  è in relazione con  $y$ , anche  $y$  è in relazione con  $x$ ”. Un esempio è ancora fornito dalla relazione di parallelismo prima citata: se  $r \parallel s$ , allora  $s \parallel r$ .

*Proprietà antisimmetrica*  $\forall x, y \in A \ x \mathcal{R}y \wedge y \mathcal{R}x \Rightarrow x = y$ , ovvero “se  $x$  è in relazione con  $y$  e  $y$  è in relazione con  $x$ ,  $x$  e  $y$  sono uguali”. Un esempio è fornito dalla relazione  $\leq$ : se  $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ .

*Proprietà transitiva*  $\forall x, y, z \in A \ x \mathcal{R}y \wedge y \mathcal{R}z \Rightarrow x \mathcal{R}z$ , ovvero se  $x$  è in relazione con  $y$  e  $y$  è in relazione con  $z$ , allora  $x$  è in relazione con  $z$ . Esempi sono forniti dalle relazioni di parallelismo e  $\leq$  prima citate.

**Relazioni di equivalenza**

Un primo tipo di relazioni molto importante nelle applicazioni è quello delle relazioni di equivalenza.

**Definizione 1.9.** *Sia  $A$  un insieme non vuoto e  $\mathcal{R}$  una relazione in  $A$ .  $\mathcal{R}$  è detta una relazione di equivalenza se gode delle proprietà*

- *riflessiva,*
- *simmetrica,*
- *transitiva.*

*Esempio.* La relazione di parallelismo tra rette dello spazio è di equivalenza.

Se in un insieme  $A$  è definita una relazione di equivalenza  $\mathcal{R}$  è possibile costruire una speciale famiglia di sottoinsiemi di  $A$ : per ogni  $x \in A$  si definisce

$$[x] \stackrel{\text{def}}{=} \{ y \in A \mid x \mathcal{R}y \}.$$

Non è difficile provare (e lo si lascia per esercizio) che la famiglia delle classi di equivalenza costituisce una partizione di  $A$  stesso. Questa famiglia prende il nome di *insieme quoziente* di  $A$  rispetto alla relazione di equivalenza  $\mathcal{R}$ . In molte situazioni queste classi di equivalenza prendono nomi speciali, come risulta dagli esempi che seguono.

*Esempi.*

- Nell'insieme delle rette dello spazio dove si è introdotta la relazione di parallelismo, le classi di equivalenza prendono il nome di *direzioni*.
- Nell'insieme dei piani dello spazio dove si è introdotta la relazione di parallelismo, le classi di equivalenza prendono il nome di *giaciture*.

Spesso le relazioni di equivalenza sono indicate con il simbolo  $\sim$ .

### Un esempio importante di relazione di equivalenza: i vettori

In generale, nella geometria elementare un segmento  $AB$  è introdotto come la parte di retta compresa tra i due punti  $A$  e  $B$  fissati su di essa, senza specificare un "ordine" tra gli estremi  $A$  e  $B$ : in sostanza  $AB$  e  $BA$  sono lo stesso segmento. Avremo però bisogno nel seguito del concetto di *segmento orientato*, cioè di parte di retta che collega un *primo* estremo a un *secondo* estremo.

**Definizione 1.10.** *Assegnati, nello spazio, due punti  $A$  e  $B$ , si dice segmento orientato il segmento, indicato con  $\overrightarrow{AB}$ , avente quale primo estremo (detto anche punto di applicazione)  $A$  e quale secondo estremo  $B$ .*

Le caratteristiche di un segmento orientato  $\overrightarrow{AB}$  sono:

- *lunghezza*: è la lunghezza del segmento  $AB$ , rispetto a una fissata unità di misura; la misura del segmento si indica di solito  $\overline{AB}$ ;
- *direzione*: è la direzione della retta alla quale appartiene il segmento  $AB$ ; due segmenti orientati hanno dunque la stessa direzione se appartengono alla stessa retta o a rette parallele;
- *verso*: corrisponde all'ordine con cui vengono considerati gli estremi di  $AB$ ; su  $AB$  possono infatti essere fissati due versi tra loro opposti: quello in cui  $A$  precede  $B$  (e si ottiene allora il segmento orientato  $\overrightarrow{AB}$ ) e quello in cui  $B$  precede  $A$  (e si ottiene allora il segmento orientato  $\overrightarrow{BA}$ ).
- *punto di applicazione*: corrisponde a quello che abbiamo chiamato primo punto tra  $A$  e  $B$ .

**Definizione 1.11.** *Due segmenti orientati si dicono equipollenti se hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso.*

L'equipollenza tra segmenti orientati è una relazione di equivalenza, in quanto gode delle tre proprietà:

- *riflessiva*: ogni segmento orientato è equipollente a se stesso,
- *simmetrica*: se un segmento orientato  $\overrightarrow{AB}$  è equipollente al segmento orientato  $\overrightarrow{CD}$ , allora anche  $\overrightarrow{CD}$  è equipollente ad  $\overrightarrow{AB}$ ;
- *transitiva*: se un segmento orientato  $\overrightarrow{AB}$  è equipollente al segmento orientato  $\overrightarrow{CD}$  e quest'ultimo è equipollente al segmento orientato  $\overrightarrow{EF}$ , allora  $\overrightarrow{AB}$  è equipollente a  $\overrightarrow{EF}$ .

Si noti, in sostanza, che due segmenti orientati sono equipollenti se hanno in comune le prime tre delle quattro proprietà elencate sopra: l'unica cosa che *non* si richiede è che abbiano lo stesso punto di applicazione.

Siccome questa relazione è di equivalenza, ripartisce l'insieme dei segmenti orientati in classi.

**Definizione 1.12.** *Si dice vettore dello spazio una classe di equivalenza individuata nell'insieme dei segmenti orientati dello spazio dalla relazione di equipollenza.*

I vettori si indicano con uno dei simboli

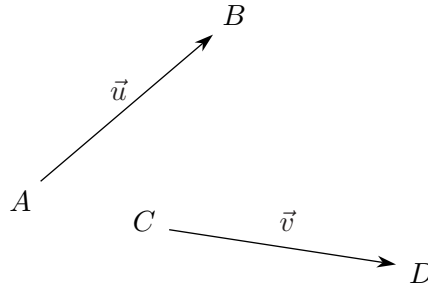
$$(1.12) \quad \vec{u} \quad , \quad \mathbf{u} \quad , \quad \overline{\mathbf{u}} \quad :$$

in questo testo useremo abitualmente il primo.



Un vettore è dunque un insieme di (infiniti) segmenti orientati, tra di loro equipollenti, cioè aventi stessa lunghezza, stessa direzione e stesso verso: potremo dire che un vettore è *caratterizzato* da lunghezza (o modulo), direzione e verso.

Si noti che un vettore *non* è un segmento orientato, quindi *non* si dovrebbero usare scritture del tipo  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ . Poichè però in realtà un vettore è univocamente individuato da uno dei segmenti orientati della sua classe di equivalenza, potremo, anche se con un certo abuso di linguaggio, usare scritture del tipo indicato e utilizzare grafici come quello seguente.



**Figura 1.2** Rappresentazione grafica di vettori

### Relazioni d'ordine

Un secondo tipo di relazioni, importante per le applicazioni che ne faremo, è quello delle relazioni d'ordine.

**Definizione 1.13.** Sia  $A$  un insieme non vuoto e  $\mathcal{R}$  una relazione in  $A$ .  $\mathcal{R}$  è detta una relazione d'ordine se gode delle proprietà

- riflessiva,
- antisimmetrica,
- transitiva.

*Esempi.*

- Se  $\mathcal{P}(A)$  è l'insieme delle parti di un insieme  $A$ , la relazione  $\subseteq$  è una relazione d'ordine.
- Negli insiemi  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  la relazione  $\leq$  è d'ordine.

Le relazioni d'ordine sono di solito indicate con simboli del tipo  $\preceq$ : la scrittura  $a \preceq b$  si legge *a precede b* o anche *b segue a*. In una relazione d'ordine indicata con  $\preceq$ , per indicare che *b* segue *a* si scrive anche  $b \succ a$ .

È evidente che se  $A$  è un insieme ordinato con la relazione  $\preceq$ , ogni suo sottoinsieme è ancora ordinato con la stessa relazione "ristretta" al sottoinsieme. Useremo continuamente questo fatto.

Una relazione d'ordine si dice *totale* se dati due elementi  $a$  e  $b$ , accade sempre che  $a \preceq b \vee b \preceq a$ : in altri termini una relazione d'ordine è totale se due elementi qualunque sono sempre confrontabili.

*Esempi.*

- Se  $A$  è un insieme con un solo elemento, la relazione  $\subseteq$  in  $\mathcal{P}(A)$  è d'ordine totale.
- Se  $A$  è un insieme con più di un elemento, la relazione  $\subseteq$  in  $\mathcal{P}(A)$  non è d'ordine totale. Per esempio se  $A = \{a, b\}$  si ha  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$  ed è chiaro che  $\{a\}$  non è contenuto né contiene  $\{b\}$ .
- La relazione  $\leq$  negli insiemi numerici sopra citati è d'ordine totale.

Una relazione d'ordine che non sia d'ordine totale si dice d'ordine *parziale*.

**Definizione 1.14.** Sia  $A$  un insieme ordinato con la relazione  $\preceq$ . Se esiste un elemento  $m \in A$  tale che  $m \preceq x \forall x \in A$ , allora  $m$  si dice il minimo di  $A$ . Analogamente se esiste un elemento  $M \in A$  tale che  $x \preceq M \forall x \in A$ , allora  $M$  si dice il massimo di  $A$ .

L'articolo determinativo usato sia davanti al minimo che al massimo è giustificato dal seguente teorema che ne garantisce l'unicità.

**Teorema 1.15.** Se un insieme ordinato ha minimo e/o massimo, essi sono unici.

*Dimostrazione.* Se  $m_1$  ed  $m_2$  sono due minimi si deve avere

$$(m_1 \preceq m_2) \wedge (m_2 \preceq m_1),$$

da cui  $m_1 = m_2$ , per la proprietà antisimmetrica. Analogo discorso per il massimo.  $\square$

*Esempi.*

- Nell'insieme delle parti di un dato insieme  $A$ , l'insieme vuoto è sempre il minimo e l'insieme  $A$  stesso è sempre il massimo rispetto alla relazione di inclusione tra insiemi  $\subseteq$ .
- L'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$  ha lo zero come minimo e non ha massimo, rispetto all'ordine usuale.
- L'insieme degli interi non ha né massimo né minimo rispetto all'ordine usuale.

Come mostrano gli esempi appena considerati un insieme può tranquillamente non avere massimo e/o minimo. Per questo motivo si “inventa” un surrogato del massimo e del minimo che gioca un ruolo simile, ma ovviamente non identico. Purtroppo nemmeno questo surrogato esiste sempre, come vedremo.

**Definizione 1.16.** Sia  $A$  un insieme ordinato con la relazione  $\preceq$  e  $B$  un sottoinsieme di  $A$  (eventualmente coincidente con  $A$  stesso). Se esiste un elemento  $l \in A$  tale che  $l \preceq x \forall x \in B$ ,  $l$  si dice un minorante o una limitazione inferiore per  $B$ .

Analogamente se esiste un elemento  $L \in A$  tale che  $x \preceq L \forall x \in B$ ,  $L$  si dice un maggiorante o una limitazione superiore per  $B$ .

Un sottoinsieme  $B$  che abbia maggioranti si dice superiormente limitato, uno che abbia minoranti si dice inferiormente limitato. Se il sottoinsieme ha sia maggioranti che minoranti si dice semplicemente limitato.

È ovvio, considerando il caso  $B = A$ , che l'insieme  $A$  stesso può avere come maggioranti solo l'eventuale massimo e come minoranti solo l'eventuale minimo.

Per un generico sottoinsieme  $B$  possiamo considerare l'insieme dei maggioranti e l'insieme dei minoranti (che potrebbero anche essere vuoti). Ha interesse sapere se questi due insiemi hanno, oppure no, minimo (il primo) e massimo (il secondo).

**Definizione 1.17.** Sia  $A$  un insieme ordinato con la relazione  $\preceq$  e  $B$  un sottoinsieme di  $A$ . Se l'insieme dei maggioranti di  $B$  ha un minimo, esso si chiama l'estremo superiore di  $B$  e si indica con  $\sup B$ ; se l'insieme dei minoranti ha un massimo esso si chiama l'estremo inferiore di  $B$  e si indica con  $\inf B$ .

Come già fatto con il massimo e il minimo si può osservare che non ci può essere più di un estremo superiore (o inferiore).

*Esempi.*

- Sia  $B = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 4 \}$ . Allora  $\sup B = 2$  e  $\inf B = -2$ .

- Sia  $B = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \vee (x \geq 0 \wedge x^2 < 2) \}$ . Allora  $\inf B$  non può esistere perché  $B$  non è inferiormente limitato, e non esiste nemmeno  $\sup B$ , nonostante  $B$  abbia ovviamente dei maggioranti. L'esistenza di sottoinsiemi dei razionali che, pur essendo superiormente limitati, non hanno estremo superiore è un grave “handicap” dell'insieme dei razionali, ed è per questo che si è costretti a introdurre l'insieme dei reali, dove le cose vanno in maniera completamente diversa.

## 1.7 Numeri

Gli “oggetti base” su cui opera la matematica sono i numeri. Gli insiemi numerici che useremo sono, come già citato,

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}.$$

La natura di questo corso non ci consente una trattazione dettagliata delle proprietà di questi insiemi, che riterremo sostanzialmente noti dalla scuola media superiore. Richiameremo solo alcune delle nozioni più significative, cominciando con il “presentare” questi insiemi.

- $\mathbb{N}$  è l'insieme dei numeri *naturali* che, come diceva Leopold Kronecker (1823-1891), possono essere considerati un dono di Dio: “Dio fece i numeri naturali; tutto il resto è opera dell'uomo”. Per noi l'insieme dei numeri naturali è:

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \dots, n, \dots \}.$$

L'insieme dei numeri naturali ha un minimo elemento (lo 0) e non ha un massimo elemento. Anche un qualunque sottoinsieme dei numeri naturali ha un minimo elemento.

- $\mathbb{Z}$  (il simbolo usato è legato alla parola tedesca *zahl*, *numero*, *cifra*) è l'insieme dei numeri *interi*, ovvero, almeno a livello molto intuitivo, dei “numeri naturali con segno” (attenzione però al fatto che  $+0 = -0 = 0!$ ):

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}.$$

Proprietà comune ai naturali e agli interi è che ogni numero ha un *successivo*.

- $\mathbb{Q}$  (il simbolo usato è dovuto al fatto che si tratta, sostanzialmente, di quozienti, o rapporti, *ratio* in latino) è l'insieme dei numeri *razionali*, ovvero delle *frazioni* con numeratore e denominatore interi, e denominatore diverso da zero. Per essere precisi, per ottenere i numeri razionali nell'insieme delle frazioni si introduce una opportuna relazione di equivalenza che “identifica” le frazioni che, ridotte ai minimi termini, sono uguali. Si può anche pensare di attribuire il segno solo al numeratore, ritenendo che il denominatore sia un numero naturale (diverso da zero):

$$\mathbb{Q} = \{ m/n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \}.$$

I numeri razionali si possono anche scrivere come *numeri decimali*, finiti o periodici. Una delle novità sostanziali dell'insieme dei razionali rispetto a quello degli interi è il fatto che non si può più parlare di *successivo* di un numero, anzi, tra due razionali qualsiasi esiste sempre (almeno) un altro razionale (e quindi infiniti):

$$\text{se } a = \frac{m}{n} \text{ e } b = \frac{p}{q}, \text{ allora il numero } c = \frac{a+b}{2} \text{ è compreso tra } a \text{ e } b.$$

- $\mathbb{R}$  è l'insieme dei numeri *reali*. Un'introduzione rigorosa di questo insieme di numeri esula dagli scopi di questo corso. Possiamo, almeno a livello elementare, pensare a questi numeri come all'insieme di tutti gli interi, le frazioni, i radicali, i numeri come  $\pi$ , ecc. Potremmo anche pensarli come l'insieme di tutti gli allineamenti decimali, finiti, illimitati periodici

e illimitati non periodici, anche se questo modo di introdurre i reali si scontra con grosse difficoltà quando si devono eseguire le operazioni (come si possono sommare, o peggio ancora moltiplicare, due allineamenti illimitati, se devo cominciare “all’estrema destra”, e tenere conto di tutti i riporti?).

A partire dall’insieme dei naturali, questi insiemi numerici, nell’ordine in cui sono stati presentati, sono via via sempre più grandi, nel senso che

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Comune a tutti questi insiemi è la possibilità di eseguire le operazioni di addizione e moltiplicazione, con proprietà via via sempre più soddisfacenti, come per esempio il fatto che in  $\mathbb{N}$  non si può sempre fare la sottrazione, mentre in  $\mathbb{Z}$  e successivi sì, in  $\mathbb{Z}$  non si può sempre fare la divisione, mentre in  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  si (tranne per zero, ovviamente!).

Ci interessa comunque trattare con un po’ più di dettaglio una proprietà che sarà utilizzata spesso in seguito e che è alla base di molte dimostrazioni e costruzioni, anche nel campo delle applicazioni informatiche.

### 1.7.1 Il principio di induzione nei naturali

Ci sono due possibili formulazioni che ci interessano di questo principio.

– *Prima formulazione:* Sia  $A$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{N}$  che gode delle seguenti proprietà:

1. il numero 0 appartiene ad  $A$ ;
2. se  $n \in A$  anche  $n + 1 \in A$ .

Allora  $A$  coincide con  $\mathbb{N}$ .

Se la prima condizione del teorema è sostituita da  $(0 <) m \in A$ , allora  $A$  coincide con il sottoinsieme di  $\mathbb{N}$  costituito da tutti i numeri maggiori o uguali a  $m$ .

– *Seconda formulazione:* Supponiamo che ad ogni numero naturale sia associata una proposizione  $\mathcal{P}(n)$ . Se

1.  $\mathcal{P}(0)$  è vera;
2. l’essere vera  $\mathcal{P}(n)$  implica che è vera  $\mathcal{P}(n + 1)$ ;

allora  $\mathcal{P}(n)$  è vera per ogni  $n$ .

Se la prima condizione del teorema è sostituita da  $\mathcal{P}(m)$ ,  $m > 0$  è vera, allora  $\mathcal{P}(n)$  è vera per tutti i numeri maggiori o uguali a  $m$ .

Su questa idea sono basate anche le definizioni ricorsive<sup>(6)</sup>, o induttive, per le quali proponiamo solo un esempio, precisamente una possibile definizione della potenza in  $\mathbb{N}$ .

**Definizione 1.18.** *Sia  $m$  un naturale maggiore di 0. Allora  $m^n$  è definito come segue:*

$$m^0 = 1, \quad m^{n+1} = m \times m^n.$$

È abbastanza evidente che, in questo modo, si è definito  $a^n$  per ogni naturale  $n$ .

*Esempio.* Per dimostrare che si ha

$$(1.13) \quad \mathcal{P}(n) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

si può procedere nel seguente modo:

<sup>6</sup>Molto usate nei programmi informatici.

1. se  $n = 1$  la (1.13) è banalmente vera:  $\sum_{i=1}^1 i = \frac{1 \cdot (1 + 1)}{2} = 1$
2. supposta vera la (1.13) in corrispondenza di  $n$ , vediamo che cosa succede se al posto di  $n$  mettiamo  $n + 1$ :

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^n i + (n + 1) = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + (n + 1) = \frac{n \cdot (n + 1) + 2(n + 1)}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2},$$

che è proprio quello che ci serve.

Un modo per rendere evidente il senso del principio di induzione è quello di pensare a una fila di tessere di domino, disposte verticalmente a una distanza minore della loro altezza: se si dà un colpo ad una tessera (la terza nella figura) in modo da farla cadere, essa farà cadere la quarta, quest'ultima farà cadere la quinta e così via. Si noti che è indispensabile che la distanza tra le tessere sia minore della loro altezza, solo così la caduta di una tessera provoca quella della successiva. Naturalmente nulla succede fin quando non si fa cadere una prima tessera. Nel principio di induzione succede esattamente la stessa cosa: se la validità di una proposizione per un certo  $n$  implica la validità di quella relativa al successivo valore di  $n$ , e se ce n'è una che è vera, saranno vere tutte le successive.

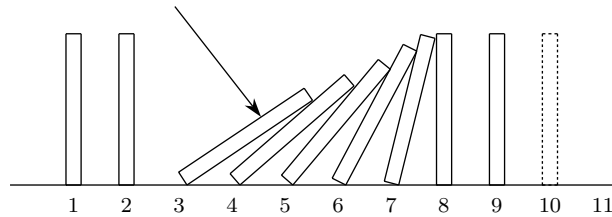


Figura 1.3 Principio di induzione e tessere del domino

## 1.8 Intervalli di numeri reali

Alcuni sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali sono particolarmente importanti nell'analisi. Ne consideriamo la definizione e le proprietà in questo paragrafo.

**Definizione 1.19.** *Dati due numeri reali  $a$  e  $b$ , con  $a < b$ , si chiamano intervalli, con la specificazione a fianco segnata, i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ .*

$]a, b[$	$\{ x \mid a < x < b \}$	<i>intervallo limitato aperto</i>
$[a, b]$	$\{ x \mid a \leq x \leq b \}$	<i>intervallo limitato chiuso</i>
$[a, b[$	$\{ x \mid a \leq x < b \}$	<i>intervallo limitato chiuso a sinistra e aperto a destra</i>
$]a, b]$	$\{ x \mid a < x \leq b \}$	<i>intervallo limitato aperto a sinistra e chiuso a destra</i>
$]a, +\infty[$	$\{ x \mid x > a \}$	<i>intervallo superiormente illimitato aperto</i>
$[a, +\infty[$	$\{ x \mid x \geq a \}$	<i>intervallo superiormente illimitato chiuso</i>
$] - \infty, a[$	$\{ x \mid x < a \}$	<i>intervallo inferiormente illimitato aperto</i>
$] - \infty, a]$	$\{ x \mid x \leq a \}$	<i>intervallo inferiormente illimitato chiuso</i>

*I numeri reali  $a$  e  $b$ , oppure soltanto  $a$  o soltanto  $b$ , si chiamano estremi dell'intervallo. Gli intervalli limitati si chiamano anche segmenti, quelli illimitati anche semirette.*

In sostanza gli intervalli sono caratterizzati dalla proprietà che, se contengono due numeri reali, contengono tutti i numeri compresi tra quei due.

Anche per l'intero insieme  $\mathbb{R}$  si usa la scrittura  $] - \infty, +\infty[$  e questo intervallo si dice semplicemente illimitato e si considera sia aperto che chiuso.

Nel caso che  $a = b$  l'intervallo chiuso  $[a, a]$  si riduce solo a un punto e si può chiamare intervallo degenere. A volte anche l'insieme vuoto si considera come un intervallo a cui si dà il nome di *intervallo nullo*.

Per gli intervalli limitati, al punto

$$x_0 = \frac{a + b}{2}$$

si dà il nome di *centro* e al numero

$$\delta = b - x_0 = x_0 - a$$

si dà il nome di *raggio* o *semiampiezza*. L'intervallo (aperto) di centro  $x_0$  e raggio  $\delta$  è allora

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

Ogni punto di un intervallo che non coincida con gli (eventuali) estremi si dice *interno* all'intervallo.

## 1.9 Funzioni

Tra tutte le relazioni che possono intercorrere tra due insiemi, hanno un interesse cruciale le *funzioni*, in particolare le funzioni che collegano tra di loro insiemi di numeri reali. Vista l'importanza del concetto diamo una definizione esplicita di funzione, che riassume quelle che sono le proprietà che ci interesseranno.

**Definizione 1.20.** *Dati due insiemi  $A$  e  $B$  (che per noi saranno sempre due insiemi di numeri reali), si dice funzione di  $A$  in  $B$  una qualunque legge che faccia corrispondere a ogni elemento di  $A$  uno ed un solo elemento di  $B$ .*

*L'insieme  $A$  è detto dominio della funzione, l'insieme  $B$  è detto codominio. Se  $x$  è un elemento dell'insieme  $A$  e  $y$  è l'unico elemento di  $B$  che corrisponde ad  $x$ , si dice che  $y$  è funzione di  $x$  e si scrive  $y = f(x)$  (leggi: "y uguale a effe di x").*

La notazione più completa per le funzioni è la seguente:

$$f: A \rightarrow B, x \mapsto f(x),$$

ma spesso si scrive solo

$$x \mapsto f(x),$$

se gli insiemi  $A$  e  $B$  sono già stati precisati o sono chiari dal contesto. Si può anche dire semplicemente *la funzione  $y = f(x)$* , anche se i puristi potrebbero storcere il naso.

*Esempio.* Se  $A$  e  $B$  sono l'insieme dei numeri reali, si può considerare la funzione che a ogni numero reale  $x$  fa corrispondere il suo quadrato. In questo caso si dovrebbe scrivere

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

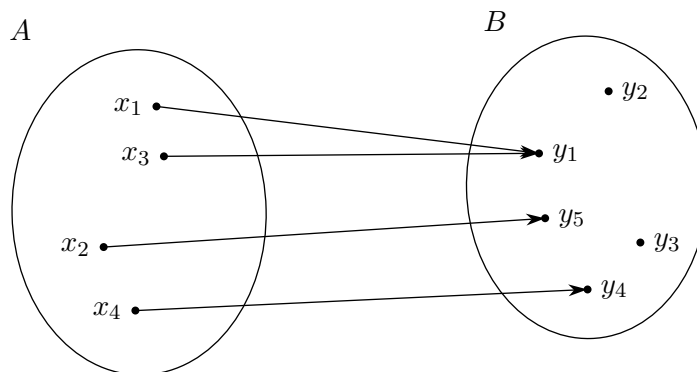
ma si può scrivere anche semplicemente

$$x \mapsto x^2$$

oppure (e noi lo faremo sistematicamente)

$$y = x^2.$$

Per visualizzare le funzioni si usano spesso dei diagrammi a frecce, come quello che segue.



**Figura 1.4** Diagramma “a frecce” per visualizzare una funzione (tra insiemi finiti)

Si noti che è *obbligatorio* che da *ogni* punto (elemento dell'insieme)  $A$  parta *esattamente* una freccia, mentre sui punti dell'insieme  $B$  possono anche arrivare *più* frecce, oppure *nessuna* freccia. Si potrebbe dire, usando un linguaggio figurato, che  $A$  è l'insieme degli arcieri,  $B$  l'insieme dei bersagli e che ogni arciere ha a disposizione nella propria faretra solo una freccia che è costretto a lanciare, mentre non ci sono limitazioni sui bersagli da colpire: ci possono essere bersagli colpiti da più frecce, e anche bersagli non colpiti da alcuna freccia.

È chiaro che rappresentazioni grafiche come quella appena vista hanno senso solo se gli insiemi in questione sono finiti: in caso contrario si dovrebbero disegnare infinite frecce, cosa chiaramente impossibile.

Si usano anche altri tipi di rappresentazione per le funzioni. Per esempio se si considera la funzione che a ogni numero naturale compreso tra 1 e 5 fa corrispondere la sua metà (funzione che ha come dominio i numeri naturali citati e come codominio i numeri razionali), si può usare una tabella a doppia entrata, in cui nella prima colonna si scrivono i numeri naturali 1, 2, ..., 5 e nella seconda colonna le *corrispondenti* metà di questi numeri.

$x$	$x/2$
1	$1/2$
2	1
3	$3/2$
4	2
5	$5/2$

**Tabella 1.3** Rappresentazione “tabulare” di una funzione

Un altro tipo di rappresentazione è quello dei diagrammi a torta, molto significativo in casi speciali. Consideriamo, ad esempio, un corso universitario dove si sono iscritti 120 alunni, provenienti da varie provincie, come nella tabella che segue:

Gorizia	Pordenone	Treviso	Trieste	Udine
5	70	15	10	20

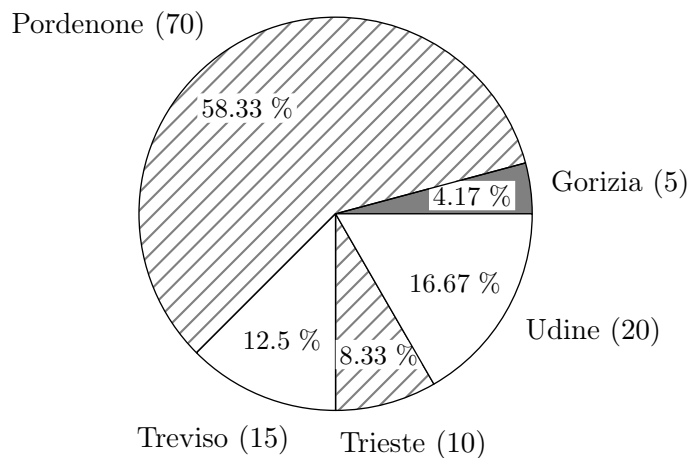
Si comincerà con il calcolare le percentuali relative alle varie provincie:

Gorizia	Pordenone	Treviso	Trieste	Udine
4.17	58.33	12.5	8.33	16.67

Successivamente si calcoleranno le ampiezze delle “fette di torta” da utilizzare per ciascuna provincia, tenendo conto che la torta totale ha un’apertura di  $360^\circ$ :

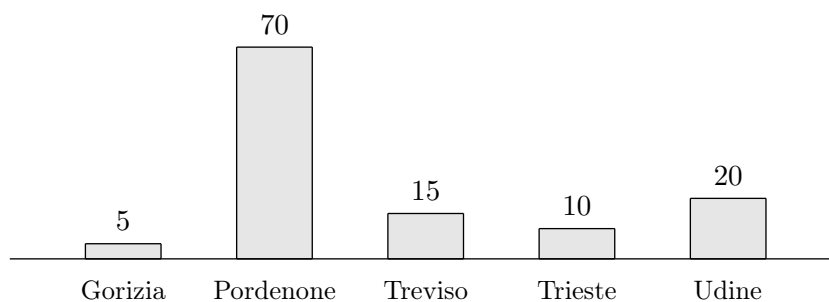
Gorizia	Pordenone	Treviso	Trieste	Udine
15°	210°	45°	30°	60°

Il grafico è a questo punto immediato:



**Figura 1.5** Provenienza degli studenti del Corso . . . , ripartiti per Provincia, diagramma “a torta”

Ancora un'altra possibilità è quella di un diagramma a barre, che proponiamo qui di seguito, senza commenti.



**Figura 1.6** Provenienza degli studenti del Corso . . . , ripartiti per Provincia, diagramma “a barre”

La rappresentazione più conveniente nel caso delle funzioni tra due insiemi di numeri reali è però quella dei diagrammi o grafici cartesiani, in particolare nel caso in cui gli insiemi siano infiniti quando le rappresentazioni precedenti non sono utilizzabili. L'idea è di considerare un piano in cui si sia fissato un sistema di coordinate cartesiane (ortogonali per semplicità)  $Oxy$  e rappresentarvi tutte le coppie  $(x, y)$  in cui  $x$  è un punto (numero) del dominio della funzione e  $y = f(x)$  è il corrispondente valore nel codominio della funzione. Riprendendo in esame l'esempio proposto nella tabella 1.3, dobbiamo rappresentare i punti

$$A = (1, 1/2), B = (2, 1), C = (3, 3/2), D = (4, 2), E = (5, 5/2),$$

ottenendo il grafico che segue.



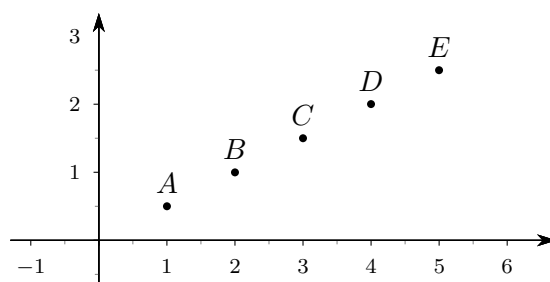


Figura 1.7 Esempio di grafico cartesiano

Il grafico della precedente figura 1.7 è in realtà un grafico a frecce “compattato”: siccome i valori del dominio sono punti dell’asse  $x$  e quelli del codominio punti dell’asse  $y$ , possiamo sempre pensare di tracciare delle frecce che colleghino i punti del dominio con i corrispondenti del codominio, come quelle della figura 1.4, solo che è opportuno che le frecce “passino” per i punti  $A, B, \dots$ :

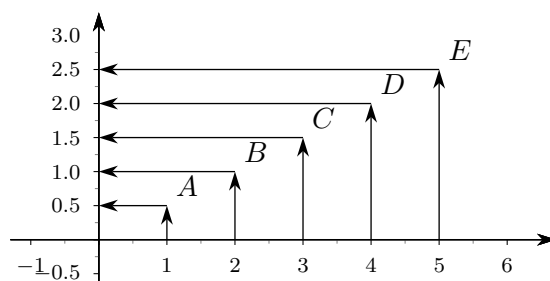
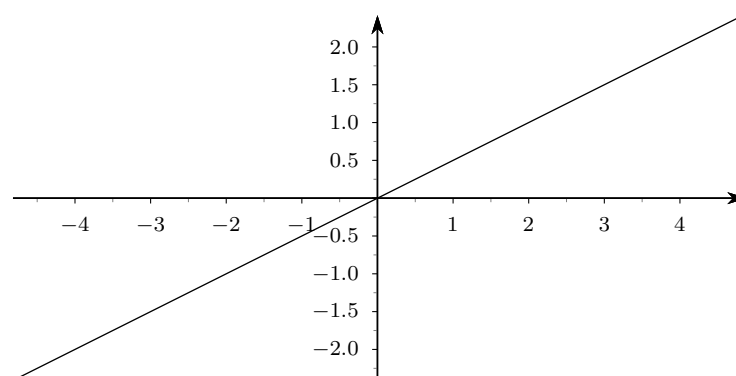


Figura 1.8 Esempio di grafico cartesiano, con frecce

Il grafico 1.7 “compatta” il grafico 1.8 nel senso che ne prende solo gli elementi essenziali, cioè gli “spigoli delle frecce”: è evidente che dalla conoscenza degli spigoli si possono facilmente ricostruire le frecce.

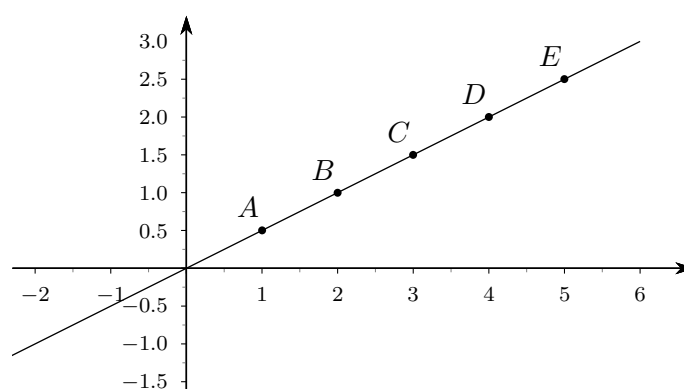
Se si confronta la figura 1.7 con la tabella 1.3, ci si rende immediatamente conto dei notevoli vantaggi che il grafico presenta: da esso si può per esempio capire, “a colpo d’occhio”, che al crescere di  $x$  nel dominio la corrispondente  $y$  del codominio cresce, e che tale crescita è *costante*. La cosa diventa ancora più significativa se si vuole considerare la funzione che a ogni numero reale  $x$  faccia corrispondere la sua metà: a differenza di quanto succedeva con la funzione rappresentata nella tabella 1.3, questa volta la  $x$  non varia più in un insieme finito e quindi una rappresentazione tabulare non ha alcun senso<sup>(7)</sup>. Un diagramma cartesiano è decisamente più significativo:

<sup>7</sup>Si noti comunque che la regola (legge) che collega la  $x$  alla  $y$  è la stessa del caso precedente: per assegnare una funzione *non* è sufficiente assegnare la regola di calcolo, occorre anche fissare il dominio e il codominio.



**Figura 1.9** Grafico della funzione  $y = x/2$

Naturalmente il diagramma 1.9 contiene anche i punti già rappresentati nel diagramma 1.7:



**Figura 1.10** Grafico della funzione  $y = x/2$ , con evidenziati alcuni punti

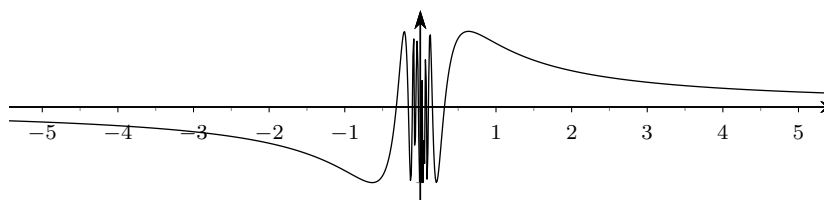
ma contiene anche infiniti altri punti. Anche se non è chiaramente possibile rappresentare nel grafico *tutte* le coppie  $(x, y) = (x, f(x))$  che visualizzano l'andamento della funzione, tuttavia la parte tracciata è sufficiente a rendere evidenti quasi tutte le proprietà che interessano.

Una buona parte di questo corso sarà dedicata proprio allo studio di strategie adatte a evidenziare le caratteristiche essenziali di una funzione (avente come dominio e codominio sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali) e a tracciarne un grafico indicativo. Un grande aiuto in questo senso può essere fornito dai numerosi software dedicati allo scopo<sup>(8)</sup>, ma, come al solito, bisogna tenere conto che il computer è *una macchina finita* e quindi non può risolvere tutti i problemi. A questo proposito proponiamo un esempio "estremo"<sup>(9)</sup>, precisamente il grafico della funzione

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

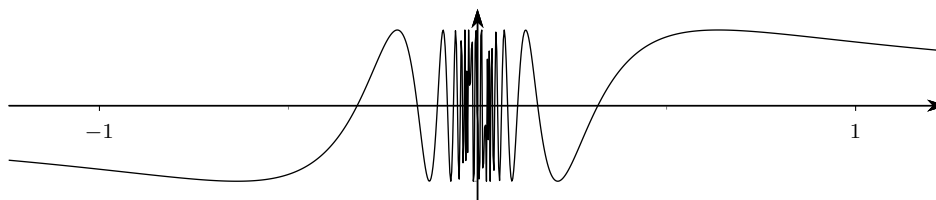
<sup>8</sup>Tra i software commerciali segnaliamo *Mathematica* e *Maple*, due pacchetti estremamente sofisticati e complessi. Tra i software non commerciali segnaliamo *Maxima* (molto simile a *Mathematica*™ anche se non ne possiede tutte le potenzialità) e *Geogebra*. Riteniamo quest'ultimo particolarmente adatto per questo corso e segnaliamo che la maggior parte dei grafici contenuti in questo testo sono ottenuti proprio con *Geogebra*.

<sup>9</sup>L'esempio richiede la conoscenza di elementi di trigonometria: chi non li possiede non si preoccupi, ne parleremo nel seguito.

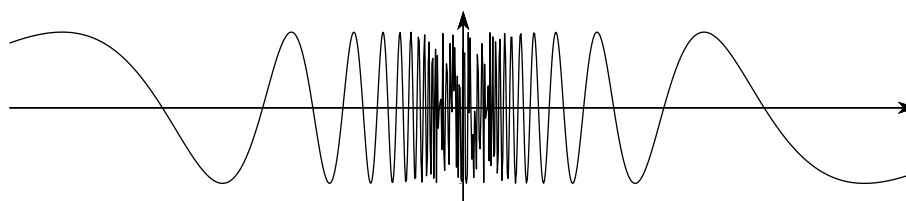


**Figura 1.11** Grafico di  $f(x) = \sin 1/x$

È chiaro che, per valori di  $x$  prossimi allo zero, questo grafico è poco significativo. Purtroppo nemmeno zoomate (in orizzontale) migliorano granché la situazione, come mostrano le due successive figure.

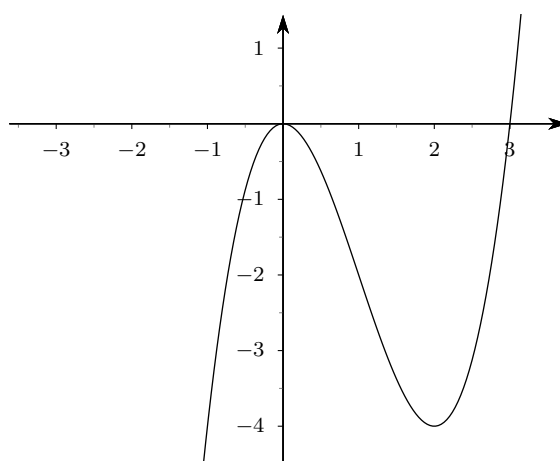


**Figura 1.12** Grafico di  $f(x) = \sin 1/x$ , con uno zoom sull'asse delle  $x$



**Figura 1.13** Grafico di  $f(x) = \sin 1/x$ , con un ulteriore zoom sull'asse delle  $x$

Naturalmente non sempre le cose vanno così male (per fortuna!). Per la funzione  $f(x) = x^3 - 3x^2$ , per esempio, il grafico fornito da un software di calcolo è sufficientemente accurato da contenere con buona accuratezza le informazioni necessarie.

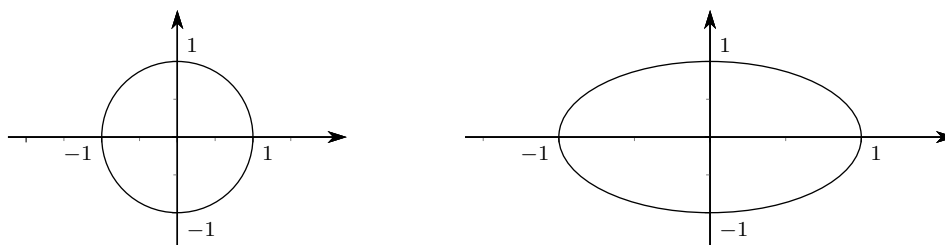


**Figura 1.14** Grafico di  $f(x) = x^3 - 3x^2$

Da questo grafico si vede subito che, al crescere della  $x$  da valori negativi fino allo 0, anche la corrispondente  $y$  cresce (e abbastanza rapidamente) fino a raggiungere il valore 0; successivamente se la  $x$  cresce da 0 a 2, la  $y$  decresce fino a raggiungere il valore  $-4$ , per poi aumentare di nuovo

(e di nuovo abbastanza rapidamente) al crescere di  $x$ .

In tutti i grafici cartesiani che abbiamo fatto, tranne quelli delle figure 1.12 e 1.13, abbiamo usato la stessa unità di misura sui due assi: sistemi cartesiani siffatti sono detti *monometrici*. Di solito però nelle applicazioni la cosa non è possibile, e ne vedremo in seguito i motivi. È opportuno tenere presente che se un sistema cartesiano nel piano non è monometrico, le figure possono essere deformate. Per esempio i due grafici della figura seguente mostrano la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, in due diversi sistemi di coordinate, di cui solo il primo è monometrico.



**Figura 1.15** Circonferenza di centro l'origine e raggio 1, in due diversi sistemi di coordinate, il primo monometrico, il secondo no

## 2 Funzioni elementari

### 2.1 Introduzione

Nel seguito, quando non diversamente precisato, ci occuperemo esclusivamente di funzioni *reali di variabile reale*, ovvero di funzioni in cui il dominio e il codominio sono l'insieme dei numeri reali o un sottoinsieme dell'insieme dei numeri reali. Inoltre, per le funzioni che tratteremo, la legge che associa i valori del dominio (diremo: i valori della *variabile indipendente*) a quelli del codominio (diremo: i valori della *variabile dipendente*) sarà costituita da un insieme di calcoli “matematici” da eseguire sulla variabile indipendente, come negli esempi seguenti:

- $y = x^2 + x^3 - 1$ ;
- $y = \sqrt{x} + x$ ;
- $y = 1/x$ .

In casi come questi, quando non ci sarà possibilità di equivoco e quando non avremo bisogno di ulteriori indicazioni, ci accorderemo *sempre* sulle seguenti convenzioni:

1. il codominio è l'intero insieme dei numeri reali;
2. il dominio è costituito dal massimo sottoinsieme dei numeri reali dove i calcoli da eseguire per passare dalla  $x$  alla  $y$  hanno senso. Chiameremo questo insieme il *dominio naturale* della funzione.

Negli esempi sopra proposti questo dominio naturale è, rispettivamente:

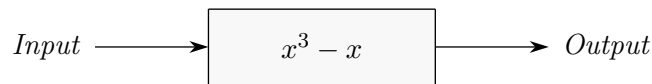
- $\mathbb{R}$ ;
- $x \geq 0$ , ovvero  $[0, +\infty[$ ;
- $x \neq 0$ , ovvero  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , ovvero  $] - \infty, 0[ \cup ] 0, +\infty[$ .

Abbiamo detto che ci occuperemo esclusivamente di funzioni in cui la legge di passaggio da  $x$  a  $y$  è “di natura matematica”. Ciò non significa però che la legge stessa debba essere unica per tutto il dominio: potremo considerare anche funzioni *definite a tratti*, o *in modo composito*, come nell'esempio che segue.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x < -2 \\ 2x + 1, & \text{se } -2 \leq x < 5 \\ x + x^2, & \text{se } x \geq 5 \end{cases} .$$

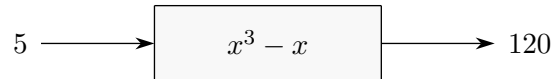
Come abbiamo detto, una funzione può essere pensata come costituita da un insieme di *arcieri* (dominio) che hanno a disposizione una sola freccia nella loro faretra, un insieme di bersagli da colpire (codominio), e una legge che stabilisca quale bersaglio debba colpire ciascun arciere. Esiste una regola ben precisa, valida per ogni funzione, a cui gli arcieri devono sottostare, e cioè il fatto che ogni arciere è costretto a lanciare l'unica freccia che ha a disposizione; al contrario non esiste alcuna limitazione a priori sui bersagli da colpire: ogni funzione stabilisce una propria regola su quali bersagli colpire e da parte di chi.

Un altro modo suggestivo di pensare a una funzione è quella di immaginare una “scatola nera”, piena di rotelline e ingranaggi, dotata di una porta di ingresso (input) e di una porta di uscita (output): se inserisco un elemento del dominio, un dato (un numero reale nei casi che ci interessano), attraverso la porta di ingresso, la funzione esegue delle elaborazioni su questo dato e ci restituisce, in uscita, un risultato. Si veda la figura che segue, relativa alla funzione  $y = x^3 - x$ .



**Figura 2.1** La “funzione”  $x^3 - x$

Se per esempio il dato in ingresso inserito è 5, gli “ingranaggi interni della scatola nera” calcoleranno il cubo di 5 e successivamente ne sottrarranno il numero 5, fornendo 120 come output.



**Figura 2.2** Inserendo il numero 5 la funzione ci restituisce il numero 120

In questo tipo di visualizzazione, il dominio naturale può essere pensato come l’insieme dei numeri reali che sono accettabili come input, senza mandare in tilt gli ingranaggi. Se per esempio la scatola nera è calibrata per calcolare le radici quadrate dei dati in ingresso, appena inserisco un numero negativo, gli ingranaggi si inceppano e non mi viene fornito alcun risultato (sul display di una calcolatrice appare la scritta *MathError* o qualcosa di simile).

## 2.2 Funzioni iniettive, suriettive, biiettive

Tra tutte le possibili funzioni (reali di variabile reale) hanno un particolare interesse le situazioni seguenti:

1. ogni arciera spara la propria freccia su un bersaglio diverso, ovvero ciascun bersaglio è colpito *al più una volta*;
2. ogni bersaglio viene colpito *almeno una volta*;
3. ogni bersaglio viene colpito *esattamente una volta*.

Detto in termini più formali:

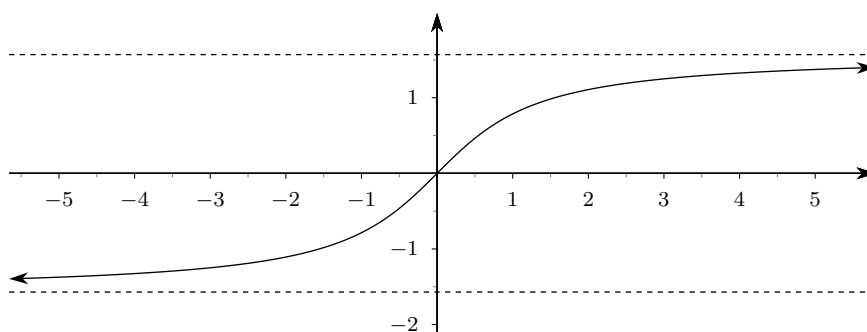
1. punti diversi del dominio hanno immagini diverse;
2. ciascun punto del codominio è immagine di almeno un punto del dominio;
3. ciascun punto del codominio è immagine di un solo punto del dominio.

Diremo *iniettive* le funzioni che soddisfano al primo requisito, *suriettive* quelle che soddisfano al secondo, *biiettive* o *biunivoche* quelle che soddisfano al terzo. Segnaliamo, anche se la cosa è evidente, che il terzo requisito si ottiene quando sono verificati *contemporaneamente* il primo e il secondo.

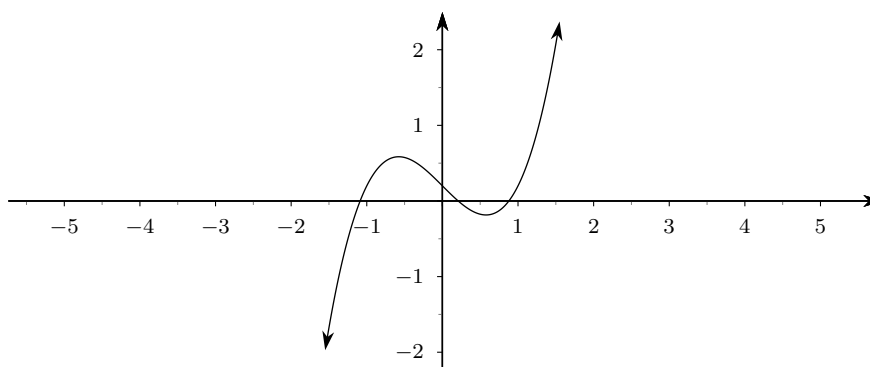
In termini di grafici cartesiani si possono fare le seguenti osservazioni:

1. una funzione è iniettiva se una retta orizzontale (parallela all’asse  $x$ ) qualunque interseca il grafico della funzione al più una volta;
2. una funzione è suriettiva se ogni retta orizzontale (parallela all’asse  $x$ ) interseca il grafico della funzione almeno una volta;
3. una funzione è biunivoca se ogni retta orizzontale (parallela all’asse  $x$ ) interseca il grafico della funzione esattamente una volta.

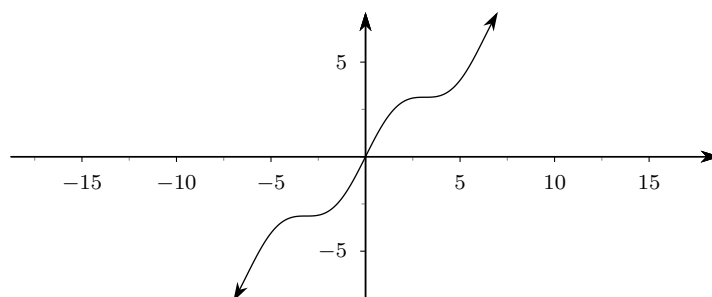
Si vedano i grafici che seguono, dove abbiamo aggiunto delle frecce sulle curve-grafico, per indicare che le stesse proseguono “all’infinito” con le medesime caratteristiche.



**Figura 2.3** Grafico di una funzione iniettiva (ma non suriettiva)



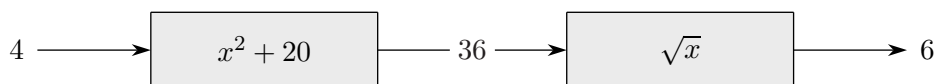
**Figura 2.4** Grafico di una funzione suriettiva (ma non iniettiva)



**Figura 2.5** Grafico di una funzione biunivoca (cioè sia iniettiva che suriettiva)

## 2.3 Funzioni composte

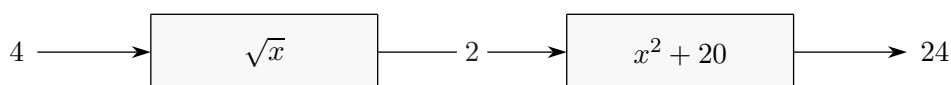
Supponiamo di considerare le funzioni  $f(x) = x^2 + 20$  e  $g(x) = \sqrt{x}$  e immaginiamo di farle agire “in successione”, prima  $f$  e poi  $g$ : dato un  $x$  (per esempio 4) facendo agire  $f$  otteniamo 36; a questo punto immettiamo questo dato come ingresso della funzione  $g$  e otterremo come output finale il numero 6. Nella suggestiva rappresentazione mediante scatole nere è come se l’output della prima scatola non venisse usato immediatamente, ma inserito direttamente nella seconda, la quale invece fornisce l’output finale.



**Figura 2.6** Due funzioni che operano in successione

Potremmo anche pensare, e la cosa sarà molto conveniente, di trascurare il fatto che ci sono *due* scatole nere che operano in successione e immaginare invece di riunire tutti i meccanismi delle due scatole (nella giusta maniera!), ottenendo una nuova scatola che, avendo in ingresso il numero 4, fornisce in uscita direttamente il numero 6. Si, dice, in maniera più formale, che l'unica scatola è la *composta* delle due precedenti, ovvero che la funzione complessiva è la *funzione composta* delle due funzioni  $f$  e  $g$  *nell'ordine*.

È estremamente importante l'ordine in cui le due funzioni operano: se scambiassi il ruolo, facendo agire prima la  $g$  e poi la  $f$ , in corrispondenza del numero 4 otterrei un output completamente diverso, precisamente 24



**Figura 2.7** Le due funzioni della figura 2.6, con l'ordine scambiato

Occorre anche tenere presente che l'output della prima scatola, che diventerà input della seconda, dovrà essere "accettabile" come input, cioè dovrà appartenere al dominio (per noi il dominio naturale) della seconda funzione. Se per esempio la prima funzione fosse  $f(x) = x - 5$  e la seconda  $g(x) = \sqrt{x}$ , è chiaro che il dato 4 in ingresso non sarà accettabile, nel complesso: lo sarebbe se avessi solo la  $f$ , ma non lo è più se l'output di  $f$  deve poi venir inserito come input di  $g$ . In sostanza l'uso di più funzioni in successione può modificare il dominio della funzione iniziale.

Passiamo ora a una definizione formale di questo concetto, di grande importanza applicativa.

**Definizione 2.1.** Siano date due funzioni (reali di variabile reale)

$$f: A \rightarrow B \quad , \quad g: C \rightarrow D.$$

Se  $B \subseteq C$  si può considerare una nuova funzione

$$h: A \rightarrow D,$$

detta funzione composta di  $f$  e  $g$ , che al numero  $x \in A$  faccia corrispondere direttamente il numero  $h(x) = g(f(x)) \in D$  ottenuto calcolando dapprima  $f(x)$  e successivamente l'immagine di questo  $f(x)$  tramite la funzione  $g$ .

La funzione  $h$  si suole indicare con la scrittura

$$g \circ f,$$

che si legge "g composto f".

Si noti, nella scrittura  $g \circ f$ , che  $f$  è la prima funzione che agisce, mentre  $g$  è la seconda funzione. Questo è in accordo con le nostre notazioni: quando scrivo, per una generica funzione,  $f(x)$ , intendo che devo considerare il numero  $x$  e successivamente inserirlo come dato di ingresso nella funzione  $f$ , per ottenere l'opportuno output. Basta pensare, per esempio, a una comune



calcolatrice tascabile con display a una sola riga: se devo calcolare la radice quadrata del numero 4, i tasti da premere sono, nell'ordine, prima quello del 4 e poi quello della radice quadrata (tutto questo è superato nelle calcolatrici con display a due (o più) righe dove posso usare una riga per impostare il calcolo, che poi appare in una nuova riga, dopo aver premuto il tasto *esegui* o simile).

## 2.4 La funzione polinomiale di primo grado

Alcune funzioni “di base” giocano un ruolo molto importante nelle applicazioni e costituiscono i pilastri su cui è costruita la totalità delle funzioni che useremo. La loro importanza risulta evidente se si pensa che per ognuna di esse è previsto un apposito tasto in tutte le calcolatrici scientifiche: funzioni più complesse si ottengono come combinazioni di quei tasti (composizione di funzioni) o mediante l'uso delle operazioni di somma, sottrazione, prodotto e quoziente. Esamineremo qui di seguito le più importanti, incominciando dal caso più semplice, *la funzione polinomiale di primo grado*, definita da

$$f(x) = mx + q, \text{ oppure } y = mx + q.$$

Come è ben noto essa ha come grafico cartesiano una retta (*non* parallela all'asse  $y$ ). Il numero  $m$  (coefficiente della  $x$ ) si chiama il *coefficiente angolare* o *pendenza*, il numero  $q$  si chiama *ordinata all'origine*. Il nome e il significato geometrico di  $q$  sono evidenti: al valore  $x = 0$  (origine) corrisponde l'ordinata  $y = q$ . Per capire il significato di  $m$  consideriamo due esempi: la funzione  $y = 2x + 1$  e la funzione  $y = -2x + 1$

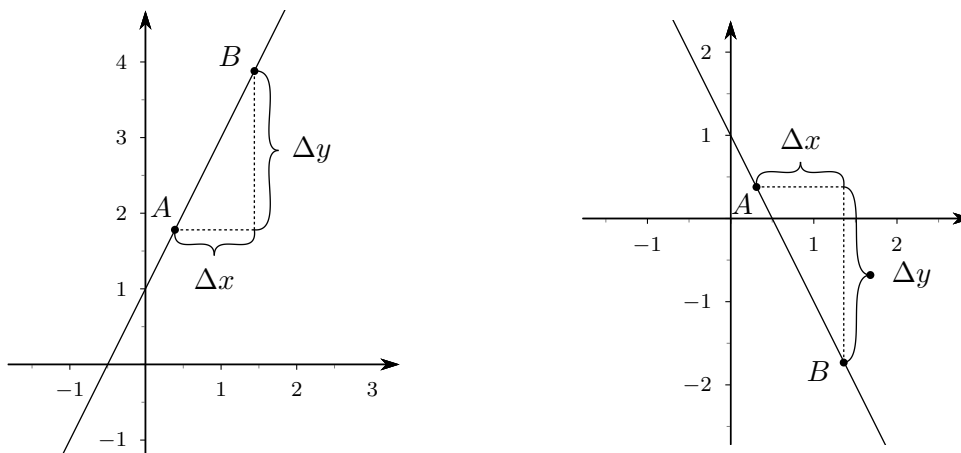


Figura 2.8 Significato geometrico del coefficiente angolare

Se consideriamo due punti  $A$  e  $B$  qualunque sulle rette e indichiamo con  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , rispettivamente, lo spostamento orizzontale (col segno  $+$  se è verso destra,  $-$  se è verso sinistra) e quello verticale (col segno  $+$  se è verso l'alto,  $-$  se è verso il basso) che si ha nel passaggio dal primo al secondo punto, il valore del coefficiente angolare è sempre dato dal rapporto tra  $\Delta y$  e  $\Delta x$ :

$$(2.1) \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Il calcolo di  $\Delta y$  e  $\Delta x$  è immediato, non appena si conoscono le coordinate di  $A$  e  $B$ :

$$\Delta y = y_B - y_A \quad , \quad \Delta x = x_B - x_A.$$

Se si scelgono  $A$  e  $B$  in modo che  $\Delta x = 1$ , allora  $m = \Delta y$ ; se si scelgono invece  $A$  e  $B$  in modo che  $\Delta x = 100$ , allora  $\Delta y = 100m$  e il numero  $100m$  si chiama pendenza percentuale. Le due rette precedenti hanno una pendenza percentuale del  $200\%$  e del  $-200\%$  rispettivamente.

È ovvio che pendenza positiva implica “retta in salita”, pendenza negativa implica “retta in discesa” (procedendo da sinistra a destra naturalmente!).

Due risultati che ci interesseranno sono i seguenti:

1. due rette  $y = m_1x + q_1$  e  $y = m_2x + q_2$  sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare:  $m_1 = m_2$ ;
2. due rette (non orizzontali né verticali)  $y = m_1x + q_1$  e  $y = m_2x + q_2$  sono perpendicolari se e solo se il prodotto dei coefficienti angolari è  $-1$ .

Si noti che più  $m$  è grande, più la retta tende a essere verticale: se la retta potesse essere verticale,  $m$  diventerebbe infinitamente grande in senso positivo ( $+\infty$ ) o negativo ( $-\infty$ ). Le rette verticali *non* possono essere grafici di funzioni, ma dal punto di vista geometrico hanno perfettamente senso e si usa dire che il loro coefficiente angolare “è infinito”. Esse hanno equazione  $x = k$ , in quanto i loro punti hanno tutti la stessa ascissa, ma, giova ripeterlo, *non* sono grafici di funzioni.

Consideriamo ora una retta non orizzontale e l’angolo individuato come nella figura seguente 2.9, angolo che diremo individuato dalla retta e dalla direzione positiva dell’asse  $x$ , nel semipiano delle  $y$  positive.

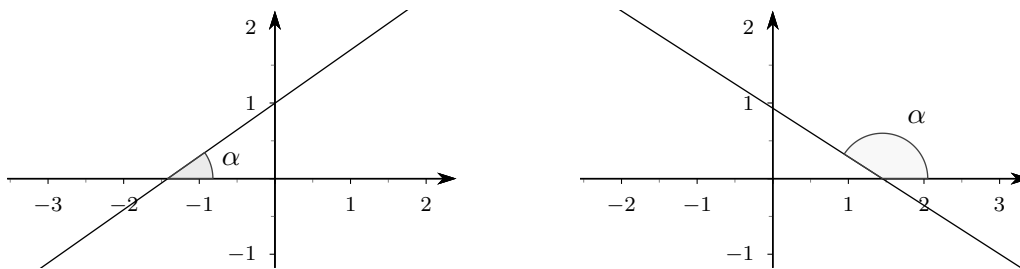


Figura 2.9 Angolo tra una retta e la “direzione positiva” dell’asse  $x$

Se la retta fosse orizzontale, diremo che l’angolo in questione vale 0. È molto importante il fatto che esiste un legame semplice tra questo angolo e il coefficiente angolare della retta, precisamente si ha

$$(2.2) \quad m = \operatorname{tg} \alpha.$$

## 2.5 La funzione polinomiale di secondo grado

La seconda funzione di base che interessa il nostro corso è quella definita da

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ oppure } y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

che chiameremo *funzione polinomiale di secondo grado*.

Anche in questo caso si tratta di una funzione ben nota, che ha come grafico una parabola con *asse verticale*. Le caratteristiche che ci interesseranno sono le seguenti:

1. la parabola ha la concavità verso l’alto (“sorridente”) se  $a > 0$ , ha la concavità verso il basso (“piange”)<sup>(1)</sup> se  $a < 0$ ;

<sup>1</sup>L’origine di questa nomenclatura è chiaramente legata agli smile comunemente usati nel web: 😊 😞.

2. il *vertice* della parabola ha ascissa data da

$$x_V = -\frac{b}{2a},$$

mentre l'ordinata dello stesso può essere ricavata semplicemente per sostituzione nell'equazione della parabola, senza necessità di memorizzare formule particolari;

3. la parabola è simmetrica rispetto al suo asse, cioè alla retta verticale passante per il vertice.

Per ottenere un grafico accurato della parabola occorre determinarne il vertice e, successivamente, alcuni punti; hanno molta importanza nelle applicazioni l'intersezione con l'asse delle  $y$  (che si ottiene semplicemente sostituendo  $x = 0$  nell'equazione) e le eventuali intersezioni con l'asse delle  $x$ , che si ottengono risolvendo l'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

La figura che segue mostra, a titolo d'esempio, il grafico della parabola  $y = x^2 - 3x - 1$ .

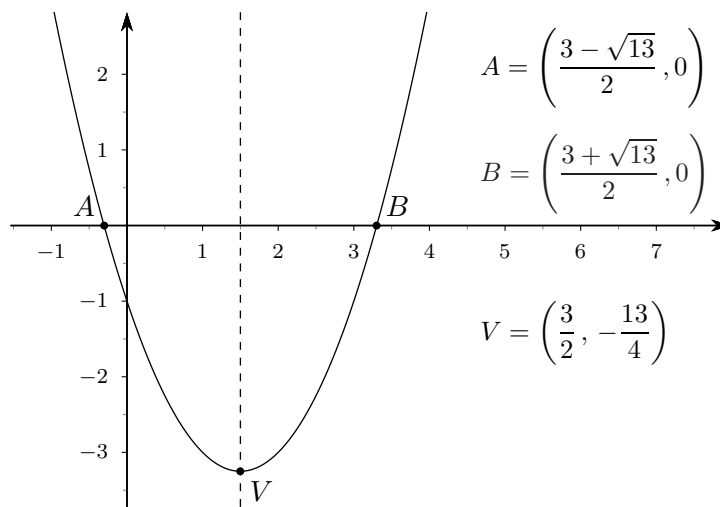


Figura 2.10 Grafico della parabola  $y = x^2 - 3x - 1$

## 2.6 La funzione valore assoluto

Il valore assoluto di un numero reale  $x$ , indicato con  $|x|$ , è definito da

$$(2.3) \quad |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

*Esempi.*

1.  $|-5| = -(-5) = 5$
2.  $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$
3.  $|\pi - 3| = \pi - 3$

Si presti attenzione al fatto che il valore assoluto di un numero reale *non* è il numero stesso privato del segno, espressione del tutto priva di significato in quanto non consideriamo “numeri privi di segno”.

Il grafico della funzione valore assoluto coincide, in base alla definizione, con quello di  $y = x$ , per gli  $x \geq 0$ , e con quello di  $y = -x$ , per gli  $x < 0$ ; si ottiene dunque:

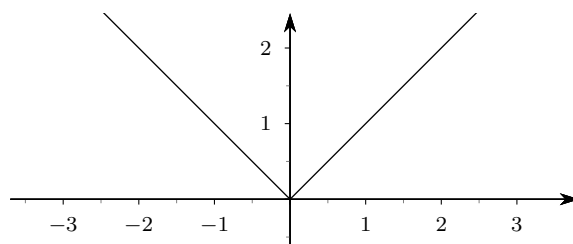


Figura 2.11 Grafico della funzione valore assoluto

## 2.7 La legge di proporzionalità inversa

Le funzioni del tipo

$$y = \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R}$$

sono la rappresentazione grafica di una legge di proporzionalità inversa, in quanto il prodotto tra le variabili  $x$  e  $y$  rimane costantemente uguale a  $k$ . Esse hanno come grafico curve del tipo di seguito rappresentate, rispettivamente quando  $k > 0$  e quando  $k < 0$ . Si tratta di iperboli (equilateri). Si noti che il dominio naturale è costituito da  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , cioè da tutti i reali tranne lo zero.

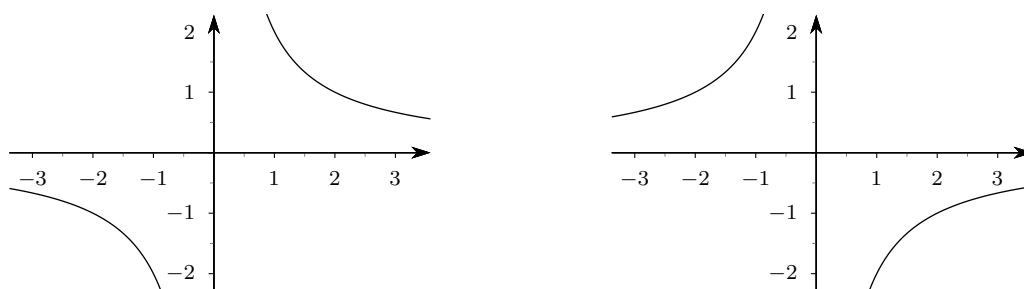


Figura 2.12 Leggi di proporzionalità inversa

Il fatto che il prodotto  $xy$  sia costantemente uguale a  $k$  ha come conseguenza che tutti i rettangoli costruiti come nella figura 2.13, con il punto  $P$  sul grafico della funzione, hanno area uguale a  $|k|$ .

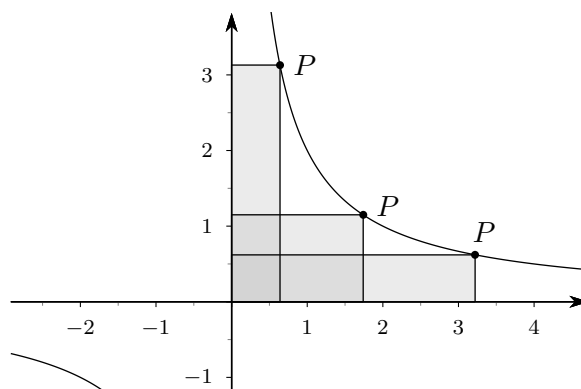


Figura 2.13 Rettangoli di area costante

## 2.8 Funzioni esponenziali elementari

Sono le funzioni del tipo

$$f(x) = a^x, \quad 0 < a < 1 \vee a > 1.$$

Il caso in cui la base  $a$  vale 1 viene tralasciato, perché di nessun interesse ( $1^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ); i casi in cui la base  $a$  è un numero minore o uguale a zero non possono venire considerati perché si andrebbe incontro a insormontabili difficoltà (che qui non possiamo esaminare).

Queste funzioni hanno un andamento completamente diverso a seconda che sia  $a > 1$  (caso che ci interessa maggiormente) oppure  $a < 1$  e precisamente nel primo caso si hanno funzioni *crescenti*, nel secondo caso funzioni *decrescenti*.

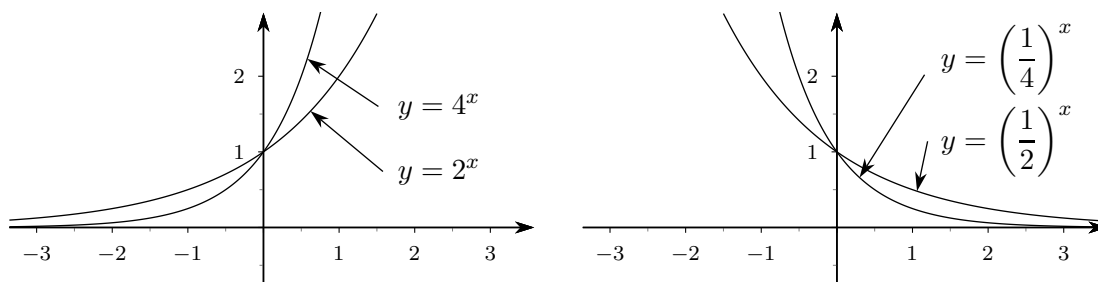


Figura 2.14 Grafici di funzioni esponenziali

Si noti che tutti i grafici, qualsiasi sia la base  $a$ , passano per il punto  $(0, 1)$ , in accordo con il fatto che  $a^0 = 1$  (almeno quando  $a \neq 0!$ ).

È molto interessante fare un confronto tra il grafico della funzione  $y = x^2$  (parabola) e quello della funzione  $2^x$  (funzione esponenziale di base 2. Si vedano i due grafici qui di seguito, con due diversi livelli di zoom sull'asse delle  $y$ ; è opportuno provare comunque con un software opportuno a esaminare situazioni con altri livelli di zoom.

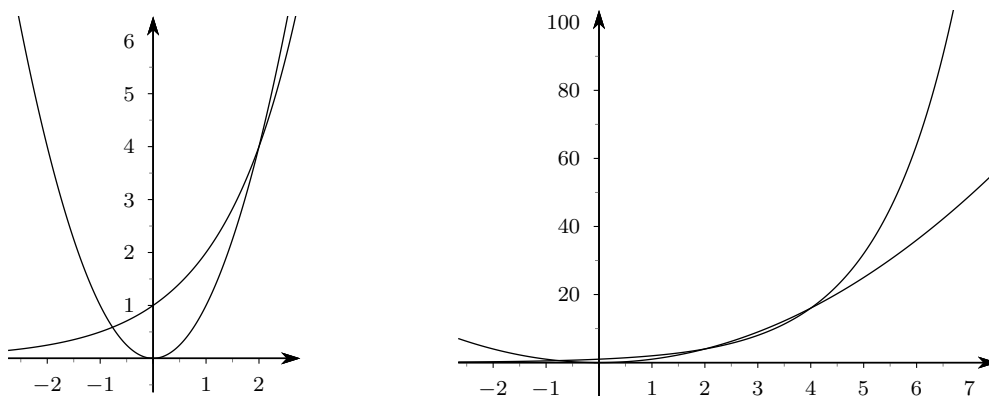


Figura 2.15 Confronto tra i grafici di  $y = 2^x$  e  $y = x^2$

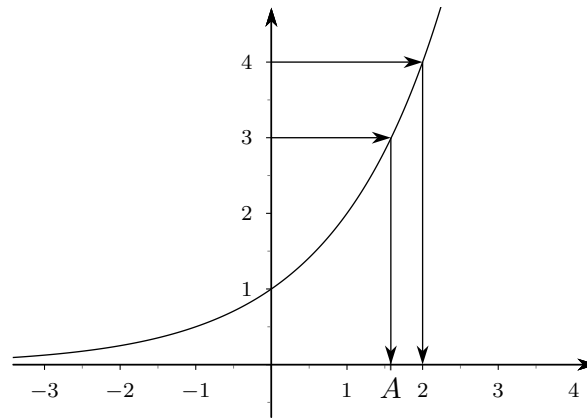
Si nota subito che per piccoli valori (positivi) di  $x$  la differenza tra i due grafici non è grande, mentre per valori appena più grandi della  $x$ ,  $2^x$  è enormemente più grande di  $x^2$ : del resto  $2^{10} = 1024$ , mentre  $10^2 = 100$ .

## 2.9 Le funzioni logaritmo

Consideriamo le seguenti equazioni:

1.  $2^x = 4$ ,
2.  $2^x = 3$ .

Mentre la prima ha una soluzione immediata ( $x = 2$ ), la seconda no. Se ragioniamo sul grafico della funzione  $2^x$ , possiamo però osservare che anche la seconda deve avere una soluzione, rappresentata dall'ascissa del punto  $A$  nella figura 2.16.



**Figura 2.16** Soluzioni di equazioni esponenziali

Ebbene all'unica soluzione dell'equazione  $2^x = 3$  si dà il nome di

$$\log_2 3,$$

che si legge *logaritmo in base 2 di 3*.

In generale se consideriamo un'equazione del tipo

$$a^x = b, \quad 0 < a < 1 \vee a > 1,$$

sulla base dei grafici che abbiamo visto, possiamo dire che si troverà un'unica soluzione *purché*  $b > 0$ . A questa soluzione si dà il nome di *logaritmo in base  $a$  di  $b$* , e si scrive

$$\log_a b.$$

Possiamo dunque dare una definizione formale di logaritmo.

**Definizione 2.2.** *Dati*

1. il numero  $a$ , con  $0 < a < 1 \vee a > 1$

e

2. il numero  $b$ , con  $b > 0$ ,

si chiama logaritmo in base  $a$  di  $b$ ,  $\log_a b$ , quell'unico numero reale che posto come esponente alla base  $a$  fornisce il numero  $b$ , ovvero

$$a^{\log_a b} = b.$$

*Esempi.*

1.  $\log_5 125 = 3$ , perché  $5^3 = 125$ ;
2.  $\log_3 1/9 = -2$ , perché  $3^{-2} = 1/9$ ;
3.  $\log_7 \sqrt[3]{49} = 2/3$ , perché  $7^{2/3} = \sqrt[3]{49}$ .

Si tenga ben presente che

$$\log_{-2}(-8)$$

non esiste, anche se  $(-2)^3 = -8$ , perchè non abbiamo definito i logaritmi con base negativa (e nemmeno quelli con argomento negativo!).

I logaritmi godono di alcune proprietà importanti nelle applicazioni, proprietà che sono una diretta conseguenza delle proprietà delle potenze. Precisamente si ha:

1.  $\log_a 1 = 0$ ,  $\forall a$  con  $(0 < a < 1 \vee a > 1)$ ;
2.  $\log_a a = 1$ ,  $\forall a$  con  $(0 < a < 1 \vee a > 1)$ ;
3.  $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$ , purché  $m$  ed  $n$  siano entrambi strettamente positivi;
4.  $\log_a(m/n) = \log_a m - \log_a n$ , purché  $m$  ed  $n$  siano entrambi strettamente positivi;
5.  $\log_a b^m = m \log_a b$ , sempre con  $(0 < a < 1 \vee a > 1)$  e  $b > 0$ .

Anche i grafici delle funzioni logaritmo hanno un andamento completamente diverso a seconda che  $0 < a < 1$  oppure  $a > 1$ .

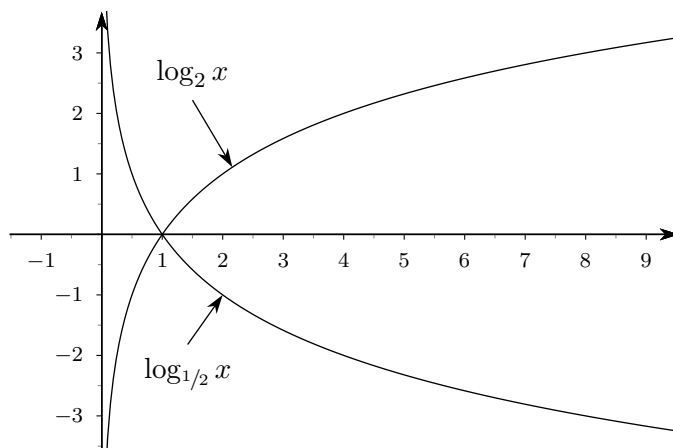
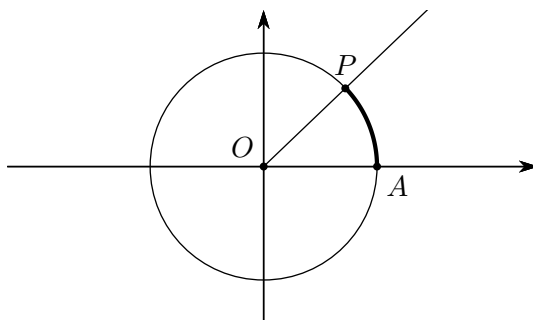


Figura 2.17 Grafici delle funzioni logaritmo

Si noti che le funzioni logaritmo hanno come *dominio naturale* l'insieme dei numeri reali strettamente positivi, cosa che del resto era evidente dalla definizione.

## 2.10 Cenno alle funzioni trigonometriche

Consideriamo, in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, la circonferenza di centro l'origine e raggio  $r$ :  $x^2 + y^2 = r$ . Se  $\alpha$  è un angolo qualunque del piano possiamo traslarlo rigidamente fino a portare il suo vertice sull'origine degli assi e il suo primo lato a coincidere con il semiasse positivo delle  $x$ : il secondo lato dell'angolo intersecherà la circonferenza in un punto  $P$ ; se indichiamo con  $A$  l'intersezione tra il primo lato dell'angolo e la circonferenza, l'angolo stesso individuerà un arco  $\widehat{AP}$ .



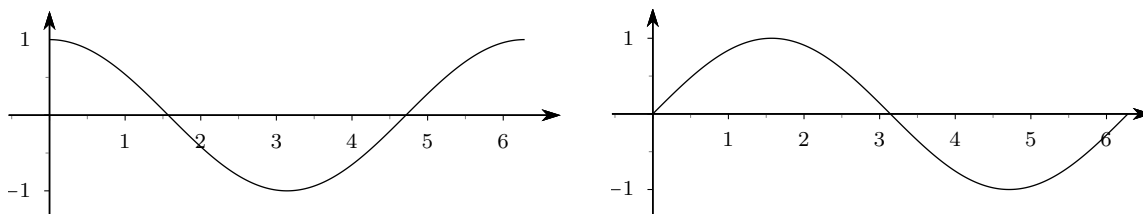
**Figura 2.18** Angolo e sua misura in radianti

È conveniente assumere come misura dell'angolo il rapporto tra la lunghezza dell'arco  $\widehat{AP}$  e il raggio della circonferenza, anziché la tradizionale misura in gradi usata nella geometria elementare: diremo questo sistema di misura degli angoli *misura in radianti*. Se poi si sceglie addirittura 1 come raggio della circonferenza, cosa che faremo abitualmente, allora la misura dell'angolo coincide numericamente con quella dell'arco. In questo modo la misura degli angoli è un *numero puro* (senza dimensioni perché rapporto di due lunghezze) compreso tra 0 e  $2\pi$  ( $\simeq 6.28$ ).

Supponiamo ora di avere scelto una volta per tutte la circonferenza di raggio 1: è chiaro che al variare dell'angolo varierà il punto  $P$  e quindi le sue coordinate:  $P = (x_P, y_P)$ . Queste coordinate hanno un'importanza cruciale nelle applicazioni e prendono nomi speciali, precisamente si definisce

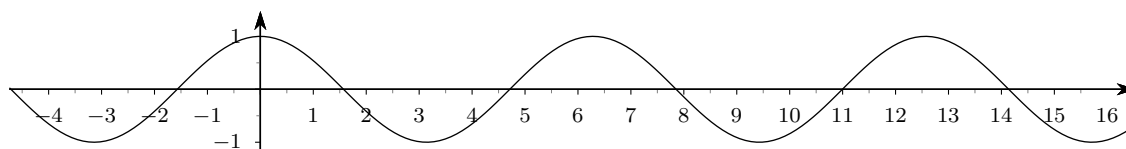
1. *coseno* dell'angolo  $\alpha$  l'*ascissa* del punto  $P$ :  $x_P = \cos \alpha$ ;
2. *seno* dell'angolo  $\alpha$  l'*ordinata* del punto  $P$ :  $y_P = \sin \alpha$ .

Per gli scopi di questo corso saremo interessati principalmente alle proprietà dei grafici di queste funzioni, che hanno l'aspetto evidenziato nelle figure che seguono, dove sull'asse delle ascisse è riportato il valore dell'angolo *misurato in radianti* (questa precisazione è molto importante agli effetti del calcolo di limiti e derivate, come vedremo).



**Figura 2.19** Grafici delle funzioni coseno e seno, rispettivamente

Queste funzioni vengono poi prolungate a tutto l'insieme dei numeri reali *per periodicità*, cioè riportando esattamente lo stesso andamento sia a destra che a sinistra, ottenendo così funzioni che si ripetono (si dice: sono periodiche) a intervalli ampi  $2\pi$ .



**Figura 2.20** La funzione coseno "estesa" a tutta la retta



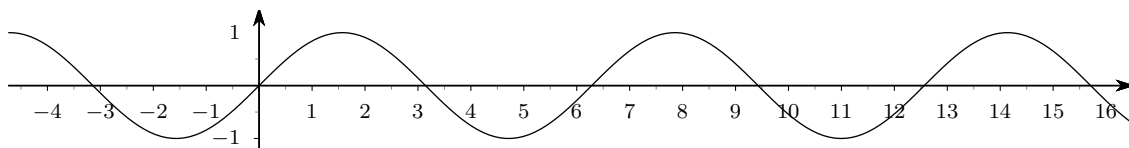


Figura 2.21 La funzione seno “estesa” a tutta la retta

Nelle applicazioni l’importanza di queste funzioni è proprio legata all’andamento “oscillante” dei loro grafici, andamento che è in grado di simulare, con opportuni adattamenti, numerose situazioni reali.

## 2.11 Le funzioni potenza

Concludiamo questa carrellata di funzioni elementari di uso comune con le *funzioni potenza*, interessandoci soprattutto ai grafici e al confronto tra di essi, grafici che proponiamo senza commenti e limitando la considerazione alle  $x$  positive.

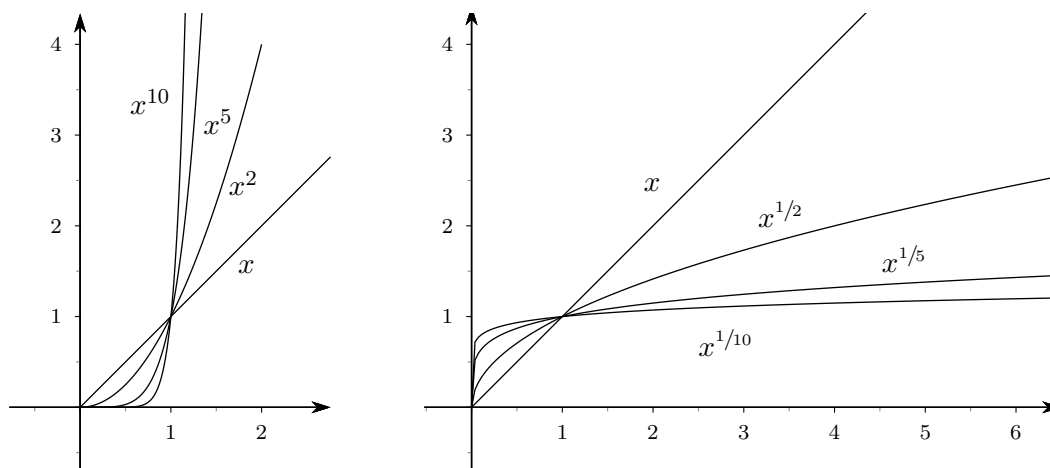


Figura 2.22 Potenze con esponente positivo, maggiore o minore di 1 rispettivamente

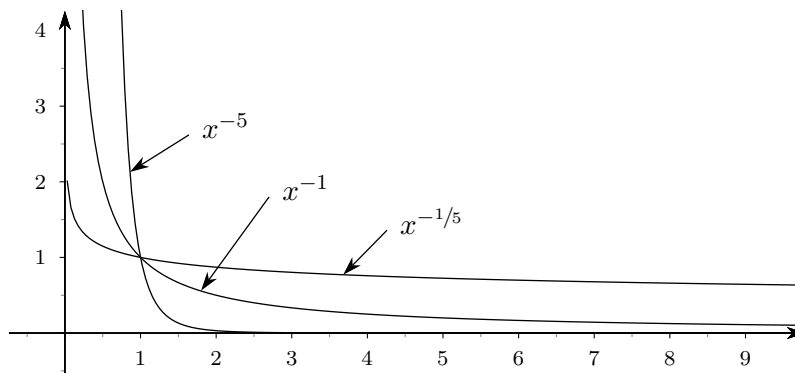


Figura 2.23 Potenze con esponente negativo



# 3 Limiti e continuità per le funzioni reali di variabile reale

## 3.1 Considerazioni introduttive

Prima di iniziare la vera e propria trattazione dell'importante concetto di limite per le funzioni reali, consideriamo alcuni esempi per capire il senso delle definizioni formali che daremo, segnalando che, vista la natura e gli scopi di questo corso privilegeremo sempre gli aspetti più propriamente “applicativi”, naturalmente non rinunciando al rigore necessario.

*Esempio.* Consideriamo la funzione definita da

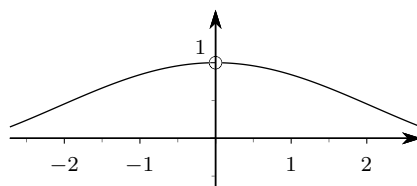
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

il cui dominio naturale è  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , cioè l'insieme dei reali negativi, e poniamoci il seguente problema, che avrà notevole importanza nel seguito: *Considerato che non è possibile calcolare il valore di  $f$  in corrispondenza di  $x = 0$ , perché  $0$  non appartiene al dominio della funzione, è almeno possibile valutare il comportamento di  $f$  se la  $x$ , a partire da un valore “prossimo a”  $0$ , si avvicina “quanto più è possibile” a  $0$ <sup>(1)</sup>?*

Per rispondere a questa domanda usiamo un foglio di calcolo e calcoliamo i valori di  $x$  (in radianti),  $\sin(x)$  e  $\sin x/x$ , a partire, per esempio, da  $x = 1$  fino ad avvicinarci a  $x = 0$ . Abbiamo riportato i risultati di questo calcolo nella tabella 3.1.

Come si può notare, il rapporto presente nell'ultima colonna si avvicina sempre più a 1 (si noti, nelle ultime 3 righe, che i valori di  $x$  e di  $\sin x$  nella tabella sono identici, ma questo fatto è una conseguenza degli errori di arrotondamento del foglio di calcolo: in realtà  $\sin x$  è sempre minore di  $x$ , come risulta evidente dalla definizione che ne abbiamo dato).

Una ulteriore verifica di questo fatto può essere ottenuta se tracciamo il grafico della funzione  $f$  in questione: si noti che, in corrispondenza del punto  $(0, 1)$ , non viene tracciato alcun punto sul grafico.



**Figura 3.1** Grafico della funzione  $\sin x/x$ , nei pressi di 0

Potremo riassumere questo comportamento dicendo che, per  $x$  che “tende” a 0,  $\sin x/x$  “tende” a 1, in formule

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1,$$

<sup>1</sup>Abbiamo usato le virgolette su “prossimo a” e su “quanto più è possibile”, perché sono termini che dovranno essere precisati, in quanto non hanno un significato univoco

$x$	$\sin x$	$\sin x/x$
1,0000000000000000	0,841470984807896	0,841470984807896
0,5000000000000000	0,479425538604203	0,958851077208406
0,4000000000000000	0,389418342308650	0,973545855771626
0,3000000000000000	0,295520206661340	0,985067355537799
0,2000000000000000	0,198669330795061	0,993346653975306
0,1000000000000000	0,099833416646828	0,998334166468282
0,0500000000000000	0,049979169270678	0,999583385413567
0,0400000000000000	0,039989334186634	0,999733354665854
0,0300000000000000	0,029995500202496	0,999850006749855
0,0200000000000000	0,019998666693333	0,999933334666654
0,0100000000000000	0,009999833334167	0,999983333416667
0,0050000000000000	0,004999979166693	0,999995833338542
0,0040000000000000	0,003999989333342	0,999997333335467
0,0030000000000000	0,002999995500002	0,999998500000675
0,0020000000000000	0,001999998666667	0,999999333333466
0,0010000000000000	0,000999998333333	0,999999833333342
0,0005000000000000	0,000499999791667	0,999999958333334
0,0001000000000000	0,000099999998333	0,999999998333333
0,0000500000000000	0,000049999999791	0,999999999583333
0,0000100000000000	0,000010000000000	0,999999999833333
0,0000050000000000	0,000005000000000	0,999999999958333
0,0000010000000000	0,000001000000000	0,999999999998333

**Tabella 3.1** Valori di  $x$ ,  $\sin x$ ,  $\sin x/x$ , per  $x$  variabile da 1 a “quasi 0”

o, come scriveremo di solito,

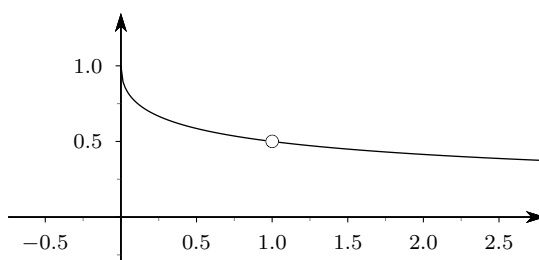
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

*Esempio.* Come secondo esempio consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1},$$

il cui dominio naturale è  $[0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ . Anche qui, usando un foglio di calcolo, determiniamo (se c'è!!) il valore a cui tende questo rapporto, al tendere di  $x$  a 1 (valore non compreso nel dominio), a partire, per esempio, da  $x = 2$ . Otteniamo la tabella 3.2.

Anche in questo caso possiamo usare un grafico per un ulteriore controllo numerico del risultato.



**Figura 3.2** Grafico della funzione  $f(x) = (\sqrt{x} - 1)/(x - 1)$

Come prima, notiamo che in corrispondenza di  $x = 1$  non viene tracciato alcun punto sul grafico della funzione.

Potremo scrivere ora:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2},$$

naturalmente riservandoci di precisare meglio il senso della scrittura.

$x$	$\sqrt{x} - 1$	$x - 1$	$(\sqrt{x} - 1)/(x - 1)$
2,0000000000000000	0,414213562373095	1,0000000000000000	0,414213562373095
1,5000000000000000	0,224744871391589	0,5000000000000000	0,449489742783178
1,4000000000000000	0,183215956619923	0,4000000000000000	0,458039891549808
1,3000000000000000	0,140175425099138	0,3000000000000000	0,467251416997127
1,2000000000000000	0,095445115010332	0,2000000000000000	0,477225575051661
1,1000000000000000	0,048808848170152	0,1000000000000000	0,488088481701516
1,0500000000000000	0,024695076595960	0,0500000000000000	0,493901531919198
1,0400000000000000	0,019803902718557	0,0400000000000000	0,495097567963925
1,0300000000000000	0,014889156509222	0,0300000000000000	0,496305216974065
1,0200000000000000	0,009950493836208	0,0200000000000000	0,497524691810391
1,0100000000000000	0,004987562112089	0,0100000000000000	0,498756211208895
1,0050000000000000	0,002496882788171	0,0050000000000000	0,499376557634223
1,0040000000000000	0,001998003990028	0,0040000000000000	0,499500997506952
1,0030000000000000	0,001498876684342	0,0030000000000000	0,499625561447503
1,0020000000000000	0,000999500499376	0,0020000000000000	0,499750249687958
1,0010000000000000	0,000499875062461	0,0010000000000000	0,499875062461019
1,0005000000000000	0,000249968757810	0,0005000000000000	0,499937515620330
1,0001000000000000	0,000049998750062	0,0001000000000000	0,499987500624021
1,0000500000000000	0,000024999687508	0,0000500000000000	0,499993750157135
1,0000100000000000	0,000004999987500	0,0000100000000000	0,499998749999897
1,0000050000000000	0,000002499996875	0,0000050000000000	0,499999375011051
1,0000010000000000	0,000000499999875	0,0000010000000000	0,499999875099910

**Tabella 3.2** Valori di  $x$ ,  $\sqrt{x} - 1$ ,  $x - 1$ ,  $(\sqrt{x} - 1)/(x - 1)x$ , per  $x$  variabile da 2 a “quasi 1”

*Esempio.* Il terzo esempio è relativo alla funzione

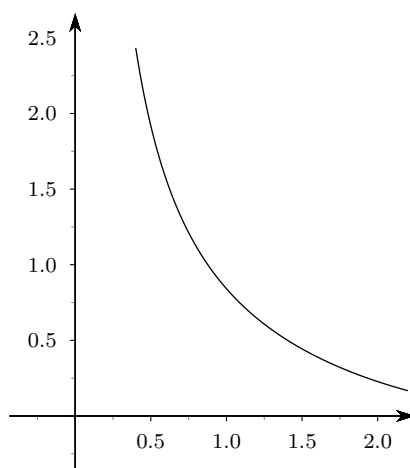
$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2},$$

per la quale cerchiamo di capire, sempre usando il solito foglio di calcolo, che cosa succede quando  $x$  si avvicina a 0 (punto non compreso nel dominio naturale. Otteniamo la tabella 3.3.

Questa volta notiamo che, quanto più  $x$  è prossimo a 0, tanto più i valori della funzione crescono. Riservandoci una precisazione ulteriore, possiamo dire che se  $x$  tende a 0,  $f(x)$  diventa enormemente grande, ovvero “tende a  $+\infty$ ”, in formule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = +\infty.$$

Il solito grafico conferma l'impressione numerica.



**Figura 3.3** Grafico della funzione  $\sin x/x^2$

$x$	$\sin x$	$x^2$	$\sin x/x^2$
1,0000000000000000	0,841470984807896	1,0000000000000000	0,841470984807896
0,5000000000000000	0,479425538604203	0,2500000000000000	1,917702154416810
0,4000000000000000	0,389418342308650	0,1600000000000000	2,433864639429070
0,3000000000000000	0,295520206661340	0,0900000000000000	3,283557851792660
0,2000000000000000	0,198669330795061	0,0400000000000000	4,966733269876530
0,1000000000000000	0,099833416646828	0,0100000000000000	9,983341664682810
0,0500000000000000	0,049979169270678	0,0025000000000000	19,991667708271300
0,0400000000000000	0,039989334186634	0,0016000000000000	24,993333866646300
0,0300000000000000	0,029995500202496	0,0009000000000000	33,328333558328500
0,0200000000000000	0,019998666693333	0,0004000000000000	49,996666733332700
0,0100000000000000	0,00999833334167	0,0001000000000000	99,99833341666600
0,0050000000000000	0,00499979166693	0,0000250000000000	199,999166667708000
0,0040000000000000	0,00399989333342	0,0000160000000000	249,99933333867000
0,0030000000000000	0,002999995500002	0,0000090000000000	333,33283333358000
0,0020000000000000	0,001999998666667	0,0000040000000000	499,999666666733000
0,0010000000000000	0,000999998333333	0,0000010000000000	999,99983333342000
0,0005000000000000	0,00049999979167	0,0000002500000000	1999,99916666670000
0,0001000000000000	0,00009999999833	0,0000000100000000	9999,99983333340000
0,0000500000000000	0,00004999999979	0,0000000025000000	19999,99991666700000
0,0000100000000000	0,00000999999983	0,0000000001000000	99999,99998333300000
0,0000050000000000	0,00000499999983	0,0000000000250000	199999,99999167000000
0,0000010000000000	0,00000099999983	0,0000000000010000	999999,99999833000000

**Tabella 3.3** Valori di  $x$ ,  $\sin x$ ,  $x^2$ ,  $\sin x/x^2$ , per  $x$  variabile da 1 a “quasi 0”

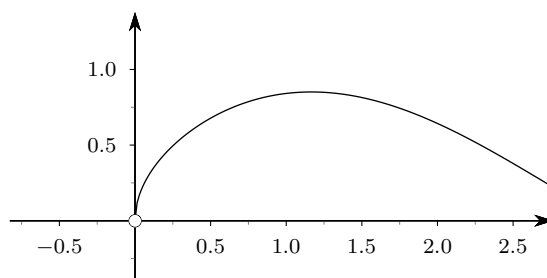
*Esempio.* Concludiamo questa carrellata di numeri e grafici con la funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}},$$

per la quale siamo ancora interessati a scoprire che cosa succede quando  $x$  si avvicina a 0 (punto non compreso nel dominio naturale). La relativa tabella è la 3.4.

Questa volta il foglio di calcolo è un po' più impreciso (sempre a causa di problemi di arrotondamento), ma, magari anche facendo uso del solito grafico, ci assumiamo la responsabilità di affermare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0.$$



**Figura 3.4** Grafico della funzione  $f(x) = \sin x/\sqrt{x}$

È interessante osservare che le quattro situazioni che abbiamo esaminato negli esempi sono molto simili: in tutti i quattro casi abbiamo considerato rapporti di due quantità, variabili al variare di  $x$ , che per  $x$  tendente a un opportuno valore si presentavano sempre con l'aspetto di frazioni aventi numeratore e denominatore “*infinitamente piccolo*”: eppure il risultato finale è stato completamente diverso nei quattro casi.

$x$	$\sin x$	$\sqrt{x}$	$\sin x/\sqrt{x}$
1,0000000000000000	0,841470984807896	1,0000000000000000	0,841470984807896
0,5000000000000000	0,479425538604203	0,707106781186548	0,678010098842090
0,4000000000000000	0,389418342308650	0,632455532033676	0,615724462171224
0,3000000000000000	0,295520206661340	0,547722557505166	0,539543611290014
0,2000000000000000	0,198669330795061	0,447213595499958	0,444238128702149
0,1000000000000000	0,099833416646828	0,316227766016838	0,315700983200547
0,0500000000000000	0,049979169270678	0,223606797749979	0,223513639896411
0,0400000000000000	0,039989334186634	0,2000000000000000	0,199946670933171
0,0300000000000000	0,029995500202496	0,173205080756888	0,173179101163883
0,0200000000000000	0,019998666693333	0,141421356237310	0,141411928335454
0,0100000000000000	0,009999833334167	0,1000000000000000	0,099998333341667
0,0050000000000000	0,004999979166693	0,070710678118655	0,070710383491198
0,0040000000000000	0,003999989333342	0,063245553203368	0,063245384548694
0,0030000000000000	0,002999995500002	0,054772255750517	0,054772173592170
0,0020000000000000	0,001999998666667	0,044721359549996	0,044721329735762
0,0010000000000000	0,000999998333333	0,031622776601684	0,031622771331221
0,0005000000000000	0,00049999979167	0,022360679774998	0,022360678843303
0,0001000000000000	0,00009999999833	0,0100000000000000	0,00999999983333
0,0000500000000000	0,00004999999979	0,007071067811865	0,007071067808919
0,0000100000000000	0,000010000000000	0,003162277660168	0,003162277660116
0,0000050000000000	0,000005000000000	0,002236067977500	0,002236067977490
0,0000010000000000	0,000001000000000	0,001000000000000	0,001000000000000

**Tabella 3.4** Valori di  $x$ ,  $\sin x$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $\sin x/\sqrt{x}$ , per  $x$  variabile da 1 a “quasi 0”

Purtroppo non è sempre possibile decidere il comportamento di una funzione in prossimità di un dato punto usando un foglio di calcolo (o simili tecniche) e, nemmeno, usando un grafico. Un esempio classico in tal senso è dato dalla funzione

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

La tabella 3.5, costruita al solito modo, questa volta non ci è di grande aiuto.

Né ci conforta molto l’esame del grafico, che abbiamo già visto nella figura 1.10 nella pagina 22, e nelle due figure subito successive.

Abbiamo bisogno di una teoria e di tecniche di calcolo più raffinate per risolvere il problema che ha, come già accennato, grande importanza applicativa. Purtroppo le cose non sono molto semplici, e qui ci limiteremo solo agli aspetti essenziali.

### 3.2 Intorni di un numero o punto

Nel seguito avremo bisogno di specificare che cosa si intenda esattamente con una locuzione del tipo “ $x$  è vicino a  $x_0$ ”. Poiché i concetti di *vicinanza* e *lontananza* sono chiaramente soggettivi, dovremo darne una definizione univoca.

**Definizione 3.1.** Dato un numero reale  $x_0$ , si chiama intorno di  $x_0$ , e si indica con  $I_{x_0}$ , un qualunque intervallo aperto (limitato o illimitato) che contenga  $x_0$ .

Se si pensa alla rappresentazione geometrica degli intervalli come segmenti (o semirette, o l’intera retta), si può dire che intorno è un segmento (eventualmente una semiretta, o l’intera retta: in generale parlando di segmenti ci potremo riferire anche alle semirette o all’intera retta) che “circonda” un punto.

È chiaro che un qualunque numero reale  $x_0$  ha infiniti intorni possibili, in quanto sono infiniti gli intervalli aperti che lo contengono. Se è fissato un certo intorno, potremo dire che i punti dell’intorno sono “vicini” a  $x_0$ , gli altri sono “lontani”: è chiaro dunque che il concetto di vicino

$x$	$1/x$	$\sin 1/x$
1,0000000000000000	1,0000000000000000	0,841470984807897
0,5000000000000000	2,0000000000000000	0,909297426825682
0,4000000000000000	2,5000000000000000	0,598472144103957
0,3000000000000000	3,3333333333333330	-0,190567962875485
0,2000000000000000	5,0000000000000000	-0,958924274663138
0,1000000000000000	10,0000000000000000	-0,544021110889370
0,0500000000000000	20,0000000000000000	0,912945250727628
0,0400000000000000	25,0000000000000000	-0,132351750097773
0,0300000000000000	33,333333333333300	0,940529576628763
0,0200000000000000	50,0000000000000000	-0,262374853703929
0,0100000000000000	100,0000000000000000	-0,506365641109759
0,0050000000000000	200,0000000000000000	-0,873297297213995
0,0040000000000000	250,0000000000000000	-0,970528019541805
0,0030000000000000	333,333333333330000	0,318846344358746
0,0020000000000000	500,0000000000000000	-0,467771805322476
0,0010000000000000	1000,0000000000000000	0,826879540532003
0,0005000000000000	2000,0000000000000000	0,930039504416137
0,0001000000000000	10000,0000000000000000	-0,305614388888252
0,0000500000000000	20000,0000000000000000	0,581984761994295
0,0000100000000000	100000,0000000000000000	0,035748797986561
0,0000050000000000	200000,0000000000000000	-0,071451895241553
0,0000010000000000	1000000,0000000000000000	-0,349993502171308

**Tabella 3.5** Valori di  $x$ ,  $1/x$ ,  $\sin 1/x$ , per  $x$  variabile da 1 a “quasi 0”

o lontano è strettamente legato all’intorno fissato. È come se l’intorno servisse da lente per guardare un pezzo di retta circondante un dato punto: tutto quello che rientra nel campo visivo della lente è considerato vicino al punto, quello che esce da questo campo è considerato lontano.

È utile rendersi conto, almeno a livello intuitivo delle seguenti proprietà degli intorni.

1. L’unione di due intorni è ancora un intorno: quasi ovvia, in quanto l’unione di due segmenti che contengono un punto è ancora un segmento (più grande di entrambi) che contiene il punto.
2. L’intersezione di due intorni è ancora un intorno: anche qui la cosa è quasi ovvia, perché due segmenti che contengono un punto al loro interno (gli intorni sono segmenti *aperti!*) contiene ancora un segmento aperto che contiene il punto.
3. L’unione di infiniti intorni è ancora un intorno: anche qui la cosa è abbastanza evidente, perché unendo segmenti aperti si ottengono segmenti aperti via via più grandi e dunque ancora intorni.
4. L’intersezione di infiniti intorni può non essere un intorno. Un esempio è il seguente. Sia  $x_0 = 0$  e consideriamo i segmenti

$$I_n = \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[ , n = 1, 2, \dots, n, \dots$$

È evidente che si tratta di un insieme di infiniti segmenti aperti, tutti contenenti il punto 0, cioè tutti intorni di 0: ebbene è quasi immediato che

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} I_k = \{0\},$$

cioè che l’intersezione contiene solo il numero 0 stesso, quindi *non* è un intorno di 0.



### 3.3 La retta reale estesa

Per velocizzare la trattazione del problema del calcolo dei limiti e per semplificare molte scritte è utile *ampliare* l'insieme dei numeri reali, aggiungendo due ulteriori elementi che chiameremo, anche se in maniera impropria, ancora “punti”. Attenzione però: non useremo *mai* per questi due elementi la dicitura “numero”, in quanto, come vedremo, il loro comportamento nei confronti delle operazioni elementari è *alquanto strano*.

**Definizione 3.2.** Chiameremo retta reale estesa, *l'insieme*

$$\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},$$

*cioè l'insieme dei numeri reali a cui siano stati aggiunti altri due elementi, o punti, detti rispettivamente  $-\infty$  e  $+\infty$ , per i quali stabiliremo le regole di seguito elencate per quanto riguarda l'ordine e le operazioni fondamentali.*

Nella retta reale estesa a volte (ma non sempre!!) potremo attribuire un segno anche allo zero, con delle regole che vedremo in seguito: se saremo interessati a questa scelta indicheremo con  $0^+$  uno “zero positivo”, con  $0^-$  uno “zero negativo”.

#### Ordine nella retta reale estesa

Per ogni numero reale  $a$ , si pone, per definizione,

$$-\infty < a < +\infty,$$

ovvero  $-\infty$  precede tutti i numeri reali (è una specie di “primo elemento”), mentre  $+\infty$  segue tutti i numeri reali (è una specie di “ultimo elemento”).

#### Operazioni nella retta reale estesa

Le operazioni elementari in uso tra i numeri reali possono essere estese, entro certi limiti, ad operazioni coinvolgenti anche i nuovi simboli di  $\pm\infty$ , nel modo indicato qui di seguito. Segnaliamo che, scrivendo  $\infty$ , intendiamo riferirci indifferentemente al simbolo  $+\infty$  o  $-\infty$ . Tutte le volte che serve ed è possibile, si deve inoltre applicare la usuale “regola dei segni” per quanto riguarda il prodotto e il quoziente.

1. Per ogni numero reale  $a$ ,  $a \pm (+\infty) = \pm\infty$ .
2. Per ogni numero reale  $a$ ,  $a \pm (-\infty) = \mp\infty$ .
3.  $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ .
4.  $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ .
5. Per ogni numero reale  $a$  *diverso* da 0,  $a \cdot (\infty) = \infty$  (con la regola dei segni).
6.  $(\infty) \cdot (\infty) = \infty$  (con la regola dei segni).
7. Per ogni numero reale  $a$ , anche 0,  $a/\infty = 0$ .
8. Per ogni numero reale  $a$  *diverso* da 0,  $a/0 = \infty$  (con la regola dei segni, se applicabile).
9. Per ogni numero reale  $a$  (anche 0),  $\infty/a = \infty$  (con la regola dei segni, se applicabile).

Osserviamo che *non* abbiamo definito le operazioni nei casi seguenti:

1. Somma di  $(+\infty)$  e  $(-\infty)$  (e analoghe che si ottengono usando le regole dei segni: diremo brevemente che abbiamo escluso dalle regole di calcolo il caso  $\infty - \infty$ ).
2. Prodotto tra 0 e  $\infty$ : diremo brevemente che abbiamo escluso dalle regole di calcolo il caso  $0 \cdot \infty$ .
3. Quoziente tra 0 e 0: diremo brevemente che abbiamo escluso dalle regole di calcolo il caso  $0/0$ .
4. Quoziente tra  $\infty$  e  $\infty$ : diremo brevemente che abbiamo escluso dalle regole di calcolo il caso  $\infty/\infty$ .

Chiameremo queste situazioni *forme di indecisione* o anche (ma la nomenclatura ci pare oltremodo brutta e inadeguata) *forme indeterminate*<sup>(2)</sup>.

### Intorni dell'infinito

Anche per i due nuovi oggetti aggiunti alla retta reale si introduce il concetto di intorno. Precisamente si dice *intorno di*  $+\infty$  un qualunque intervallo aperto superiormente illimitato:  $I_{+\infty} = ]a, +\infty[$ , oppure  $] -\infty, +\infty[$ ; si dice invece *intorno di*  $-\infty$  un qualunque intervallo aperto inferiormente illimitato:  $I_{+\infty} = ] -\infty, a[$ , oppure  $] -\infty, +\infty[$ .

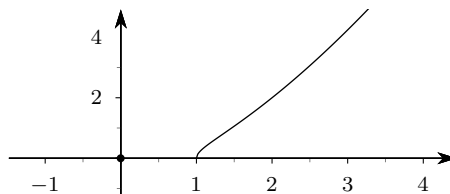
## 3.4 Punti di accumulazione, di frontiera, isolati

Negli esempi che abbiamo proposto per introdurre il concetto di limite, abbiamo analizzato il comportamento di diverse funzioni al variare della  $x$  in modo da farla avvicinare a un determinato valore (senza necessariamente farle raggiungere quel valore che, negli esempi, era addirittura fuori dal dominio). È evidente che la cosa ha senso solo se è possibile “*avvicinarsi indefinitamente*” a un dato valore  $x_0$  di  $x$ . Per capire il senso di questa affermazione consideriamo, come siamo ormai soliti fare, un esempio grafico.

Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x^2},$$

che ha come dominio  $\{0\} \cup [1, +\infty[$ ; il grafico è rappresentato di seguito (attenzione alle diverse unità di misura sui due assi!).



**Figura 3.5** Grafico di  $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$ ; anche il punto  $(0,0) \in$  al grafico!

È chiaro che in una situazione come questa ha perfettamente senso calcolare il valore della funzione in 0, non ha invece alcun senso chiedersi che cosa succede se  $x$  si avvicina indefinitamente a 0, in quanto, dal punto di vista del dominio, nei pressi di 0 c'è, per così dire, il deserto: il punto 0 è *isolato* nel dominio<sup>(3)</sup>.

Per essere sicuri che abbia senso trattare il problema che stiamo affrontando (che cosa succede a una funzione se la  $x$  si avvicina a un dato punto  $x_0$ ?), introduciamo il concetto di punto di accumulazione.

**Definizione 3.3.** Sia dato un insieme  $A$ , sottoinsieme dell'insieme dei numeri reali ( $A$  sarà per noi sempre il dominio di una funzione) e un punto  $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$  (cioè  $x_0$  può anche essere uno dei due

<sup>2</sup>Le definizioni che abbiamo dato relative alle operazioni in  $\widetilde{\mathbb{R}}$  servono in realtà a calcolare i limiti: vedremo che quando si hanno situazioni del tipo delle quattro qui descritte, il calcolo è, in generale, complesso. Per questo sarebbe forse meglio chiamare queste situazioni “*forme difficili*”, e non forme di indecisione, ma la tradizione ha il suo peso... In ogni caso è bene tenere presente fin da subito che *non c'è nulla di indeterminato*, solo che in questi casi è complicato decidere che cosa succede.

<sup>3</sup>È molto interessante rendersi conto di questo fatto usando un software come Geogebra: si traccia il grafico della funzione  $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$ ; si costruisce uno *slider*, dal nome  $a$  e variabile da  $-1$  a  $2$ ; si costruisce un punto  $A$  definendolo come  $A = (a, f(a))$ . Se ora si muove il punto identificativo sullo slider si vedrà che  $A$  si muove sul grafico della funzione, ma, ed è questa la cosa che ci interessa,  $A$  risulterà *indefinito* se  $a < 0$  oppure se  $0 < a < 1$ : è proprio questo il senso del concetto di dominio, cioè l'insieme dei valori di  $x$  per i quali  $f(x)$  risulta calcolabile, cioè definito.

nuovi “punti” introdotti in  $\widetilde{\mathbb{R}}$ ), appartenente o no ad  $A$ . Il punto  $x_0$  si dice di accumulazione per  $A$  se in ogni intorno  $I_{x_0}$  cadono infiniti punti di  $A$ .

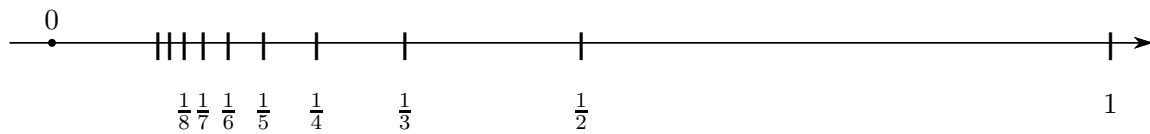
Sostanzialmente si può dire che un punto è di accumulazione per un insieme se alla sua sinistra, oppure alla sua destra, oppure da entrambi i lati, sono presenti infiniti punti dell’insieme, per quanto vicino mi posizioni rispetto al punto stesso; non ha alcun interesse sapere se il punto appartiene o no all’insieme, quello che conta è solo quello che succede nelle “immediate vicinanze del punto”.

*Esempi.*

1. Gli esempi che più ci interesseranno saranno gli intervalli. Se l’insieme  $A$  è un intervallo, di qualunque tipo (aperto, chiuso, ecc.), ogni punto dell’intervallo, compresi gli eventuali estremi, è di accumulazione per l’intervallo. Se l’intervallo è superiormente illimitato, anche  $+\infty$  è di accumulazione; se è inferiormente illimitato, anche  $-\infty$  è di accumulazione.
2. Se  $A = \mathbb{N}$ , l’unico punto di accumulazione per  $A$  è  $+\infty$ .
3. Per un esempio più complesso consideriamo l’insieme  $A$  costituito dai reciproci dei numeri naturali diversi da 0:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\},$$

che si può rappresentare, almeno parzialmente, come nella figura 3.6. Risulta abbastanza evidente che il numero 0 è punto di accumulazione per questo insieme (anzi è l’unico punto di accumulazione), nonostante 0 non appartenga all’insieme stesso.



**Figura 3.6** L’insieme dei reciproci dei naturali positivi

Anche se non sono strettamente necessarie per la definizione di limite, diamo le definizioni di punto isolato e di punto di frontiera, che ci serviranno nel seguito.

**Definizione 3.4.** Sia  $A$  un insieme e  $x_0$  un numero reale, appartenente o no all’insieme. Il punto  $x_0$  si dice di frontiera per l’insieme  $A$  se in ogni intorno di  $x_0$  cade almeno un punto di  $A$  (che potrebbe anche essere  $x_0$  stesso) e almeno un punto non appartenente ad  $A$ .

Nel caso degli intervalli gli estremi dell’intervallo sono sempre punti di frontiera (e il nome ci pare quanto mai azzeccato).

**Definizione 3.5.** Sia  $A$  un insieme e  $x_0$  un punto dell’insieme. Il punto  $x_0$  si dice isolato in  $A$  se esiste un intorno di  $x_0$  in cui  $x_0$  stesso è l’unico punto dell’insieme.

Tutti i punti dell’insieme dell’esempio 3. precedente sono punti isolati. Si noti che, mentre i punti di accumulazione e di frontiera possono appartenere o no all’insieme, i punti isolati vi appartengono per definizione.

### 3.5 La definizione di limite

Siamo ora pronti per dare una definizione il più possibile formale e rigorosa del concetto di limite per una funzione reale. Come al solito accompagneremo questa definizione con esempi grafici esplicativi. Segnaliamo subito una difficoltà nella definizione: gli esempi che abbiamo fornito implicavano un *movimento* della  $x$  verso un dato valore  $x_0$ ; ebbene, un tale concetto non è formalizzabile in maniera chiara e univoca, e nella definizione che daremo ogni idea di movimento è sparita. È questo il risultato di una lunga discussione tra i matematici all'inizio dell'analisi, discussione che ha condotto alla definizione formale che segue.

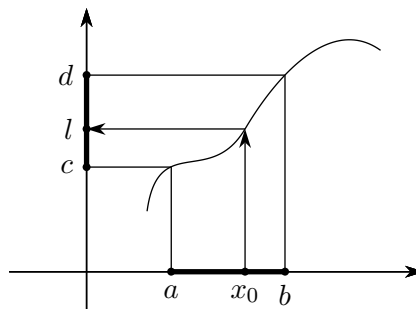
**Definizione 3.6.** *Sia data una funzione  $f$ , di dominio  $D$ , e sia  $x_0$  un punto di accumulazione per  $D$  (non essendo escluso che  $x_0$  possa essere uno dei due simboli di infinito). Diremo che  $l$  (anche qui non essendo escluso che  $l$  possa essere uno dei due simboli di infinito) è il limite di  $f(x)$  per  $x$  tendente a  $x_0$ , e scriveremo*

$$(3.1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

se, scelto un arbitrario intorno  $I_l$  di  $l$ , è possibile trovare in corrispondenza un opportuno intorno  $I_{x_0}$  di  $x_0$ , in modo tale che i valori della funzione calcolati in  $I_{x_0}$ , tranne  $x_0$  stesso, cadano in  $I_l$ .

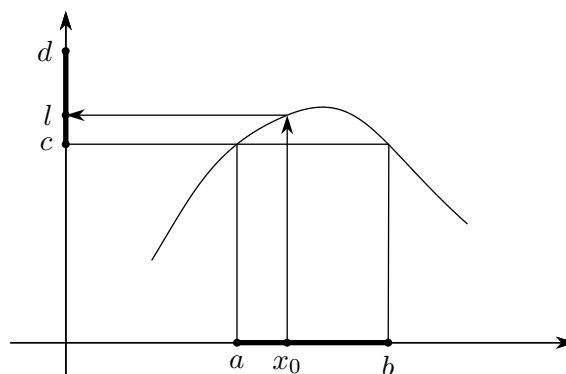
Detto in termini meno formali: vale la formula (3.1) se, considerato un segmento arbitrario contenente bersagli situati nei pressi di  $l$ , è possibile trovare un segmento (insieme di arcieri) che contenga il punto  $x_0$ , in modo tale che *tutte* le frecce lanciate da questi arcieri colpiscano solo bersagli tra quelli precedentemente scelti, con la clausola che non interessa sapere che cosa fa il punto  $x_0$ .

*Esempio.*



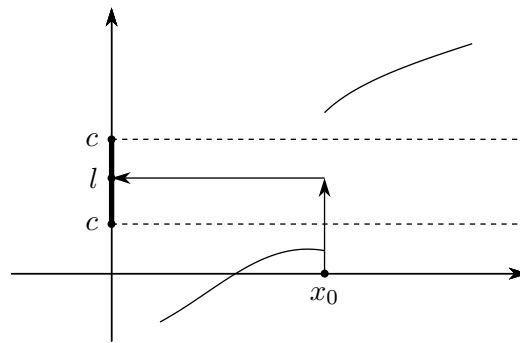
**Figura 3.7** *Tutte le frecce lanciate dal segmento  $]a, b[$  cadono nel segmento  $]c, d[$*

*Esempio.*



**Figura 3.8** *Anche in questo caso le frecce lanciate dal segmento  $]a, b[$  cadono nel segmento  $]c, d[$*

Esempio.



**Figura 3.9** In questo caso non è possibile trovare un segmento, circondante  $x_0$ , con le proprietà richieste

Negli esempi relativi alle figure 3.7, 3.8 e 3.9, si è potuto verificare la validità della definizione di limite, usando i grafici delle funzioni. Ma se i grafici non fossero disponibili?

Come al solito ragioniamo su un esempio. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{3}{x + 1},$$

e chiediamoci se è vero oppure no che

$$(3.2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x + 1} = 1.$$

Seguendo la definizione dobbiamo procedere con i passi seguenti.

1. Innanzitutto dobbiamo fissare un intorno di 1, cioè di  $l$ , ovvero un intervallo aperto del tipo  $]c, d[$ , con  $c < 1 < d$ .
2. Successivamente dobbiamo controllare se è possibile oppure no trovare un intorno di 2, cioè un intervallo del tipo  $]a, b[$ , con  $a < 2 < b$ , tale che l'immagine di tutte le  $x$  di  $]a, b[$  cada in  $]c, d[$ . Per fare questo basterà risolvere la doppia disequazione

$$c < \frac{3}{x + 1} < d.$$

Se le soluzioni di questa doppia disequazione sono un po' a sinistra e un po' a destra di 2 (cioè costituiscono un intorno di 2) allora il limite è verificato, altrimenti no.

È chiaro che sarà inutile andare a prendere intorni grandi di 1, quindi potremo sicuramente pensare che  $c$  sia positivo; analogamente sarà inutile andare a cercare intorni grandi di 3, quindi potremo limitarci a cercare le  $x$  vicine a 3, in modo che  $x + 3$  sia positivo. Risolviamo allora la doppia disequazione

$$c < \frac{3}{x + 1} < d, \text{ ovvero } \begin{cases} c < \frac{3}{x + 1} \\ \frac{3}{x + 1} < d \end{cases}, \text{ o anche } \begin{cases} cx + c < 3 \\ 3 < dx + d \end{cases},$$

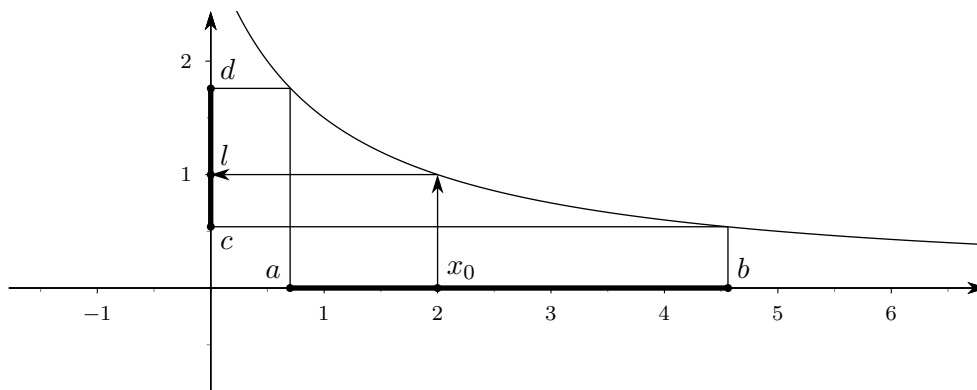
ove abbiamo eliminato i denominatori perchè sono positivi! Il sistema è verificato per

$$\frac{3 - d}{d} < x < \frac{3 - c}{c},$$

ed è immediato verificare che

$$\frac{3-d}{d} < 2, \text{ mentre } \frac{3-c}{c} > 2.$$

Se avessimo avuto a disposizione il grafico della funzione, il risultato sarebbe stato immediatamente evidente.



**Figura 3.10** Il limite  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x+1}$

*Osservazione 3.7.* Segnaliamo che la definizione di limite *non* ci fornisce alcun metodo per calcolare il limite, ci dà solo uno *strumento di verifica*. La situazione è simile a quella che si era verificata dando la definizione di divisione tra due numeri: dati due numeri  $a$  e  $b$ , si chiama *quoziente* tra  $a$  e  $b$  quel numero  $c$ , se esiste, tale che  $a = bc$ . Nessuna indicazione ci viene data su come trovare questo numero  $c$ , posto che esista, e tutti ricordiamo la fatica fatta per imparare le tecniche adatte a trovarlo (e la fatica fatta dalla povera malcapitata maestra che tentava di insegnarcele!).

Naturalmente il problema del calcolo di un limite è decisamente più complesso che non quello di trovare il quoziente di due numeri, e in questo corso faremo solo un limitato accenno al problema.

Il lettore attento dovrebbe avere notato che, nell'esempio che abbiamo appena trattato, il valore del limite, 2, si poteva trovare direttamente "per sostituzione", ovvero si ha

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x+1} = f(2) = 1.$$

In generale si avrebbe una situazione del tipo

$$(3.3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

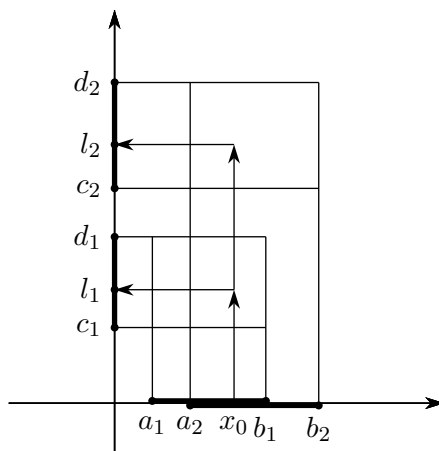
Se la cosa fosse sempre così semplice non sarebbe stato necessario introdurre alcun concetto di limite. Purtroppo già gli esempi introduttivi di questo capitolo evidenziano le difficoltà del problema e il fatto che non si può sempre procedere in questo modo, anche se, come vedremo, questa opportunità riveste grande importanza, tanto che dà origine a un apposito capitolo dell'analisi delle funzioni, quello delle funzioni continue, di cui ci occuperemo tra poco.

### 3.6 Tre teoremi fondamentali sui limiti

Enunciamo tre teoremi fondamentali sui limiti, di cui daremo solo una dimostrazione grafica: non è comunque difficile tradurre in un discorso formale e rigoroso quanto diremo.

**Teorema 3.8** (Unicità del limite). *Se una funzione ha un limite  $l$ , per  $x$  tendente a  $x_0$ , tale limite è unico.*

*Dimostrazione.* Si supponga che ci siano due limiti diversi,  $l_1$  e  $l_2$  e si esamini la figura che segue.

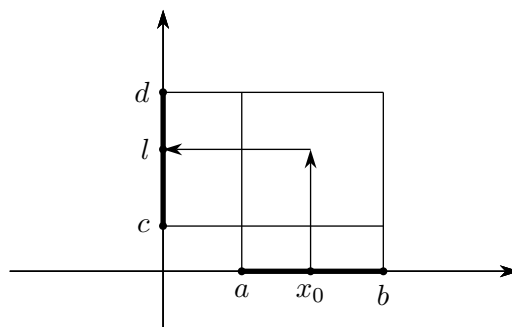


**Figura 3.11** *Unicità del limite*

È chiaro che le frecce lanciate dai punti tra  $a_2$  e  $b_1$  dovrebbero cadere *contemporaneamente* in  $]c_1, d_1[$  e  $]c_2, d_2[$ , cosa palesemente impossibile. □

**Teorema 3.9** (Permanenza del segno). *Se una funzione ha un limite positivo, per  $x$  tendente a  $x_0$ , la funzione è positiva in un intorno del punto  $x_0$ . Discorso complementare se il limite è negativo.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che il limite  $l$  sia positivo, ed esaminiamo la figura che segue, che non ha bisogno di commenti.



**Figura 3.12** *Permanenza del segno*

□

Osserviamo esplicitamente che se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0,$$

allora la funzione può essere positiva nei pressi di  $x_0$ , e allora diremo che il limite è “zero positivo”, o  $0^+$ , negativa nei pressi di  $x_0$ , e allora diremo che il limite è “zero negativo”, o  $0^-$ , o infine può cambiare di segno nei pressi di  $x_0$  e allora diremo che il limite è 0, senza precisare “positivo” o “negativo”. I tre grafici della figura seguente illustrano tre situazioni possibili.

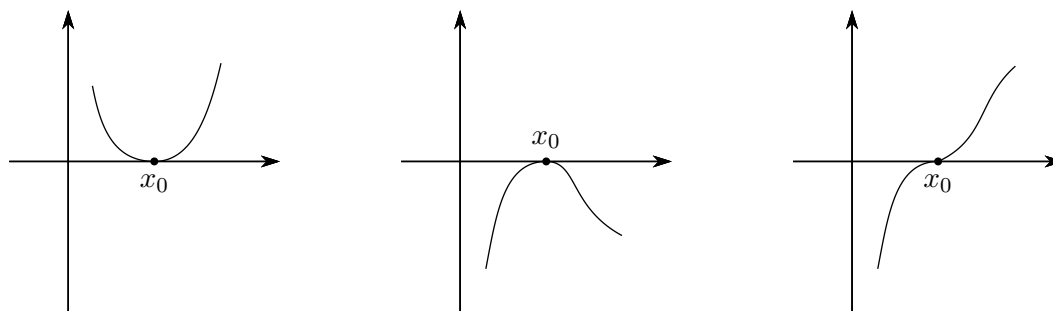


Figura 3.13  $0^+$ ,  $0^-$ ,  $0$  “senza segno”

### Limite destro e limite sinistro

Molto spesso, nei problemi di limite, è utile limitarsi a considerare solo le  $x$  del dominio di una funzione che si trovano “a destra” di  $x_0$ , oppure “a sinistra”, di  $x_0$ . Parleremo allora di *limite destro* e *limite sinistro*, e scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l.$$

Se riesaminiamo il terzo grafico della precedente figura 3.13 alla luce di questa definizione, potremo dire che la funzione ha limite  $0^-$  a sinistra e  $0^+$  a destra. Purtroppo però, quando una funzione ha limite  $0$  “senza segno”, non è affatto detto che il limite sia  $0^-$  a sinistra e  $0^+$  a destra o viceversa: le situazioni possono essere molto più complesse. Proponiamo solo un esempio grafico, senza commenti, relativo alla funzione

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}.$$

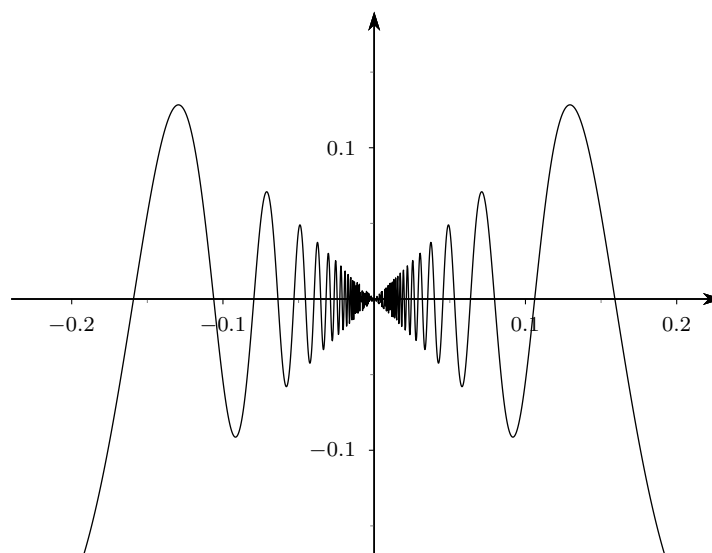
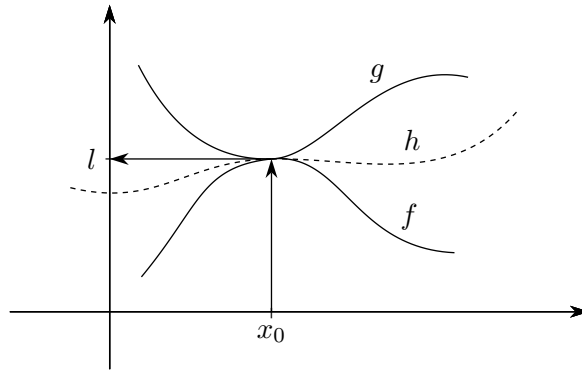


Figura 3.14 La funzione  $x \sin \frac{1}{x}$

**Teorema 3.10** (Del confronto o dei due carabinieri). *Se due funzioni  $f$  e  $g$  hanno lo stesso limite  $l$  per  $x$  tendente a  $x_0$ , anche una funzione  $h$  che sia compresa tra le due ha lo stesso limite.*



*Dimostrazione.* È sufficiente esaminare la figura che segue.



**Figura 3.15** Il teorema dei due carabinieri

□

### 3.7 Funzioni continue

**Definizione 3.11.** Sia data una funzione  $f$ , di dominio  $D$ , e sia  $x_0$  un punto di accumulazione per  $D$ . La funzione  $f$  si dice continua in  $x_0$  se

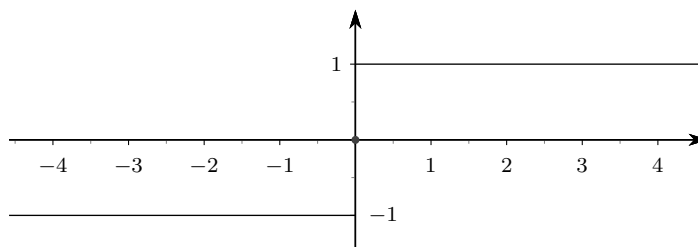
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Si dimostra, non senza qualche difficoltà, che tutte le funzioni elementari che abbiamo considerato nel capitolo 2 sono continue in tutti i punti del loro dominio.

È parimenti possibile dimostrare che anche le altre funzioni elementari che non abbiamo considerato sono continue in tutti i punti del loro dominio: si tratta di tutte le funzioni polinomiali, razionali fratte, contenenti radicali, potenze con esponente di vario tipo, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche, e quelle che si ottengono per somma, sottrazione, prodotto, quoziente e composizione di queste in tutti i modi possibili. Per ottenere funzioni non continue, al livello del nostro corso, bisogna ricorrere alle funzioni definite a tratti, come la funzione, detta funzione segno, o signum, definita come segue:

$$(3.4) \quad \text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases},$$

il cui grafico è riportato nella figura che segue.



**Figura 3.16** La funzione segno

Questa funzione non è continua nel punto 0 del suo dominio.

In primissima approssimazione si può dire che una funzione è continua se il suo grafico non presenta “strappi”: l’affermazione andrebbe però precisata in dettaglio, ma ciò esula dagli scopi di questo corso.

### 3.8 Il calcolo dei limiti

Per il calcolo dei limiti delle funzioni continue, per  $x$  tendente a punti del dominio, non ci sono problemi, in quanto si può “eseguire una semplice sostituzione”. Negli altri casi esistono numerose strategie e noi esamineremo in questo corso solo le più semplici.

Cominciamo con l’elencare alcuni risultati relativi alle funzioni elementari, nel caso di limiti per  $x$  tendente a punti non appartenenti al dominio; la quasi totalità di questi risultati sono intuitivi o di immediata verifica.

1.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a > 1 \\ 0, & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{se } a > 1 \\ +\infty, & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$ .

Poiché saremo interessati principalmente al caso che la base delle funzioni esponenziali sia il numero  $e$ , scriveremo brevemente questi risultati nel seguente modo:

$$e^{+\infty} = +\infty, \quad e^{-\infty} = 0.$$

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a > 1 \\ -\infty, & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{se } a > 1 \\ +\infty, & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$ .

Poiché saremo interessati principalmente al caso che la base delle funzioni logaritmo sia il numero  $e$ , scriveremo brevemente questi risultati nel seguente modo:

$$\ln(+\infty) = +\infty, \quad \ln(0^+) = -\infty.$$

6.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin x \nexists$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x \nexists$ .

Successivamente riportiamo il risultato di alcuni teoremi che riguardano il calcolo di limiti importanti (*limiti notevoli*).

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (si tratta di un teorema che formalizza un risultato che avevamo già intravisto in uno degli esempi proposti all’inizio del capitolo).
2.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ . A proposito di questo fondamentale limite si noti che esso si riferisce a una funzione esponenziale in cui sia la base che l’esponente sono variabili. Per trattare queste funzioni è, in generale, conveniente usare la seguente formula, conseguenza immediata della definizione di logaritmo:

$$(3.5) \quad (f(x))^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)},$$

formula che permette di ottenere una funzione esponenziale vera e propria, cioè in cui solo l'esponente è variabile.

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1.$$

Infine segnaliamo l'uso delle regole di calcolo sulla retta reale estesa, regole di calcolo che sono state proprio definite nella previsione di un loro uso nel calcolo dei limiti: ognuna di quelle regole costituisce in realtà un apposito teorema sui limiti. Per esempio la regola

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad a + (+\infty) = +\infty$$

traduce in formule la tesi del seguente teorema: Date due funzioni  $f$  e  $g$ , tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty,$$

si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + g(x) = +\infty.$$

Naturalmente i casi più interessanti saranno quelli in cui quelle regole di calcolo non sono direttamente applicabili: in quei casi occorrerà applicare opportune strategie, di cui esamineremo solo alcuni esempi semplici. Segnaliamo comunque nuovamente che il problema del calcolo dei limiti è in generale un problema molto complesso che spesso richiede lunghe e faticose elaborazioni (non alla portata del nostro corso).

### 3.9 Esempi di calcolo dei limiti

*Esempio.* Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot x = (+\infty)(+\infty) = +\infty,$$

dove abbiamo applicato uno dei risultati prima menzionati e le regole di calcolo sulla retta reale estesa.

*Esempio.* Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x = (+\infty) - (+\infty) = ?$$

Applicando le regole di calcolo sulla retta reale estesa non si giunge ad alcuna conclusione. Si può però procedere nel seguente modo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) = (+\infty) \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right) = (+\infty)(1 - 0) = +\infty :$$

questa volta le regole di calcolo hanno funzionato. La tecnica applicata in questo esempio è standard, e funziona normalmente in caso di polinomi o quozienti di polinomi (funzioni razionali fratte), per  $x$  tendente a  $\pm\infty$ .

*Esempio.* Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{3x^2 + x + 2}.$$

Provando ad applicare le solite regole di calcolo non si ottiene nulla, in quanto subito al numeratore si ottiene la forma  $\infty - \infty$ . Applichiamo la tecnica suggerita nell'esempio precedente, raccogliendo  $x^2$  sia al numeratore che al denominatore. Si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{3x^2 + x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{\cancel{x^2} \left( 3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = \frac{\left( 1 - \frac{1}{+\infty} + \frac{1}{(+\infty)^2} \right)}{\left( 3 + \frac{1}{+\infty} + \frac{2}{(+\infty)^2} \right)} = \frac{1 - 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \frac{1}{3}.$$

*Esempio.* Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - x^2 + x + 3}{2x^2 + x + 1}.$$

Anche qui l'applicazione delle regole di calcolo non produce alcun risultato. Raccogliamo allora  $x^3$  al numeratore e  $x^2$  al denominatore (cioè le rispettive potenze di grado massimo). Si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - x^2 + x + 3}{2x^2 + x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x^3} \left( 3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)}{\cancel{x^2} \left( 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left( 3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)}{\left( 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \\ &= \frac{(-\infty) \left( 3 - \frac{1}{-\infty} + \frac{1}{(-\infty)^2} + \frac{3}{(-\infty)^3} \right)}{\left( 2 + \frac{1}{-\infty} + \frac{1}{(-\infty)^2} \right)} = \frac{(-\infty)(3 - 0 + 0 + 0)}{2 + 0 + 0} = \frac{-\infty}{2} = -\infty. \end{aligned}$$

*Esempio.* Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x^2 + x}.$$

Procedendo come già visto sopra, si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x^2} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{1 - \frac{1}{+\infty}}{(+\infty) \left( 1 + \frac{1}{+\infty} \right)} = \frac{1 - 0}{(+\infty)(1 + 0)} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

*Esempio.* Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2}.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{x} = 1 \cdot \frac{1}{0^+} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

*Esempio.* Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^2}.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{x} = 1 \cdot \frac{1}{0^-} = 1 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Esempio. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x}.$$

Si ha

$$\ln 1^+ = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Esempio. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0},$$

per cui i calcoli sulla retta reale estesa non possono essere usati. Osserviamo però che

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1),$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x + 1 = 3.$$

Esempio. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - x}{(x - 2)^2}.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - x}{(x - 2)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$

Esempio. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1 - x}{(x - 2)^2}.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1 - x}{(x - 2)^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty.$$

### 3.10 Qualche ulteriore esempio di funzione discontinua

Abbiamo detto che tutte le funzioni costruibili con le operazioni elementari, l'estrazione di radice, le funzioni seno, coseno, esponenziali e logaritmiche sono continue in tutto il loro dominio. Molte funzioni discontinue sono però importanti nelle applicazioni. Oltre alla funzione *sgno*, di cui abbiamo già parlato, segnaliamo anche altre due funzioni, normalmente implementate di default in tutti i programmi di calcolo e tra le funzioni di base dei linguaggi informatici.

1. La funzione *floor*, detta anche *parte intera*. Essa è definita nel seguente modo:

$\text{floor}(x)$  è l'approssimazione per difetto di  $x$  all'intero precedente.

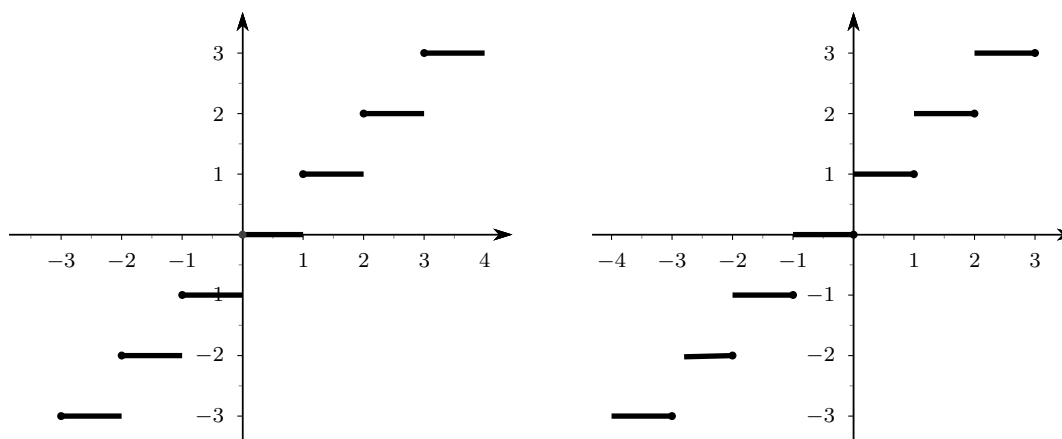
In molti testi questa funzione è indicata con  $[x]$ , simbolo che ci pare da evitare perchè fonte di confusione. Un altro simbolo frequente, e molto opportuno, è invece  $\lfloor x \rfloor$ .

2. La funzione *ceil*. Questa funzione è la complementare della precedente ed è definita nel seguente modo:

$\text{ceil}(x)$  è l'approssimazione per eccesso di  $x$  all'intero seguente.

Un simbolo frequente, e anch'esso quanto mai opportuno, per questa funzione è  $\lceil x \rceil$ .

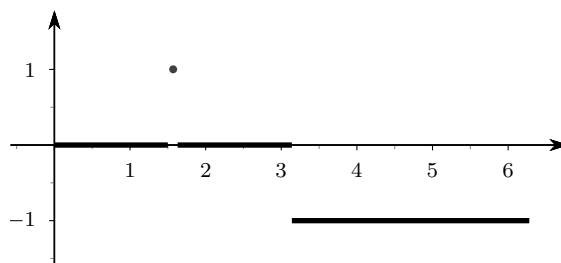
Queste due funzioni sono due cosiddette *funzioni a gradino*, e il loro grafico rende perfettamente conto della nomenclatura.



**Figura 3.17** Le funzioni floor (a sinistra) e ceil (a destra).

Combinando queste funzioni con altre funzioni elementari si possono ottenere grafici molto interessanti. Proponiamo alcuni esempi, invitando lo studente a implementarli in un software come Geogebra.

1.  $\text{sgn}(\sin(x))$ .
2.  $\text{sgn}(\sin(1/x))$  (per vedere bene l'effetto fare un grosso zoom sull'asse  $x$ ).
3.  $(x + 1)\text{sgn}(x)$ .
4.  $x + \text{sgn}(x)$ .
5.  $\text{floor}(\sin x)$ . Il grafico ottenuto in un caso come questo (anche con software molto sofisticati, come Mathematica) non rende conto della situazione effettiva. Ne proponiamo qui di seguito una rappresentazione "aggiustata manualmente".



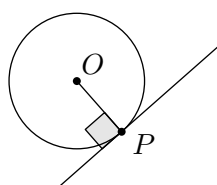
**Figura 3.18** Didascalia

# 4 Derivate

## 4.1 Tangenti a una circonferenza e tangenti a una curva

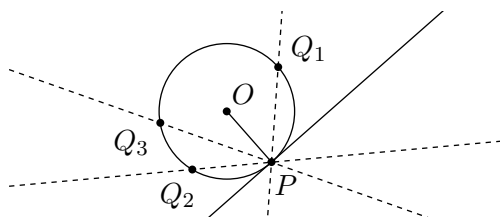
Prima di affrontare il problema della derivazione di una funzione, è opportuno richiamare il concetto di tangente a una circonferenza, evidenziandone i passi salienti. Ci sono sostanzialmente tre modi per definire la tangente a una circonferenza, di cui indicheremo con  $O$  il centro.

1<sup>a</sup> *definizione* La tangente a una circonferenza in un suo punto  $P$  è la perpendicolare per  $P$  al raggio  $OP$ .



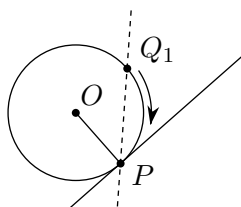
**Figura 4.1** *Tangente a una circonferenza: la perpendicolare al raggio*

2<sup>a</sup> *definizione* La tangente a una circonferenza in un punto  $P$  è l'unica retta per  $P$  avente in comune con la circonferenza solo il punto  $P$ .



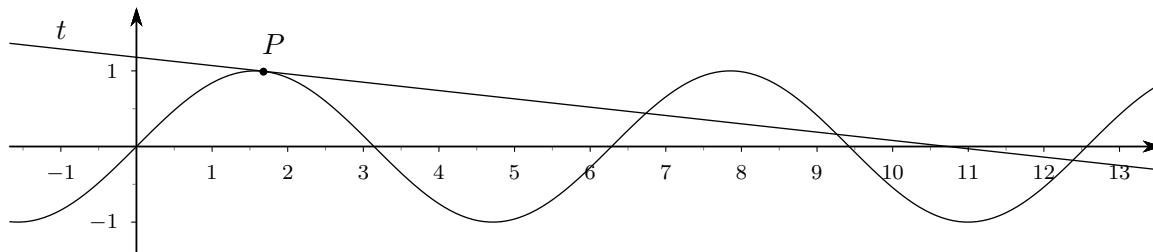
**Figura 4.2** *Tangente a una circonferenza: l'unica retta avente un solo punto in comune con la circonferenza*

3<sup>a</sup> *definizione* La tangente a una circonferenza in un suo punto  $P$  si ottiene da un “processo al limite”: considerata la secante per  $P$  e un altro punto  $Q$ , se si fa tendere  $Q$  a  $P$ , la “posizione limite” è quella della tangente; si usa anche dire che la tangente è una “secante passante per due punti coincidenti”, ma l’espressione, almeno enunciata così brutalmente, non ha senso, perché due punti coincidenti sono un unico punto e di rette per un punto ce ne sono infinite.



**Figura 4.3** *Tangente a una circonferenza: la posizione limite della secante*

Ci possiamo ora porre il problema: è possibile estendere le definizioni precedenti a una curva generica che non sia una circonferenza? Sicuramente la prima definizione non può essere usata in generale, perché una curva generica non ha un centro e un raggio; purtroppo nemmeno la seconda definizione può essere usata. Se si esamina il grafico che segue, la retta  $t$  ha, intuitivamente, il diritto di essere chiamata tangente alla curva (grafico del seno) nel punto  $P$ , ma essa ha ben più di un punto in comune con la curva.



**Figura 4.4** Tangente alla funzione seno in un punto  $P$

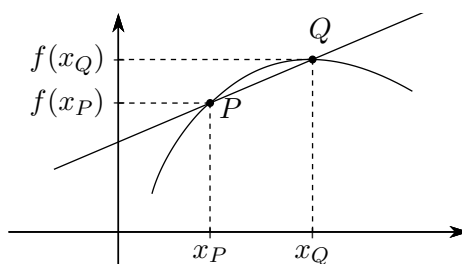
La definizione che può invece essere estesa al caso generale è la terza e questa generalizzazione conduce al concetto di derivata.

## 4.2 Derivata e tangente al grafico di una funzione

Sia data, nel piano cartesiano, una curva di equazione  $y = f(x)$  (cioè il grafico di una funzione reale di variabile reale). Su questa curva fissiamo un punto  $P(x_P, y_P) = (x_P, f(x_P))$ . Il problema di cui vogliamo occuparci è il seguente: è possibile dare una definizione formalmente ineccepibile di tangente alla curva, sulla falsariga di quanto fatto nel caso della circonferenza (3<sup>a</sup> definizione), e, in caso di risposta affermativa, è possibile costruire un algoritmo generale per trovare l'equazione di questa retta tangente (anzi, ci basterà il coefficiente angolare, perché ovviamente la tangente, se esiste, passerà per  $P$ ).

Ricordiamo che, se si hanno due punti  $P(x_P, y_P)$  e  $Q(x_Q, y_Q)$ , aventi diversa ascissa, cioè non appartenenti a una retta verticale, la retta per i due punti ha coefficiente angolare

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



**Figura 4.5** Secante a una curva per due punti

Se ora consideriamo una funzione di equazione  $y = f(x)$  e un punto  $P(x_P, f(x_P))$ , per trovare la tangente in  $P$  possiamo procedere prendendo un secondo punto  $Q(x_Q, f(x_Q))$  sul grafico e tracciando la retta per  $P$  e  $Q$ , detta *retta secante*, la quale avrà coefficiente angolare

$$(4.1) \quad m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$



**Definizione 4.1.** Il rapporto  $\Delta f/\Delta x$ , definito nella formula (4.1) si chiama rapporto incrementale della funzione  $f$  relativo al punto  $x_P$  e all'incremento  $h = x_Q - x_P = \Delta x$ .

Se ora prendiamo il punto  $Q$  “sempre più vicino a  $P$ ”, la secante si avvicina sempre più a quella che, intuitivamente, ci pare la miglior candidata a essere definita retta *tangente*.

In generale indicheremo con  $x_0$ , o genericamente con  $x$ , l'ascissa del punto  $P$  e con  $x_0 + h$  l'ascissa del punto  $Q$ . Il rapporto incrementale si scriverà allora

$$(4.2) \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

**Definizione 4.2.** Data una funzione di equazione  $y = f(x)$ , definita in tutto un intorno  $I_{x_0}$  di un punto  $x_0$  del dominio, si dice derivata prima della funzione  $f$  nel punto  $x_0$ , e si indica con

$$f'(x_0), \text{ oppure } Df(x_0),$$

il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale, al tendere di  $Q$  a  $P$

$$(4.3) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

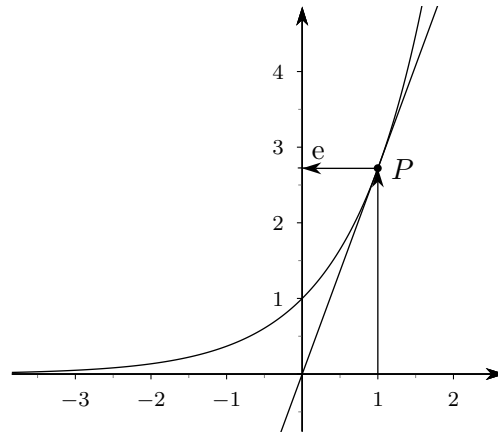
In questo caso (cioè se il limite (4.3) esiste finito), la funzione si dice derivabile in  $x_0$ .

*Esempio.* Calcoliamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione  $f(x) = e^x$ , nel punto di ascissa 1. Per il coefficiente angolare si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+h} - e}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^1 e^h - e}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e e^h - e}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e \frac{e^h - 1}{h} = e \cdot 1 = e.$$

Se teniamo conto che la retta deve passare per  $P(1, e)$ , otteniamo

$$y - e = e(x - 1) \Rightarrow y = e x.$$



**Figura 4.6** Tangente alla funzione  $e^x$  nel punto di ascissa 1

In generale non è indispensabile impostare il procedimento di calcolo del limite sulla base di un punto  $x_0$  fissato: è possibile ricavare il coefficiente angolare della retta tangente a una curva di equazione  $y = f(x)$  in un punto di ascissa  $x_0$  qualsiasi. Così facendo si otterrà una espressione dipendente da  $x_0$ , e non più un singolo valore numerico. Questa espressione si chiama la *funzione derivata prima*, o semplicemente *funzione derivata* o a volte addirittura solo *derivata*. In generale, se non c'è possibilità di equivoco, in questi casi si scrive semplicemente  $x$  al posto di  $x_0$ .

**Definizione 4.3.** Data una funzione  $f$ , definita in un intervallo  $I$ , si dice funzione derivata prima di  $f$  la funzione  $f'$  espressa da

$$(4.4) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

nei punti di ascissa  $x \in I$  per i quali tale limite esiste finito.

*Esempio.* Riprendiamo in esame la funzione esponenziale dell'esempio precedente, e calcoliamo la derivata in un punto  $x$  generico:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - e^0}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Naturalmente se al posto di  $x$  mettiamo il numero 1, come nell'esempio precedente, otteniamo nuovamente il numero  $e$ .

*Esempio.* Calcolare la derivata di  $f(x) = x^3$ . Si ha

$$D(x^3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2.$$

Ribadiamo che questo risultato significa che

in corrispondenza all'ascissa

...  
 $x = -2$   
 $x = -1$   
 $x = 0$   
 $x = 1$   
 $x = 2$   
 $x = 3$   
 ...

il grafico di  $f(x) = x^3$  ammette retta tangente con coefficiente angolare

...  
 $m = f'(-2) = 3(-2)^2 = 12$   
 $m = f'(-1) = 3(-1)^2 = 3$   
 $m = f'(0) = 3(0)^2 = 0$   
 $m = f'(1) = 3(1)^2 = 3$   
 $m = f'(2) = 3(2)^2 = 12$   
 $m = f'(3) = 3(3)^2 = 27$   
 ...

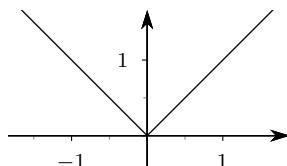
Anche per le derivate, trattandosi di un procedimento di limite, si potranno considerare separatamente il limite destro e il limite sinistro: si parlerà in questo caso di *derivata destra* e *derivata sinistra*.

*Esempio.* Sia data la funzione  $f(x) = |x|$  e vediamo cosa succede per  $x = 0$ , separando il caso in cui per l'incremento  $h$  si ha  $h < 0$  ( $h \rightarrow 0^-$ ), da quello in cui si ha  $h > 0$  ( $h \rightarrow 0^+$ ):

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

Questo risultato ha una evidente interpretazione grafica: la tangente sulla sinistra di 0 ha coefficiente angolare  $-1$ , sulla destra 1:



**Figura 4.7** La funzione valore assoluto

In situazioni come quella appena vista si parla di *punto angoloso*: la derivata destra e quella sinistra sono entrambe finite, ma diverse.

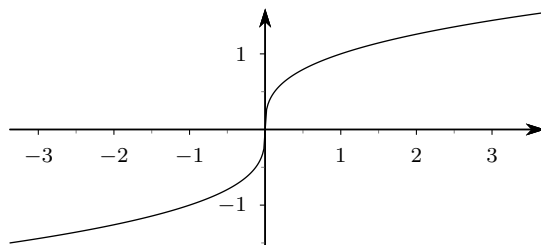
La derivabilità di una funzione in un punto è legata alla continuità. Si dimostra infatti il seguente teorema:

**Teorema 4.4.** *Se una funzione è derivabile in un punto  $x_0$  è anche continua in  $x_0$ .*

Non è vero il viceversa di questo teorema: una funzione può essere continua senza essere derivabile, come dimostra l'esempio della funzione valore assoluto.

*Esempio.* Nella definizione di derivata abbiamo chiesto che il limite del rapporto incrementale fosse finito: ci sono diversi motivi per fare questo (e la maggior parte di questi esulano dagli scopi di questo corso). Segnaliamo solo che si può presentare il caso che la tangente al grafico di una funzione può benissimo essere una retta verticale e, si sa, le rette verticali hanno la cattiva abitudine di non avere un coefficiente angolare. Come esempio consideriamo la funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  e calcoliamo il limite del rapporto incrementale nell'origine.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0+h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt[3]{h^3}} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{h}{h^3}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



**Figura 4.8** La funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Nella tabella 4.1 sono proposte, senza dimostrazione, le regole di derivazione più importanti, riguardanti la somma, il prodotto, ecc. di funzioni derivabili.

<i>Funzione</i>	<i>Derivata</i>
$k \cdot f(x)$	$k \cdot f'(x)$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

**Tabella 4.1** Regole di derivazione

È opportuno evidenziare in dettaglio l'uso dell'ultima formula della tabella 4.1, che si riferisce alla regola di derivazione della composta di due funzioni. Come al solito ragioniamo su un esempio. Abbiamo già provato, in un esempio a pagina 62 e nell'esempio successivo, che la derivata di  $f(x) = e^x$  è  $f'(x) = e^x$ , e che la derivata di  $g(x) = x^3$  è  $g'(x) = 3x^2$ . Se ora consideriamo la composta delle due funzioni

$$h(x) = f(g(x)) = e^{g(x)} = e^{x^3},$$

la derivata sarà

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = e^{x^3} 3x^2 = 3x^2 e^{x^3}.$$

Nella tabella 4.2 proponiamo le regole per derivare le funzioni di uso più comune, ancora senza dimostrazione.

<i>Funzione</i>	<i>Derivata</i>
$k$	0
$x^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x \in \mathbb{R}$	$nx^{n-1}$
$x^n, n \in \mathbb{Z}, n < 0, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$nx^{n-1}$
$x^a, a \in \mathbb{R}, x > 0$	$ax^{a-1}$
$a^x$	$a^x \cdot \ln a$
$e^x$	$e^x$
$\log_a  x $	$\frac{1}{x} \cdot \log_a e$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f^a(x)$	$a f^{a-1}(x) \cdot f'(x)$
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} (\ln a) f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} f'(x)$
$\log_a f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e$
$\ln f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\sin f(x)$	$\cos f(x) \cdot f'(x)$

*Continua nella pagina successiva*

Segue dalla pagina precedente

<i>Funzione</i>	<i>Derivata</i>
$\cos f(x)$	$-\sin f(x) \cdot f'(x)$
$\operatorname{tg} f(x)$	$(1 + \operatorname{tg}^2 f(x)) f'(x) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$	$e^{g(x) \ln f(x)} \left( g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$

**Tabella 4.2** Derivate delle funzioni più comuni

Si noti che la regola di derivazione delle potenze è sempre la stessa, quello che cambia è il dominio della funzione potenza. La regola che riguarda il caso in cui l'esponente sia un numero reale qualunque va bene anche per il caso dei radicali, e qui bisogna tenere conto che se l'indice è pari, la  $x$  deve essere maggiore di 0, se l'indice è dispari, la  $x$  può essere anche minore di 0. Esattamente come succede nel caso della radice cubica, se  $x = 0$  le funzioni radice non risultano derivabili<sup>(1)</sup>. Riportiamo in dettaglio le formule nei due casi che più ci interesseranno, cioè quello della radice quadrata e della radice cubica.

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad ; \quad f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} .$$

*Esempi.*

1. Calcolare la derivata di

$$\sin(x^2 + x) .$$

Si ha

$$(\sin(x^2 + x))' = (2x + 1) \cos(x^2 + x) .$$

2. Calcolare la derivata di

$$(x^2 + 5)^{27} .$$

Si ha

$$((x^2 + 5)^{27})' = 27(x^2 + 5)^{26}(2x) = 54x(x^2 + 5)^{26} .$$

3. Calcolare la derivata di

$$\frac{x^2}{x^3 + x^2 - 1} .$$

Si ha

$$\left( \frac{x^2}{x^3 + x^2 - 1} \right)' = \frac{2x(x^3 + x^2 - 1) - x^2(3x^2 + 2x)}{(x^3 + x^2 - 1)^2} = \dots$$

4. Calcolare la derivata di

$$\ln(\sin x^2) .$$

Si ha

$$(\ln(\sin x^2))' = \frac{1}{\sin x^2} (\cos x^2) 2x .$$

Si noti, in questo esempio, l'applicazione ripetuta della regola di derivazione delle funzioni composte.

---

<sup>1</sup>Si può osservare che il caso delle potenze è abbastanza complesso: prestare la massima attenzione!

### 4.3 Derivate successive

Poiché la funzione derivata prima è a sua volta una funzione, ci si può chiedere se essa sia derivabile oppure no. Nei casi delle funzioni elementari che a noi interessano la risposta è affermativa e conduce al concetto di derivata seconda, terza, ecc., indicate con i simboli

$$f''(x) \left( D^2(f(x)) \right), \quad f'''(x) \left( D^3(f(x)) \right), \quad f^{iv}(x) \left( D^4(f(x)) \right), \quad f^{(n)}(x) \left( D^{(n)}(f(x)) \right)$$

*Esempi.*

1. Calcolare la derivata 3<sup>a</sup> di  $f(x) = e^x$ . Si ha, facilmente,  $f'''(x) = e^x$ .
2. Calcolare le derivate prima, seconda, ecc.,  $(n+1)$ -esima di  $f(x) = x^n$ . Si ha

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2}, \quad f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}, \\ \dots, \quad f^{(n)}(x) = n(n-1) \cdots 1 = n!, \quad f^{n+1}(x) = 0.$$

## 5 Grafici di funzioni

L'introduzione del concetto di derivata si rivela un importante successo per risolvere il problema di studiare le proprietà delle funzioni, fino a giungere al tracciamento di un grafico significativo. La parte dell'analisi che studia le proprietà delle funzioni che si possono ricavare sulla base delle loro derivate si chiama *calcolo differenziale*. Tale importante settore della matematica si basa su alcuni teoremi classici, di alcuni dei quali (quelli più importanti ai nostri fini) ci limiteremo a fornire gli enunciati e una giustificazione grafica. Si tratta dei cosiddetti *teoremi fondamentali del calcolo differenziale*: i teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy. Conseguenza di questi teoremi è la famosa *regola di l'Hôpital* per il calcolo di limiti in forma indeterminata.

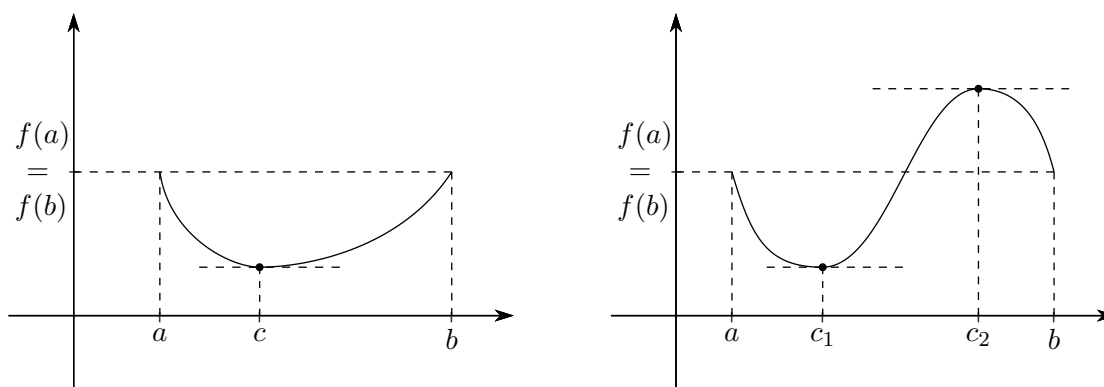
### 5.1 I teoremi fondamentali del calcolo differenziale

**Teorema 5.1** (Teorema di Rolle). *Sia  $f$  una funzione definita in un intervallo chiuso  $[a, b]$  e avente le seguenti proprietà:*

1.  $f$  è continua in  $[a, b]$  (compresi gli estremi!);
2.  $f$  è derivabile almeno in  $]a, b[$  (potrebbe non essere derivabile negli estremi, per esempio potrebbe avere derivata infinita negli estremi);
3.  $f(a) = f(b)$  (le "quote" iniziale e finale del grafico sono identiche).

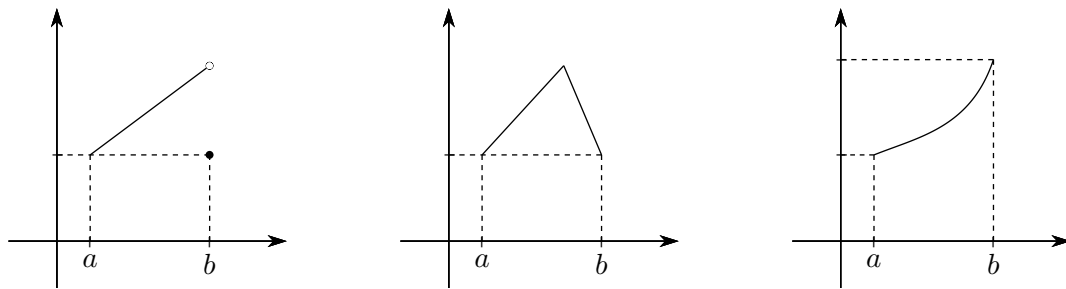
Allora esiste almeno un punto  $c$  interno ad  $[a, b]$  dove la derivata prima della funzione si annulla.

Le figure che seguono danno una giustificazione grafica di questo risultato, se si tiene conto che avere derivata nulla significa avere tangente orizzontale. Il punto (o i punti di cui parla il teorema si possono chiamare "*punti di Rolle*")



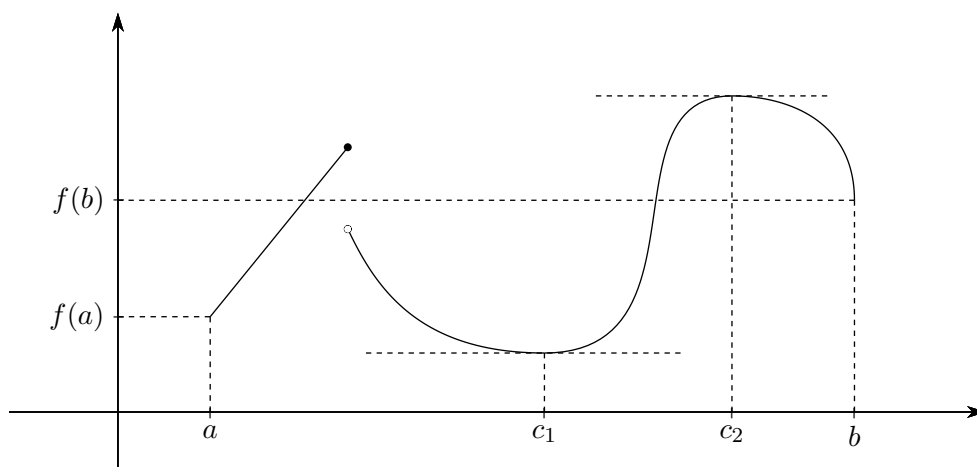
**Figura 5.1** Esempi di funzioni con uno e due "punti di Rolle"

Approfittiamo di questo teorema per fare delle osservazioni su che cosa significhi *condizione sufficiente*. Le tre condizioni presenti nell'enunciato di questo teorema sono delle condizioni sufficienti per la validità dello stesso. Infatti se anche una o più di queste condizioni manca, non si può concludere con la tesi, come dimostrano i tre grafici che seguono: nel primo manca solo l'ipotesi di continuità in tutto  $[a, b]$ , nel secondo manca solo l'ipotesi di derivabilità all'interno di  $[a, b]$ , nel terzo manca solo l'ipotesi che le quote agli estremi siano uguali. In tutti e tre i casi non esiste alcun punto di Rolle.



**Figura 5.2** Tre esempi di non applicabilità del Teorema di Rolle

Tutto questo non significa affatto che se mancano una o più delle tre condizioni presenti nell'enunciato del teorema non esiste alcun punto di Rolle, come mostra il seguente grafico, in cui mancano addirittura tutte e tre le condizioni, ma dove esistono addirittura due punti in cui il grafico ha tangente orizzontale.



**Figura 5.3** Un esempio in cui esistono punti di Rolle, nonostante le ipotesi non siano verificate

Il motivo di questo comportamento è da ricercarsi nel fatto che le condizioni per la validità del Teorema di Rolle *non sono necessarie*: anche se mancano, la tesi può essere ugualmente vera.

*Esempio.* Se una funzione soddisfa le ipotesi del teorema, almeno un punto di Rolle esiste sicuramente. Per trovarlo analiticamente basterà risolvere l'equazione, nell'incognita  $c$ ,  $f'(c) = 0$ .

Consideriamo la funzione, avente dominio l'intervallo  $[0, 1]$ ,

$$f(x) = 5x^3 - 5x^2 + 1.$$

Essa soddisfa chiaramente le ipotesi del teorema di Rolle, per cui deve esistere almeno un punto  $c$ , *interno* al dominio, dove  $f'(c) = 0$ . Per trovarlo basterà risolvere l'equazione

$$15c^2 - 10c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \vee c = \frac{2}{3}.$$

Solo il punto  $c = 2/3$  va bene, perchè l'altro è situato proprio sulla frontiera del dominio.

**Teorema 5.2** (Teorema di Lagrange). *Sia  $f$  una funzione definita in un intervallo chiuso  $[a, b]$  e avente le seguenti proprietà:*

1.  $f$  è continua in  $[a, b]$  (compresi gli estremi!);

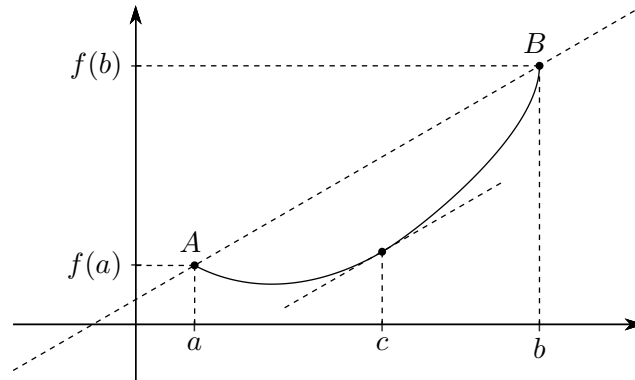


2.  $f$  è derivabile almeno in  $]a, b[$  (potrebbe non essere derivabile negli estremi, per esempio potrebbe avere derivata infinita negli estremi).

Allora esiste almeno un punto  $c$  interno ad  $[a, b]$  dove per la derivata prima della funzione si ha

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Siccome il numero  $(f(b) - f(a))/(b - a)$  è il coefficiente angolare della retta passante per i punti  $A = (a, f(a))$  e  $B = (b, f(b))$ , mentre  $f'(c)$  è il coefficiente angolare della tangente al grafico in un punto interno  $c$ , il teorema precedente si può interpretare geometricamente dicendo che esiste un punto interno al dominio dove la tangente è parallela alla secante passante per gli estremi. Si può vedere il grafico che segue per rendersi ancora meglio conto del senso di questa interpretazione.



**Figura 5.4** Interpretazione geometrica del Teorema di Lagrange

*Esempio.* Verifichiamo che la funzione  $f(x) = x^2 + x$  verifica, nell'intervallo  $[-1, 2]$ , il Teorema di Lagrange e determiniamo il, oppure i, “punti di Lagrange”.

La verifica delle ipotesi è immediata. Troviamo i punti di Lagrange. Si ha

$$f'(c) = 2c + 1;$$

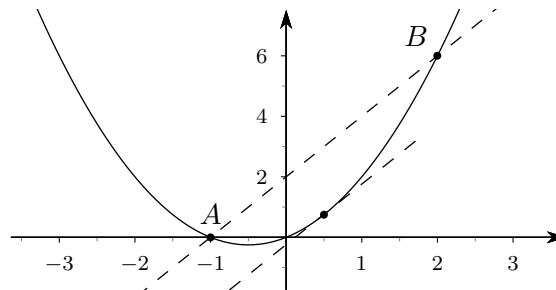
mentre

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{(4 + 2) - (1 - 1)}{3} = 2.$$

Deve dunque essere

$$2c + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2},$$

che è interno all'intervallo del dominio. Si veda la figura seguente, dove abbiamo usato diverse unità di misura sui due assi.



**Figura 5.5** Un esempio di applicazione del Teorema di Lagrange

Per le applicazioni sono importantissimi i seguenti tre corollari del teorema di Lagrange.

*Primo corollario* Se  $f$  è una funzione definita e continua in un intervallo  $[a, b]$  e ha derivata  $> 0$  in  $]a, b[$ , allora  $f$  è *crescente* in  $[a, b]$ ; se ha derivata  $< 0$  è invece *decrescente*. Per dimostrarlo basta osservare che se prendo due punti  $x_1$  e  $x_2$ , con  $x_1 < x_2$ , si ha

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1),$$

il contrario se la derivata è negativa.

*Secondo corollario* Se  $f$  è una funzione definita e continua in un intervallo  $[a, b]$  e ha derivata  $= 0$  in  $]a, b[$ , è costante in  $[a, b]$ . Per dimostrarlo basta prendere un punto  $x$  qualunque di  $[a, b]$  e osservare che si ha

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(a),$$

ovvero che  $f(x)$  si trova sempre alla stessa quota di  $f(a)$ .

*Terzo corollario* Se  $f$  e  $g$  sono due funzioni definite e continue in un intervallo  $[a, b]$  e con la stessa derivata in  $]a, b[$ , allora la funzione  $f - g$  è costante in  $[a, b]$ . Per dimostrarlo basta osservare che  $f - g$  ha derivata nulla in  $]a, b[$ .

**Teorema 5.3** (Teorema di l'Hôpital). *Siano date due funzioni  $f$  e  $g$  definite e continue in un intorno di un punto  $c$  (eventualmente anche  $\pm\infty$ ), derivabili almeno nei punti diversi da  $c$ , con  $g'(x)$  sempre diversa da zero. Sia inoltre*

$$1. \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0,$$

oppure

$$2. \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty \text{ (con qualunque segno).}$$

Allora per calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

che si presenta nella forma indeterminata  $0/0$  oppure  $\infty/\infty$ , si può provare a calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Se quest'ultimo limite esiste (finito o no), esiste anche quello del rapporto delle due funzioni e i due limiti sono identici.

*Esempio.* Il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$$

si presenta nella forma indeterminata  $+\infty/+\infty$ . Si ha poi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

e quindi anche

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Si usa abbreviare questo procedimento nel modo seguente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

A questo punto si può “cancellare la (H) sopra l'uguale” e concludere che il limite cercato vale  $+\infty$ .

La regola di l'Hôpital si può applicare anche più volte in successione.

*Esempio.*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

*Esempio.*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{6} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}.$$

La regola di l'Hôpital non sempre funziona in maniera così semplice, come prova l'esempio che segue.

*Esempio.*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{e^x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{e^x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^{2x}}{e^x} \stackrel{(H)}{=} \dots$$

ed è chiaro che proseguendo in questo modo non si ottiene nulla. Se però si osserva che

$$\frac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x,$$

si conclude subito che...

Tuttavia non insistiamo oltre su questo tipo di difficoltà.

## 5.2 Massimi e minimi per una funzione

**Definizione 5.4.** Sia data una funzione  $f$ , definita in un insieme  $D$ . Un punto  $x_0 \in D$  si dice punto di massimo relativo se esiste un intorno di  $x_0$  tale che per tutti i punti dell'intorno si abbia che

$$f(x) \leq f(x_0);$$

$x_0 \in D$  si dice invece punto di minimo relativo se esiste un intorno di  $x_0$  tale che per tutti i punti dell'intorno si abbia che

$$f(x) \geq f(x_0).$$

Se le disuguaglianze valgono in senso stretto (senza gli uguali), allora i punti si chiamano di massimo o minimo relativo proprio.

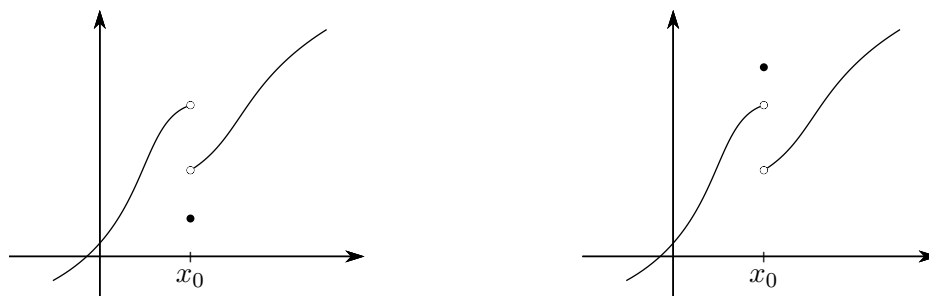
Il valore  $f(x_0)$  si dice un (valore) massimo o minimo relativo per la funzione.

Se le disuguaglianze considerate valgono in tutto il dominio, si parla di punto di massimo, o minimo, assoluto e di (valore) massimo o minimo assoluto

La ricerca dei massimi e minimi relativi o assoluti per una funzione riveste grande importanza nelle applicazioni. Siamo particolarmente interessati a questa ricerca nel caso di funzioni derivabili, definite in un intervallo  $I$ . In questo caso valgono i seguenti risultati, che sono sostanzialmente delle conseguenze dei teoremi fondamentali che abbiamo considerato.

1. Se un punto  $x_0$  è, per una funzione  $f$ , di massimo o minimo relativo interno ad  $I$ , allora  $f'(x_0) = 0$ .
2. Se una funzione è crescente a sinistra di  $x_0$  e decrescente a destra di  $x_0$ ,  $x_0$  è di massimo relativo.
3. Se una funzione è decrescente a sinistra di  $x_0$  e crescente a destra di  $x_0$ ,  $x_0$  è di minimo relativo.

L'esperienza ci aiuterà a trattare anche qualche caso più complesso di funzioni che non siano derivabili e/o continue in qualche punto. Segnaliamo comunque che in casi come questi possono anche presentarsi situazioni poco intuitive, come per esempio che una funzione sia crescente sia a sinistra che a destra di un punto e che in quel punto ci sia un minimo, o un massimo. Si vedano gli esempi grafici che seguono.

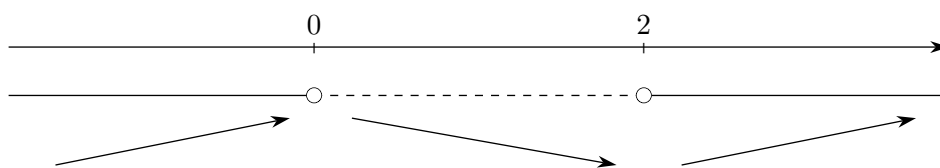


**Figura 5.6** Funzioni crescenti a sinistra e a destra di un punto, con minimo o massimo nel punto

Sulla scorta dei due esempi proposti, il lettore è invitato provare a costruire graficamente altre situazioni “patologiche”.

In situazioni standard potremo procedere come nell'esempio che segue.

*Esempio.* Per la funzione  $f(x) = x^3 - 3x^2$  si ha  $f'(x) = 3x^2 - 6x$ , da cui  $f'(x) > 0$  se  $x < 0$  oppure  $x > 2$ ,  $f'(x) < 0$  se  $0 < x < 2$ ,  $f'(x) = 0$  se  $x = 0$  oppure  $x = 2$ . Ripoteremo questi risultati in un grafico come il seguente.

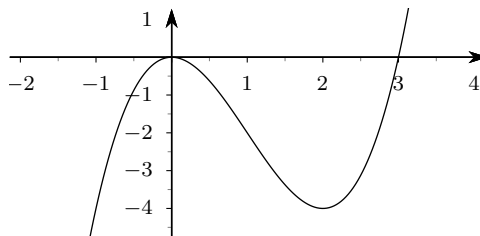


**Figura 5.7** Crescenza e decrescenza di una funzione

Se teniamo conto che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = -4,$$

possiamo ben renderci conto dell'andamento grafico della funzione stessa:

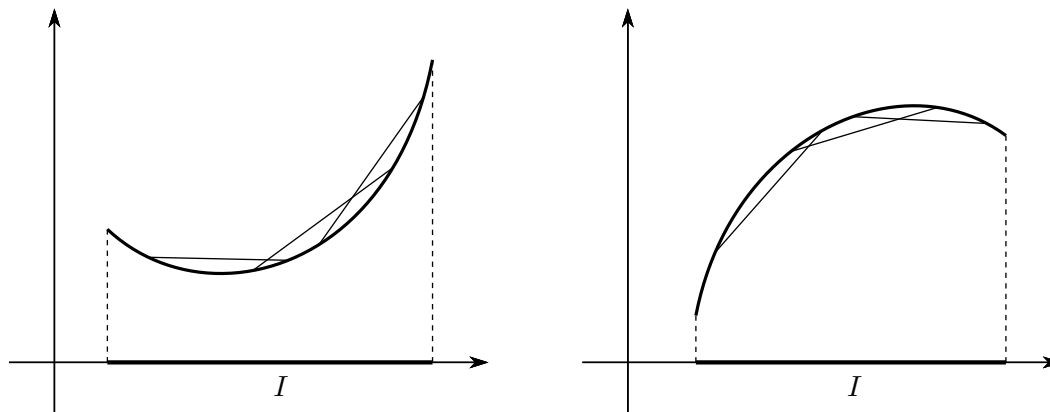


**Figura 5.8** Grafico della funzione  $f(x) = x^3 - 3x^2$

### 5.3 Funzioni convesse e concave

**Definizione 5.5.** Una funzione  $f$  si dice convessa in un intervallo  $I$  se presi comunque due punti  $x_1$  e  $x_2$  di  $I$  e considerato il segmento di estremi  $P_1 = (x_1, f(x_1))$  e  $P_2 = (x_2, f(x_2))$ , la parte del grafico di  $f$  corrispondente all'intervallo  $[x_1, x_2]$  sta tutta al di sotto di questo segmento.

**Definizione 5.6.** Una funzione  $f$  si dice concava in un intervallo  $I$  se presi comunque due punti  $x_1$  e  $x_2$  di  $I$  e considerato il segmento di estremi  $P_1 = (x_1, f(x_1))$  e  $P_2 = (x_2, f(x_2))$ , la parte del grafico di  $f$  corrispondente all'intervallo  $[x_1, x_2]$  sta tutta al di sopra di questo segmento.



**Figura 5.9** Funzioni convesse e concave in un intervallo

Per le funzioni derivabili due volte è possibile decidere se sono convesse o concave: si prova infatti che se una funzione ha  $f''(x) > 0$  in un intervallo  $I$ , allora è convessa in  $I$ , se invece ha  $f''(x) < 0$  in  $I$ , allora è concava in  $I$ .

**Definizione 5.7.** Sia  $f$  una funzione derivabile in un intervallo  $I$  e  $x_0$  un punto di  $I$ . Se esistono due intervalli del tipo  $[x_1, x_0]$  e del tipo  $[x_0, x_2]$  tali che la funzione sia convessa nel primo e concava nel secondo, oppure concava nel primo e convessa nel secondo, allora il punto  $x_0$  si dice punto di flesso o punto di inflessione per il grafico di  $f$ . La tangente al grafico nel punto  $(x_0, f(x_0))$  si dice tangente inflessionale.

È (abbastanza) evidente che se una funzione è derivabile due volte, la sua derivata seconda vale 0 in un punto di flesso.

La determinazione degli intervalli in cui una funzione è convessa oppure concava, e dei punti di flesso, migliora sensibilmente le informazioni sull'andamento grafico di una funzione, come mostra l'esempio che segue.

*Esempio.* Utilizzando le nozioni fin qui apprese, determiniamo i massimi, i minimi, i flessi e gli intervalli di crescita, decrescenza, concavità, convessità della funzione

$$f(x) = \frac{x}{e^x}.$$

Vogliamo inoltre tracciare un abbozzo del grafico, tenendo anche conto delle ulteriori informazioni che possiamo ricavare dal calcolo di opportuni limiti, e magari determinando esplicitamente alcuni punti significativi per i quali il grafico deve passare.

Cominciamo con il calcolare le derivate prima e seconda di  $f$ .

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{e^{\cancel{x}}(1-x)}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \frac{1-x}{e^x};$$

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot e^x - (1-x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^{\cancel{x}}(x-2)}{(e^x)^{\cancel{2}}} = \frac{x-2}{e^x}.$$

Se teniamo conto che  $e^x$  è una quantità sempre positiva, possiamo facilmente concludere che la derivata prima è positiva (funzione crescente) per  $x < 1$ , negativa (funzione decrescente) per  $x > 1$ , nulla (tangente orizzontale) per  $x = 1$ , dove avrà un punto di massimo (relativo) in quanto è prima crescente e poi decrescente (naturalmente la cosa è vera perchè la funzione non presenta “strappi” nel suo grafico!); per la derivata seconda si ha invece che è positiva (funzione convessa) per  $x > 2$ , negativa (funzione concava) per  $x < 2$ , nulla per  $x = 2$ , dove ha un punto di flesso in quanto a sinistra di 2 è concava, a destra è convessa. L’ordinata corrispondente all’ascissa 2 è  $2/e^2 \simeq 0.27$ , mentre la derivata per  $x = 2$  vale  $-1/e^2 \simeq -0.14$ : questo ci consente di scrivere subito l’equazione della tangente inflessionale,

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2), \quad \text{ovvero} \quad y - \frac{2}{e^2} = \frac{-1}{e^2}(x - 2)$$

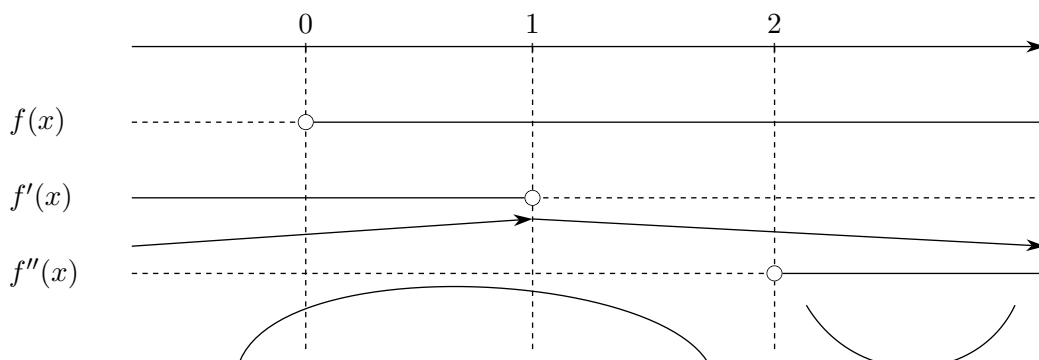
Per raffinare ulteriormente le informazioni a nostra disposizione relative al grafico di  $f$  calcoliamo anche i limiti per  $x$  tendente a  $-\infty$  e a  $+\infty$  per sapere “da dove parte” e “dove arriva” il grafico stesso.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \quad (\text{Ricordare il grafico di } e^x!!);$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Di solito è anche utile sapere se il grafico “sta sopra” oppure “sta sotto” all’asse  $x$ . Per fare questo basta controllare dove  $f(x)$  è positiva e dove è negativa. In questo caso la cosa è immediata:  $f(x)$  sta sopra all’asse  $x$  per  $x > 0$ , sta sotto all’asse  $x$  per  $x < 0$ , taglia l’asse delle  $x$  per  $x = 0$ .

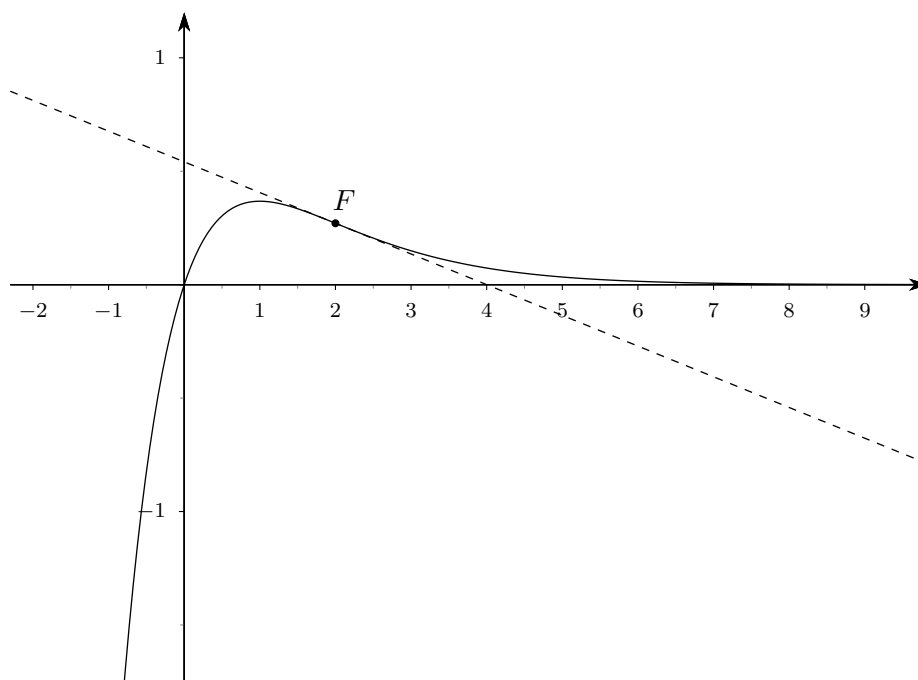
Conviene riportare tutti questi risultati in un diagramma che ci consentirà di tracciare facilmente un grafico significativo della funzione stessa. Nella pratica è conveniente costruire questo diagramma un po’ alla volta, man mano che si ottengono i vari risultati.



**Figura 5.10** Diagramma preparatorio allo studio della funzione  $f(x) = x/e^x$

Per tracciare un grafico il più corretto possibile ci serve ancora trovare l'ordinata del punto di massimo (massimo relativo ma anche assoluto in quanto la funzione non supera mai questo valore):

$$f(1) = \frac{1}{e} \simeq 0.37.$$



**Figura 5.11** Grafico di  $f(x) = x/e^x$  (Attenzione: unità di misura diverse sui due assi!)

### 5.4 Asintoti al grafico di una funzione

L'ultimo raffinamento che ci interesserà relativamente alla rappresentazione grafica di una funzione è quello della ricerca di particolari rette, dette *asintoti*, a cui il grafico stesso “si avvicina indefinitamente”. Ci sono tre tipi possibili di asintoti: verticali, orizzontali e obliqui.

1. Una retta verticale (cioè del tipo  $x = a$ , con  $a$  numero reale) è un *asintoto verticale* per una funzione se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$$

dove non ha importanza il segno di infinito.

2. Una retta orizzontale (cioè del tipo  $y = b$ , con  $b$  numero reale) è un *asintoto orizzontale* per una funzione se

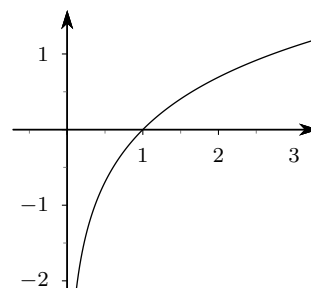
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

3. Una retta obliqua (cioè del tipo  $y = mx + q$ , con  $m \neq 0$ ) è un *asintoto obliquo* per una funzione se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0 \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0.$$

*Esempio.* La retta  $x = 0$  è un asintoto verticale per la funzione  $f(x) = \ln x$ , infatti si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

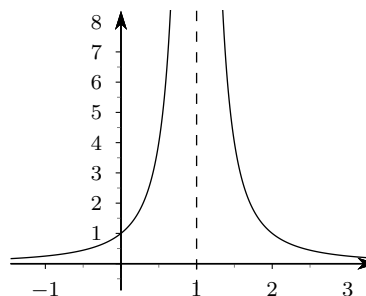


*Esempio.* La retta  $x = 1$  è un asintoto verticale per la funzione  $f(x) = 1/(x-1)^2$ , infatti si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

La retta  $y = 0$  è asintoto orizzontale per la stessa funzione, infatti si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{(x-1)^2} = 0.$$

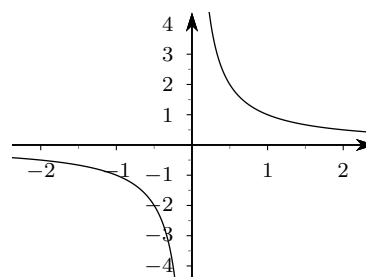


*Esempio.* La retta  $x = 0$  è un asintoto verticale per la funzione  $f(x) = 1/x$ , infatti si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \wedge \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

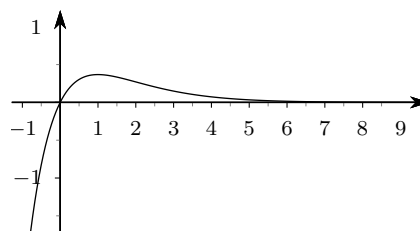
La retta  $y = 0$  è asintoto orizzontale per la stessa funzione, infatti si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$



*Esempio.* La retta  $y = 0$  è asintoto orizzontale per la funzione  $f(x) = x/e^x$ , infatti si ha

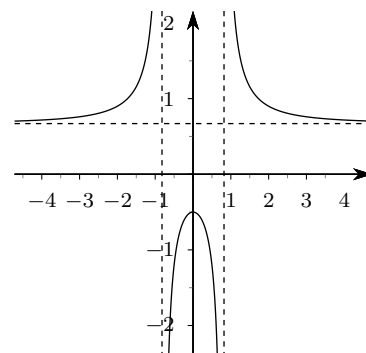
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$



*Esempio.* La retta  $y = 2/3$  è asintoto orizzontale per la funzione  $f(x) = (2x^2 + 1)/(3x^2 - 2)$ , infatti si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 1}{3x^2 - 2} = \frac{2}{3}.$$

Le rette  $x = \pm\sqrt{2/3}$  sono asintoti verticali per la stessa funzione, infatti...



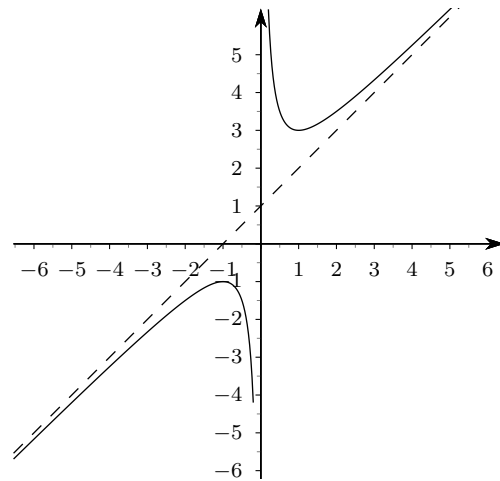


*Esempio.* La retta  $x = 0$  è asintoto verticale per la funzione  $f(x) = (x^2 + x + 1)/x$ , infatti si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^2 + x + 1}{x} = \pm\infty.$$

La retta  $y = x + 1$  è asintoto obliquo per la stessa funzione, infatti si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{(x^2 + x + 1)}{x} - (x + 1) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$



### Metodi pratici per la ricerca degli asintoti

*Asintoti verticali* Nei casi che ci interessano gli asintoti verticali si possono trovare (ma bisogna provare!) in presenza di funzioni fratte nei punti in cui si annulla il denominatore (punti che vanno esclusi dal dominio naturale), oppure in presenza di funzioni logaritmiche in punti in cui l'argomento del logaritmo si annulla.

*Asintoti orizzontali* Per ricercare questi asintoti basta fare i limiti per  $x \rightarrow \pm\infty$  (di solito separatamente a  $+\infty$  e a  $-\infty$ ): se uno almeno di questi limiti è finito e vale  $b$ , allora  $y = b$  è asintoto orizzontale.

*Asintoti obliqui* Si procede secondo il seguente schema:

1. Si calcola il limite, per  $x \rightarrow +\infty$ : se il limite è finito si ha un asintoto orizzontale e il gioco finisce; se il limite non c'è, il gioco finisce ugualmente.
2. Se il precedente limite è infinito si calcola il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} :$$

se questo limite è 0, infinito, o non esiste, tutto finisce.

3. Se il limite precedente è finito e diverso da zero, e lo indichiamo con  $m$ , si calcola il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] :$$

se questo limite è infinito o non esiste, tutto finisce. Se invece esso è finito (anche zero), e lo indichiamo con  $q$ , allora la retta

$$y = mx + q$$

è un asintoto obliquo.

4. Si ripete il tutto per  $x \rightarrow -\infty$ .

*Esempio.* Nella funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$$

il denominatore si annulla per  $x = 0$  e per  $x = 1$ . Si ha poi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{x} = 2,$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \pm\infty.$$

Dunque solo  $x = 0$  è asintoto verticale.

Si ha poi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = 1,$$

dunque  $y = 1$  è asintoto orizzontale.

*Esempio.* Nella funzione

$$f(x) = \ln(x + 2)$$

il dominio naturale è  $x > -2$ , e l'argomento del logaritmo si annulla per  $x = -2$ . Poiché si ha

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \ln(x + 2) = -\infty,$$

la retta  $x = -2$  è asintoto verticale. Si ha poi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 2) = +\infty;$$

dunque non ci sono asintoti orizzontali. Calcoliamo allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + 2)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+2}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0,$$

per cui non ci sono asintoti obliqui.

*Esempio.* Nella funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

il dominio naturale è  $x \neq 1$ . Poiché si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \pm\infty,$$

la retta  $x = 1$  è asintoto verticale. Si ha poi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \pm\infty,$$

per cui non ci sono asintoti orizzontali. Calcoliamo allora

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2 + 1}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} = \dots = 1 (= m)$$

Possiamo procedere con il calcolo:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{x^2 + 1}{x - 1} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + x}{x - 1} = \dots = 1,$$

dunque la retta  $y = x + 1$  è asintoto obliquo (e la cosa funziona sia a  $+\infty$  che a  $-\infty$ ).

Il lettore è invitato a controllare questi risultati usando, per esempio, Geogebra.

## 5.5 Conclusioni sul tracciamento del grafico di una funzione

Data una funzione  $f$ , per tracciarne il grafico si procede con il seguente schema.

1. Si determina il dominio naturale.
2. Si verifica quando la funzione è positiva, e quando è negativa e quando si annulla.
3. Si determinano tutti gli eventuali asintoti.
4. Si calcola la derivata prima e se ne deducono gli intervalli in cui la funzione è crescente o decrescente e, di conseguenza, i massimi e minimi.
5. Si calcola la derivata seconda e se ne deducono gli intervalli in cui la funzione è concava o convessa e, di conseguenza, i flessi.
6. Si calcola esplicitamente il valore della funzione in qualche punto notevole.
7. Si riportano i risultati su un grafico che deve esplicitare tutti i risultati trovati.

*Esempio.* Vogliamo tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

1. Il dominio naturale della funzione è  $x \neq 0$ .
2. La funzione è positiva per  $x > 0$ , negativa per  $x < 0$ , non si annulla mai.
3. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty,$$

dunque  $x = 0$  è asintoto verticale. Si ha poi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{0}{-\infty} = 0,$$

dunque  $y = 0$  è un asintoto orizzontale (valido solo a  $-\infty$ ). Invece

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty,$$

dunque dobbiamo calcolare anche il limite di  $f(x)/x$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty,$$

dunque non ci sono asintoti obliqui.

4. La derivata prima della funzione è

$$f'(x) = \frac{e^x x - e^x 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2},$$

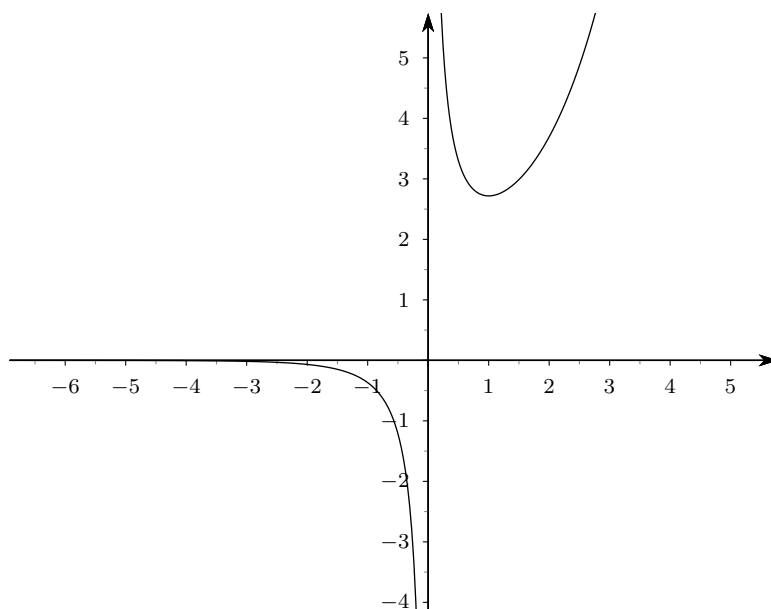
che è positiva per  $x > 1$ , negativa per  $x < 1$ , si annulla per  $x = 1$ . Dunque...

5. La derivata seconda della funzione è

$$f''(x) = \dots = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3},$$

che è positiva per  $x > 0$ , negativa per  $x < 0$  e non si annulla mai. Dunque...

6. Il valore della funzione nel punto di minimo relativo  $x = 1$  è  $f(1) = e$ .
7. Il grafico della funzione è allora il seguente.



**Figura 5.12** Grafico della funzione  $f(x) = e^x/x$

# 6 Integrali

## 6.1 Introduzione

Il calcolo integrale (per le funzioni reali di variabile reale), si occupa della risoluzione di due problemi, apparentemente indipendenti:

1. il calcolo dell'area di parti di piano qualsiasi (non solo dunque di poligoni o figure riconducibili a parti di cerchio);
2. la ricerca di funzioni che hanno una derivata assegnata.

Per quanto attiene ai contenuti di questo corso il primo problema sarà limitato al caso di figure piane "racchiuse" tra il grafico di funzioni di una variabile, che saranno sempre almeno continue; anche per il secondo problema ci limiteremo solo a trattare alcune situazioni molto semplici.

Il *Teorema fondamentale del calcolo integrale* stabilirà un legame molto stretto tra i due problemi indicati, almeno nei casi di funzioni continue a cui siamo interessati.

Come è ormai abitudine, prima di entrare nel vivo del discorso proponiamo alcuni esempi esplicativi.

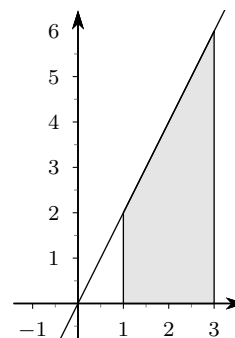
*Esempio.* Consideriamo la funzione  $f(x) = 2x$ , ristretta all'intervallo  $[1, 3]$ , il cui grafico è rappresentato nella figura qui a lato, e proponiamoci di calcolare l'area della regione evidenziata (compresa tra il grafico della funzione  $f$ , l'asse delle ascisse, e le due rette verticali  $x = 1$  e  $x = 3$ ).

La regione evidenziata è un trapezio rettangolo, di base minore lunga 2, base maggiore lunga 6 e altezza lunga 2: l'area misurerà dunque 8.

È molto facile anche trovare una funzione che abbia  $f$  come derivata: si tratta, per esempio, della funzione  $g(x) = x^2$ .

La cosa interessante, e sarà proprio questo il contenuto del già citato Teorema fondamentale, è che l'area della regione evidenziata si può calcolare a partire dalla funzione  $g$ , facendo semplicemente  $g(3) - g(1)$ :

$$\text{Area} = 8 = 3^2 - 1^2 = g(3) - g(1).$$



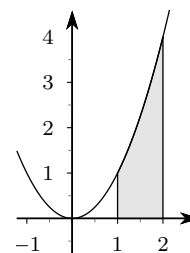
*Esempio.* Consideriamo la funzione  $f(x) = x^2$ , ristretta all'intervallo  $[1, 2]$ , il cui grafico è rappresentato nella figura qui a lato, e proponiamoci di calcolare l'area della regione evidenziata (compresa tra il grafico della funzione  $f$ , l'asse delle ascisse, e le due rette verticali  $x = 1$  e  $x = 2$ ).

La regione evidenziata non è più un trapezio rettangolo come nel caso precedente, anche se è molto simile a un trapezio rettangolo, con il lato obliquo sostituito da un arco di parabola: chiameremo questa regione un *trapezoide*. Il calcolo dell'area non sarà più elementare come prima, anche se Archimede già nel terzo secolo avanti Cristo era in grado di calcolarla, ottenendo il valore  $7/3$ .

Anche questa volta è molto facile trovare una funzione che abbia  $f$  come derivata: si tratta, per esempio, della funzione  $g(x) = x^3/3$ .

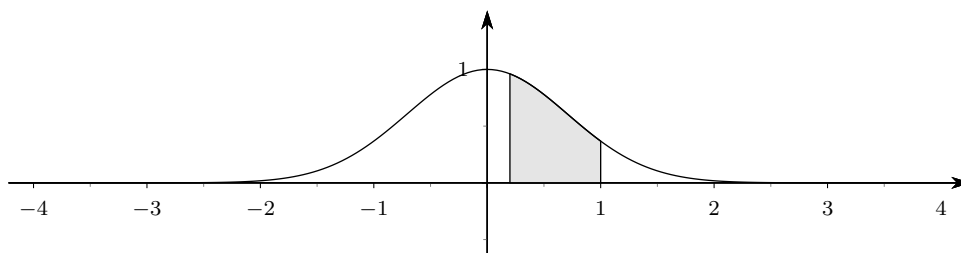
Ancora una volta la cosa interessante è che il valore dell'area si può calcolare direttamente usando la funzione  $g$  e calcolando  $g(2) - g(1)$ :

$$\text{Area} = \frac{7}{3} = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = g(2) - g(1).$$



Purtroppo le cose non sono sempre così semplici, nemmeno per i software di calcolo simbolico. In genere questi software, compreso Geogebra, sono facilmente in grado di trovare valori approssimati, con il voluto grado di approssimazione, di aree del tipo che stiamo considerando. Il problema di trovare una funzione che abbia una derivata assegnata è invece estremamente difficile, anche se è noto che esso ha, teoricamente, sempre soluzione nel caso che la funzione assegnata sia continua.

È interessante eseguire una prova specifica, con Geogebra e con Mathematica, su una funzione di grande importanza applicativa come la funzione di Gauss  $f(x) = e^{-x^2}$ , per esempio sia calcolando l'area evidenziata nella figura seguente ( $0.2 < x < 1$ ) che cercando una funzione che abbia  $f$  come derivata.



Il problema del calcolo (approssimato a 10 cifre decimali) dell'area è quasi immediato<sup>(1)</sup> con entrambi i software: 0.5494591019.

Il problema del calcolo di una funzione  $g$  che abbia  $f$  come derivata<sup>(2)</sup> è estremamente più complesso, tanto che Geogebra non fornisce alcuna risposta ( $g$  “non definito”) mentre Mathematica fornisce una risposta che a questo livello del corso non è interpretabile semplicemente:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\operatorname{Erf}(x).$$

In ogni caso, anche se in quest'ultimo caso non abbiamo la possibilità di una verifica diretta, esiste sempre lo stesso legame tra l'area cercata e la funzione  $g$  (supposto che si sia in grado di calcolarla!).

## 6.2 Primitive per una funzione reale di variabile reale

Cominciamo a trattare con un po' più di dettaglio il problema del calcolo di una funzione avente assegnata derivata. Già sappiamo, in base a uno dei corollari del teorema di Lagrange, che se due funzioni definite su un intervallo  $I$  hanno la stessa derivata, allora esse differiscono per una costante. Se cerchiamo, per esempio, una funzione che abbia  $x^2$  come derivata, oltre a  $x^3/3$  andranno anche bene tutte le funzioni del tipo  $x^3/3 + c$ , essendo  $c$  una costante arbitraria. Viceversa se ci viene chiesto di trovare *tutte* le funzioni che abbiano  $x^2$  come derivata, sulla base dello stesso corollario potremo concludere che esse sono tutte e sole le funzioni

$$\frac{x^3}{3} + c.$$

<sup>1</sup>Per chi volesse effettivamente eseguire la prova riportiamo i comandi da inserire:

- in Geogebra: `Integrale[exp(-x^2), 0.2, 1]` (bisognerà naturalmente aver scelto l'opzione di 10 cifre decimali nell'arrotondamento);
- in Mathematica: `N[Integrate[Exp[-x^2], {x, 1/5, 1}], 10]`.

<sup>2</sup>Anche qui forniamo il codice per chi volesse provare:

- in Geogebra: `Integrale[exp(-x^2)]`;
- in Mathematica: `Integrate[Exp[-x^2], x]`.

La cosa è vera in generale: se è data una funzione  $f(x)$  definita in un intervallo  $I$  (e che per noi sarà sempre continua in tutto l'intervallo), e se  $g(x)$  è una funzione tale che

$$g'(x) = f(x), \quad \forall x \in I,$$

allora tutte e sole le funzioni che hanno  $f(x)$  come derivata sono date dalla formula

$$g(x) + c,$$

essendo  $c$  una costante arbitraria. Ci sono problemi per le funzioni che non siano definite su un intervallo, ma il loro esame esula dagli scopi di questo corso: trattando di questo tipo di problemi supporremo sempre che il dominio delle funzioni sia un intervallo; se così non fosse “restringeremo” il dominio a un intervallo.

**Definizione 6.1.** *Data una funzione  $f$ , definita in un intervallo  $I$ , chiameremo primitiva di  $f$  ogni funzione  $F$  definita e derivabile nello stesso intervallo e tale che*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

L'insieme di tutte le primitive di una funzione  $f$ , in un intervallo  $I$ , si denota con il simbolo

$$\int f(x) dx$$

che si legge *Integrale (indefinito) di  $f(x)$  in  $dx$ .*

La definizione data implica che, se  $F(x)$  è una qualunque primitiva di  $f(x)$ , nell'intervallo  $I$ , il simbolo di integrale indefinito ha la seguente interpretazione:

$$\int f(x) dx = \{ F(x) + c \mid c \in \mathbb{R} \}.$$

Basterà dunque riuscire a trovare una sola primitiva di una funzione  $f$  per trovarle tutte (sempre nell'ipotesi, che non ripeteremo più, che il dominio sia un intervallo).

Si può dimostrare che tutte le funzioni continue in  $I$  hanno sempre primitive, ma, come mostra l'esempio della funzione di Gauss, la loro effettiva determinazione è in genere un problema arduo e, di solito, non risolvibile con metodi elementari. Noi ci occuperemo della risoluzione di questo problema solo in casi molto semplici, segnalando che tutti i software di calcolo simbolico sono in grado di trovare primitive anche di funzioni complesse (ma non di tutte...).

Una prima osservazione che possiamo fare relativamente al calcolo di primitive è legata alle note proprietà delle derivate:

$$(kf(x))' = kf'(x) \quad \text{e} \quad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

da cui si ricava subito che

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx \quad \text{e} \quad \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

Queste formule si leggono a parole, rispettivamente, nel seguente modo: *le costanti possono essere “portate fuori” dal segno di integrale e l'integrale di una somma è uguale alla somma degli integrali.* Esse si chiamano, brevemente, proprietà di linearità dell'integrale.

Purtroppo l'analogia con le derivate si ferma qui: non esiste, per esempio, alcuna formula generale per calcolare integrali di prodotti o di quozienti di funzioni che si sappiano integrare, e neppure per calcolare l'integrale della composta di due funzioni che si sappiano integrare.

Una seconda strategia di calcolo si basa sulla lettura della tabella delle derivate “da destra a sinistra”. Si costruisce in questo modo una nuova tabella, detta *Tabella delle primitive fondamentali*. Nella tabella 6.1 riportiamo le situazioni più comuni, unitamente a qualche altro caso di interesse applicativo.

<i>Funzione</i>	<i>Primitive</i>
$k$	$kx + c$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln x  + c$
$e^x$	$e^x + c$
$\ln x$	$x \ln x - x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$(f(x))^\alpha f'(x), \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$(f(x))^{-1} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln f(x)  + c$
$f'(x)e^{f(x)}$	$e^{f(x)} + c$
$f'(x) \sin f(x)$	$-\cos f(x)$
$f'(x) \cos f(x)$	$\sin f(x)$

**Tabella 6.1** Alcune primitive fondamentali

Si noti, in particolare, che le potenze hanno un comportamento completamente diverso a seconda che l'esponente sia  $-1$  o un numero reale diverso da  $-1$ .

Anche utilizzando le proprietà di linearità e la tabella 6.1 non si riesce ad andare molto lontano nel calcolo; in ogni caso le situazioni di nostro interesse potranno essere risolte con queste poche regole. Proponiamo qualche semplice esempio.

*Esempi.*

- $\int x^2 + \sin x \, dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + c.$
- $\int \frac{x+1}{x^2} \, dx = \int \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \left( \frac{1}{x} + x^{-2} \right) dx = \ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + c = \ln|x| - \frac{1}{x} + c.$
- $\int 2 \sin(2x) \, dx = \int (2x)' \sin(2x) \, dx = -\cos(2x) + c.$
- $\int 2xe^{x^2} \, dx = \int (x^2)' e^{x^2} \, dx = e^{x^2} + c.$



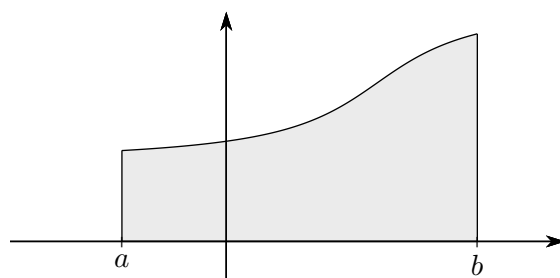
$$5. \int (3x^4 - 2x^3 + x - 1) dx = 3\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - x + c = \frac{3x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} - x + c.$$

$$6. \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \ln|x^2+1| + c = \ln(x^2+1) + c.$$

$$7. \int \sqrt[7]{x^5} dx = \int x^{5/7} dx = \frac{x^{5/7+1}}{5/7+1} + c = \frac{7}{12} x^{12/7} + c = \frac{7}{12} \sqrt[7]{x^{12}} + c.$$

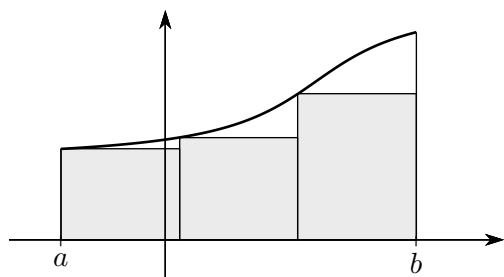
### 6.3 Area di un trapezoide

Consideriamo una funzione  $f$ , definita e continua in un intervallo  $[a, b]$  e *sempre positiva* in tutto l'intervallo. Siamo interessati a calcolare l'area della regione racchiusa tra il grafico della funzione  $f$ , l'asse della  $x$ , e le due rette verticali  $x = a$  e  $x = b$ , regione che chiameremo, come già anticipato, un *trapezoide*.

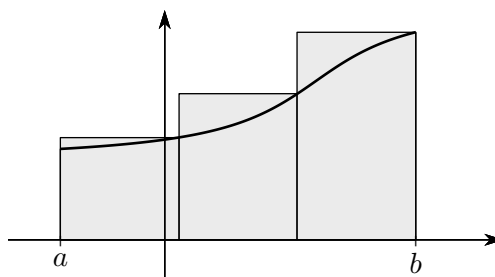


**Figura 6.1** Trapezoide relativo a una funzione positiva (e continua)

Per valutare quest'area l'idea è quella di approssimarla, mediante dei “*plurirettangoli*”, inscritti e circoscritti, ottenuti suddividendo l'intervallo  $[a, b]$  in un certo numero di parti (uguali per semplicità) e procedendo come le figure 6.2 (relativa a un plurirettangolo inscritto) e 6.3 (relativa a un plurirettangolo circoscritto) indicano chiaramente.



**Figura 6.2** Plurirettangolo inscritto



**Figura 6.3** Plurirettangolo circoscritto

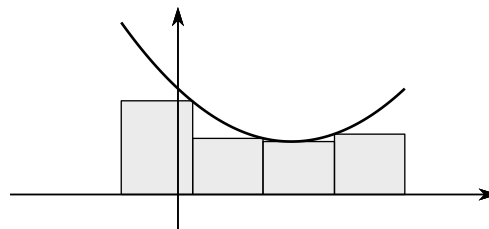
Si tratta di una generalizzazione del procedimento usato per “quadrare il cerchio”, mediante una successione di poligoni inscritti e circoscritti. Anche in questo caso si dimostra (almeno nel caso delle funzioni continue che a noi interessano) che, se il numero di suddivisioni tende all'infinito (e quindi la loro ampiezza tende a zero), le aree dei due plurirettangoli inscritto e circoscritto tendono a un valore comune che si chiama *area del trapezoide* e si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x) dx,$$

che si legge: *Integrale (definito) della funzione  $f$  tra  $a$  e  $b$* .

L'origine di questo simbolo è legata alle considerazioni intuitive che seguono. L'area del trapezoido considerato si ottiene come somma delle aree di tanti rettangoli, che hanno come base la misura di  $[a, b]$  divisa per il numero di suddivisioni, e come altezza il valore della funzione calcolato in un punto opportuno appartenente a ciascun intervallo della suddivisione. La misura della base si indicherà dunque con  $\Delta x$  (differenza tra l'ascissa dell'estremo destro e dell'estremo sinistro di ogni intervallo), mentre l'altezza sarà  $f(x)$ .

Nell'esempio proposto prima il punto in cui calcolare  $f(x)$  è sempre o l'estremo sinistro o quello destro di ciascun intervallo della suddivisione, ma potrebbe anche essere un punto interno, come mostra la figura qui a lato, relativa a un plurirettangolo inscritto, in cui è stata considerata una suddivisione di  $[a, b]$  in 4 parti.



L'area di un plurirettangolo inscritto o circoscritto sarà dunque esprimibile con una formula del tipo

$$\sum f(x)\Delta x,$$

dove la somma si intende estesa a tutti gli intervallini. Al tendere all'infinito del numero di suddivisioni, l'ampiezza di ciascuna tenderà a zero e viene indicata con  $dx$ ; il simbolo di sommatoria viene deformato in una  $s$  allungata:  $\int$ , per cui si ottiene proprio il simbolo già proposto.

## 6.4 Integrale definito

Se la funzione  $f$  anzichè essere sempre positiva fosse sempre negativa nell'intervallo  $[a, b]$ , la somma

$$(6.1) \quad \sum f(x)\Delta x,$$

avrebbe ancora senso, sarebbe negativa e corrisponderebbe all'opposto dell'area del plurirettangolo costruito con la stessa tecnica usata per le funzioni positive. Si vedano le figure seguenti.

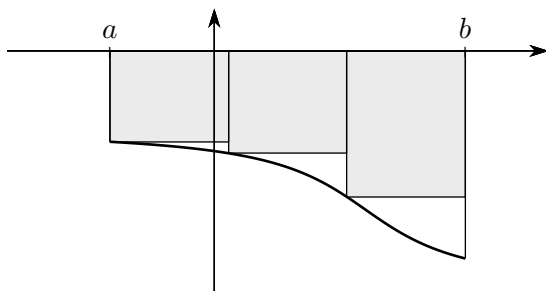


Figura 6.4 Plurirettangolo inscritto

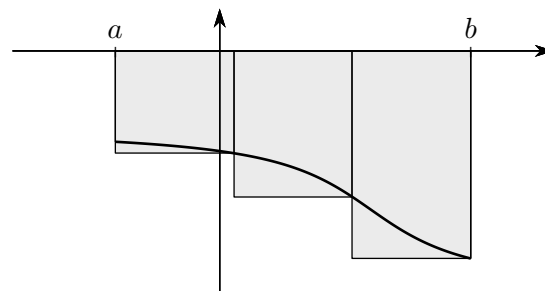


Figura 6.5 Plurirettangolo circoscritto

È abbastanza evidente che si potrà ancora parlare di trapezoido e che il limite di una somma del tipo 6.1, al tendere all'infinito del numero di suddivisioni, sarà questa volta l'opposto dell'area del trapezoido: questo limite si indicherà ancora con lo stesso simbolo di prima

$$\int_a^b f(x) dx,$$

e si userà la stessa nomenclatura.

Se una funzione è in parte positiva e in parte negativa la somma 6.1 avrà alcuni addendi positivi e alcuni negativi e il limite sarà chiaramente la differenza tra le aree di tutte le regioni soprastanti l'asse delle  $x$  e di tutte le regioni sottostanti l'asse stessa. In un caso come questo l'integrale potrebbe anche venire nullo, come dimostra chiaramente il caso della funzione seno, considerata nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ , in cui, per questioni di simmetria, la parte soprastante l'asse  $x$  e quella sottostante sono chiaramente identiche.

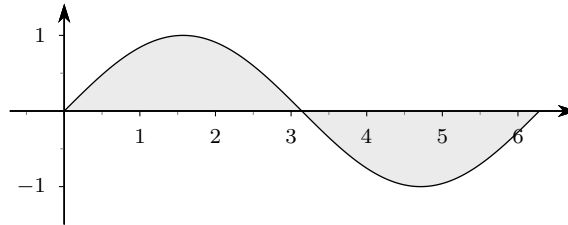


Figura 6.6 Trapezoide relativo alla funzione  $\sin x$ , in  $[0, 2\pi]$

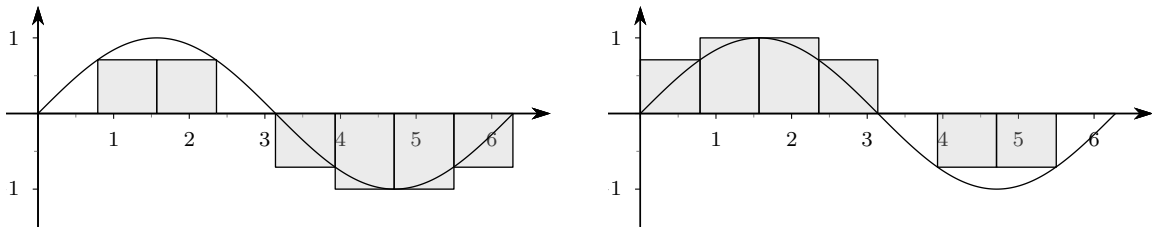


Figura 6.7 Plurirettangoli relativi alla funzione  $\sin x$  in  $[0, 2\pi]$ , con 8 suddivisioni

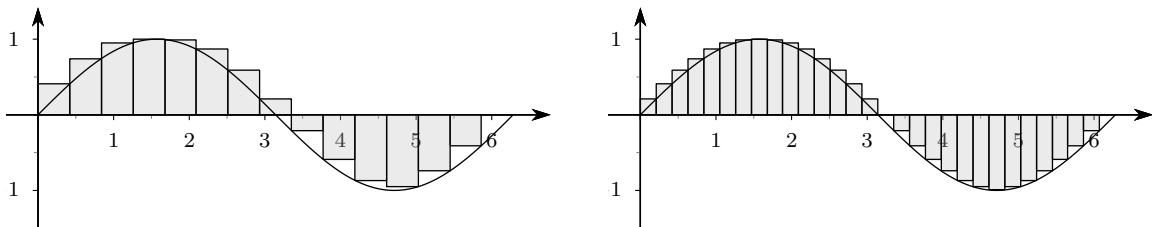


Figura 6.8 Plurirettangoli relativi alla funzione  $\sin x$  in  $[0, 2\pi]$ , con 15 e 30 suddivisioni

C'è da fare un'osservazione abbastanza importante: tutto il processo di costruzione dei plurirettangoli ha senso solo perché le funzioni in esame sono limitate. La cosa è ovvia perché noi ci siamo limitati alle funzioni continue, ma se si vuole estendere il concetto a funzioni non continue bisogna prestare attenzione a questo fatto.

Siamo ora pronti per dare una definizione formalmente corretta del concetto di integrale definito.

**Definizione 6.2.** Sia data una funzione  $f$  definita e continua in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$ . Si consideri una suddivisione dell'intervallo  $[a, b]$  in  $n$  parti uguali, ciascuna dunque di misura  $\delta_i = (b - a)/n$  e si prenda, in ciascun sottointervallo, il massimo  $M_i$  e il minimo  $m_i$  della funzione. Le somme

$$\sum_{i=1}^n m_i \delta_i \quad e \quad \sum_{i=1}^n M_i \delta_i$$

si chiamano, rispettivamente, Somma integrale inferiore e Somma integrale superiore relative alla funzione  $f$ , all'intervallo  $[a, b]$  e alla sua suddivisione in  $n$  parti.

Si dimostra che, per le funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato, le somme inferiori e superiori, al tendere di  $n$  all'infinito, tendono a un comune valore, che si chiama *Integrale definito* di  $f(x)$  tra  $a$  e  $b$  e si indica con

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Nel caso di funzioni positive l'integrale ha il significato di area del trapezoide individuato dalla funzione  $f$  sull'intervallo  $[a, b]$ , nel caso di funzioni negative ha il significato di opposto dell'area del trapezoide.

I numeri  $a$  e  $b$  si chiamano *estremi di integrazione*, la funzione  $f$  si chiama *funzione integranda*. È chiaro da quanto detto che, nel simbolo di integrale il nome della variabile non ha alcun interesse, tanto che alcuni lo omettono completamente; anche il  $dx$  serve soltanto a ricordare il processo di limite attraverso cui si è giunti alla definizione, e anche questo viene omesso da qualcuno. Si possono cioè considerare equivalenti i simboli seguenti:

$$\int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b f(t) dt, \quad \int_a^b f dx, \quad \int_a^b f.$$

È altresì evidente che il numero  $a$  deve essere strettamente minore del numero  $b$ . Nelle applicazioni ha interesse considerare anche integrali tra  $c$  e  $d$ , con  $c \geq d$ . Per questo si pone, per definizione

$$\int_c^c f(x) dx = 0,$$

e, se  $c > d$ ,

$$\int_c^d f(x) dx = - \int_d^c f(x) dx.$$

Con queste definizioni il simbolo

$$\int_a^b f(x) dx$$

ha senso qualunque sia l'ordine dei numeri  $a$  e  $b$  (naturalmente purché la funzione sia definita e continua in  $[a, b]$  oppure  $[b, a]$ ).

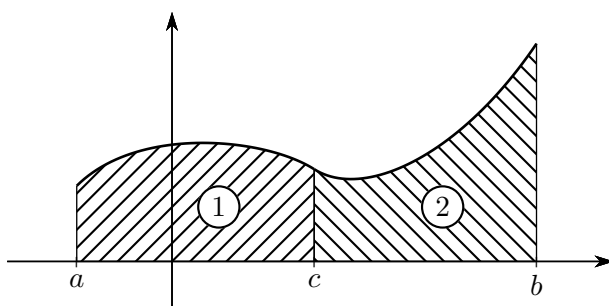
Una prima proprietà che si può dimostrare, molto utile nelle applicazioni, è quella relativa all'additività rispetto all'intervallo di integrazione.

**Teorema 6.3.** *Se  $a, b, c$  sono tre reali qualsiasi, si ha*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

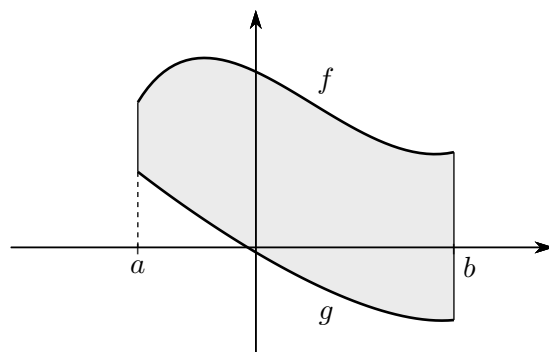
La verifica grafica di questo teorema è ovvia per funzioni positive, nel caso che  $a < c < b$ , come mostra la figura che segue: il primo integrale è l'area del trapezoide totale, gli altri due le aree dei trapezoidi indicati con 1 e 2, ed è chiaro che l'area totale è la somma delle altre due.

In ogni caso, facendo riferimento a opportuni grafici, non è difficile rendersi conto del perché la proprietà valga anche in casi più generali.



**Figura 6.9** Additività rispetto all'intervallo di integrazione

Un importante risultato che si può dedurre come conseguenza delle definizioni che abbiamo dato è il metodo per il calcolo dell'area di una regione piana compresa tra i grafici di due funzioni, ed eventualmente due rette verticali, come nella figura che segue.

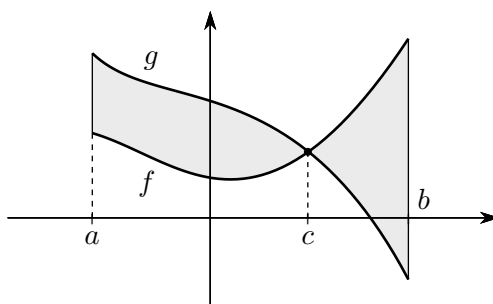


**Figura 6.10** Regione piana compresa tra i grafici di due funzioni

L'area della regione in questione è *sempre* data dall'integrale, tra  $a$  e  $b$  ( $a < b$ ), della differenza fra la funzione “più alta” e quella “più bassa”; nell'esempio della figura 6.10 si ha:

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx .$$

Può succedere che i due grafici si intersechino, come nella figura che segue.



**Figura 6.11** Regione piana compresa tra i grafici di due funzioni

In questo caso occorrerà spezzare il calcolo in due parti:

$$\text{Area} = \int_a^c (g(x) - f(x)) dx + \int_c^b (f(x) - g(x)) dx.$$

## 6.5 Il calcolo degli integrali definiti

Il calcolo effettivo degli integrali definiti usando la definizione è possibile solo in casi molto semplici e a prezzo di calcoli abbastanza complessi. Per fortuna viene in nostro aiuto il già citato teorema fondamentale del calcolo integrale che generalizza una proprietà che abbiamo già visto nei primi esempi di questo capitolo.

**Teorema 6.4** (Teorema fondamentale del calcolo integrale). *Sia data una funzione  $f$  definita e continua in un intervallo  $I$ . Sia inoltre  $F$  una primitiva di  $f$  in  $I$ . Se  $a$  e  $b$  sono due punti qualunque di  $I$ , si ha*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

È chiaro il motivo per cui questo teorema si chiama *fondamentale*: in sostanza esso riconduce il calcolo dell'area di una regione piana (abbastanza) arbitraria a quello della ricerca di una primitiva, ricerca comunque non facile in generale, ma fattibile “a mano” in casi anche complessi.

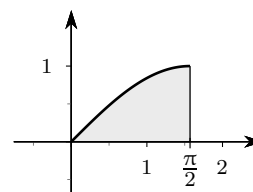
La formula precedente si usa scrivere, tradizionalmente, nel modo seguente:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b.$$

*Esempio.* Calcolare l'area racchiusa tra il grafico della funzione  $\sin x$ , l'asse delle  $x$ , e le rette  $x = 0$  e  $x = \pi/2$ .

L'area richiesta è quella di un normale trapezoide, per cui si dovrà calcolare

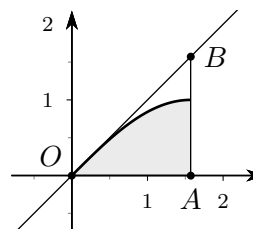
$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx.$$



Poiché come è noto, una primitiva di  $\sin x$  è  $-\cos x$ , applicando il teorema fondamentale si troverà subito

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1.$$

Si può fare un controllo “visivo” della bontà di questo risultato nel seguente modo. La funzione  $\sin x$  ha come derivata  $\cos x$ , per cui, nell'origine, la tangente ha coefficiente angolare  $\cos 0 = 1$  e conseguentemente equazione  $y = x$  (la bisettrice del primo e terzo quadrante). Dunque l'area del trapezoide dovrà essere un po' più piccola di quella del triangolo  $OAB$  della figura a lato. L'area del triangolo è



$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8} \simeq 1.2337,$$

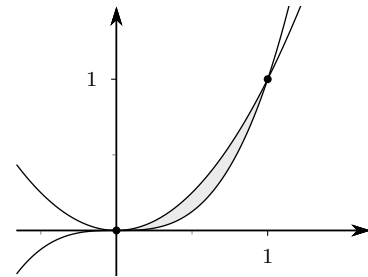
per cui tutto torna. A voler essere sofisticati si poteva anche tracciare la tangente al grafico nel punto  $C = (\pi/2, 0)$ , determinarne l'intersezione  $D$  con la bisettrice e calcolare l'area del triangolo  $BCD$ , che va sottratta all'area di  $OAB$  per avere una stima più precisa dell'area cercata. Lasciamo al lettore questo (facile!) calcolo che fornisce il seguente risultato

$$\text{Area}(BCD) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)^2 \simeq 0.1629$$

Una migliore approssimazione dell'area del trapezoide sarà allora  $1.2337 - 0.1629 = 1.0708$ , che si avvicina sensibilmente al valore 1 trovato con l'integrale, confermando la bontà del risultato.

*Esempio.* Calcolare l'area della regione limitata racchiusa tra i grafici di  $x^2$  e  $x^3$  e appartenente al primo quadrante.

La figura qui a lato mostra che nella regione limitata di piano considerata si ha  $0 \leq x \leq 1$ , e che in questo tratto la funzione che sta più in alto è  $x^2$ , quella che sta più in basso è  $x^3$ . L'area richiesta sarà dunque



$$\int_0^1 (x^2 - x^3) dx.$$

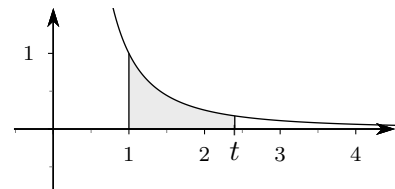
Poiché

$$\int (x^2 - x^3) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + c,$$

si avrà

$$\int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) - \left( \frac{0}{3} - \frac{0}{4} \right) = \frac{1}{12}.$$

*Esempio.* Calcolare l'area della regione limitata di piano compresa tra il grafico della funzione  $f(x) = 1/x^2$ , l'asse delle  $x$ , la retta  $x = 1$  e la retta  $x = t$ , essendo  $t$  un numero reale strettamente maggiore di 1. Calcolare poi il limite di quest'area quanto  $t \rightarrow +\infty$ . Che interpretazione geometrica si può dare di questo risultato? Si tratta di un risultato intuitivamente evidente o "difficile da digerire"?



Con il teorema fondamentale il calcolo dell'area (si tratta di un normale trapezoide) è molto semplice:

$$\int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \int_1^t x^{-2} dx = \left[ \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^t = \frac{-1}{t} + 1.$$

Anche il limite per  $t \rightarrow +\infty$  è immediato e fornisce come risultato il numero 1. Sulla base di quanto finora detto si può interpretare questo numero come l'area della regione illimitata di piano compresa tra il grafico della funzione, l'asse delle  $x$  e la retta  $x = 1$ . La cosa sorprendente è che quest'area risulta finita, pur riferendosi a una regione illimitata: questo fatto dà un chiaro significato geometrico al fatto che, da un certo punto in poi il grafico di  $f(x) = 1/x^2$  è "talmente attaccato" all'asse  $x$ , da non lasciare praticamente scampo alcuno.

Se si ripete tutto il calcolo con la funzione  $g(x) = 1/x$  al posto di  $f(x)$  si ottiene:

$$\int_1^t \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_1^t = \ln |t| - \ln 1 = \ln t.$$

Adesso il limite per  $t \rightarrow +\infty$  fornisce come risultato  $+\infty$ , e questa volta si può dire che la funzione  $g(x) = 1/x$  è molto più “lontana” dall’asse  $x$  di quanto non sia la funzione  $f(x) = 1/x^2$ . La figura che segue illustra chiaramente questa situazione.

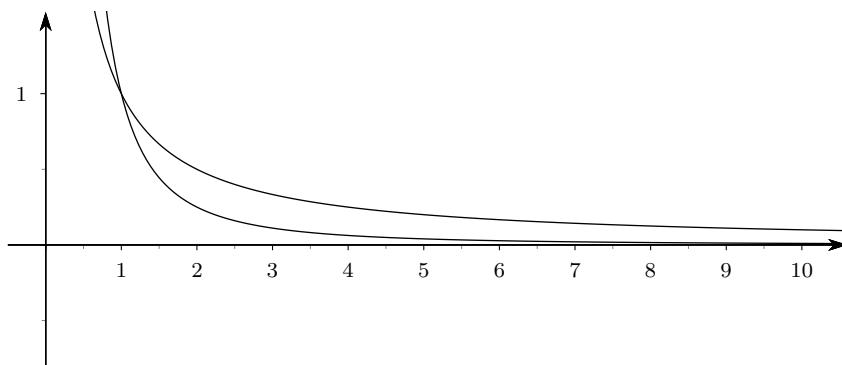


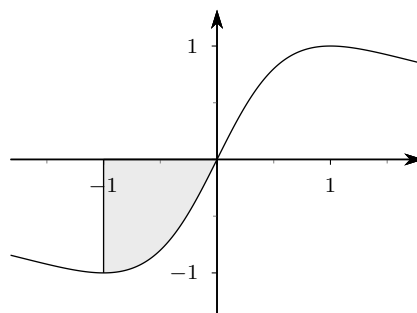
Figura 6.12 Confronto fra i grafici di  $g(x) = 1/x$  e  $f(x) = 1/x^2$

*Esempio.* Calcolare l’area della parte di piano cartesiano individuato dalle condizioni.

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{2x}{x^2 + 1} \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Basta osservare che, essendo la funzione sempre negativa nel tratto in questione, il trapezoide sta sotto l’asse delle ascisse, per cui la sua area sarà data da

$$-\int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int_0^{-1} \frac{2x}{x^2 + 1} dx = [\ln(x^2 + 1)]_0^{-1} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \simeq 0.69315.$$





# 7 La matematica del discreto

## 7.1 Successioni

Spesso, anche nella pratica quotidiana, abbiamo a che fare con “file” di oggetti o di numeri: l’esempio più semplice è quello dei numeri naturali. Tali “file” possono essere sia infinite (come l’esempio dei naturali) o finite, come l’esempio che segue

$$1, 3, 5, 7, 9$$

che costituisce l’elenco ordinato dei dispari a una cifra.

Questi oggetti sono molto importanti in matematica e nelle sue applicazioni e per questo ne facciamo una trattazione esplicita, seppur molto sintetica e sommaria, cominciando con l’importante concetto di *successione*, che è una particolarizzazione del generale concetto di funzione.

**Definizione 7.1.** *Si chiama successione di numeri reali una funzione avente come dominio l’insieme dei numeri naturali, o un suo sottoinsieme (finito o infinito), e come codominio l’insieme dei numeri reali.*

Trattandosi di funzioni si potrebbero usare tutti i simboli già introdotti. Per motivi di opportunità, invece, di solito al posto di  $f(n)$  si scrive  $a_n$  (la variabile cioè è scritta come pedice, anziché tra parentesi e i nomi comunemente usati sono  $a, b, \dots$  al posto degli  $f, g, \dots$  che si usano per le altre funzioni). Il valore  $a_n$  viene spesso chiamato *termine generale* della successione. Per esempio se si considera la successione

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto 2^n$$

si dice che si sta trattando la successione di termine generale  $2^n$ .

Naturalmente anche per le successioni si potrà fare un grafico, che sarà costituito, nel piano cartesiano, solo da punti in corrispondenza alle ascisse individuate da numeri naturali, come è evidenziato nelle figure 7.1 e 7.2.

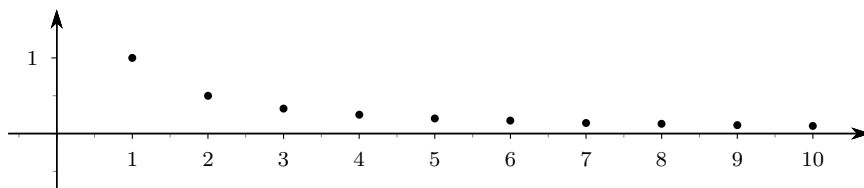


Figura 7.1 Grafico dei primi valori della successione di termine generale  $1/n$

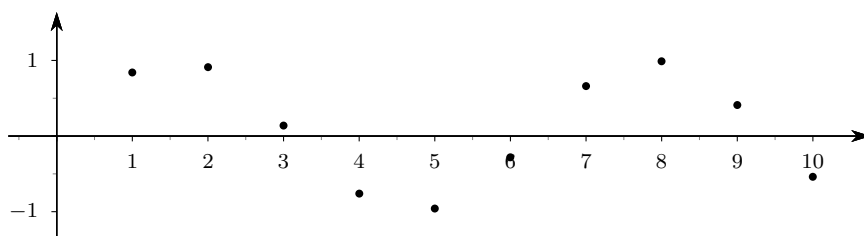


Figura 7.2 Grafico dei primi valori della successione di termine generale  $\sin i$

Si tenga ben presente che una successione è una “fila” di numeri che non debbono essere necessariamente diversi tra di loro: come per le “normali” funzione si possono considerare successioni costanti:  $a_n = k, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Un modo molto frequente, e diffuso per esempio nelle applicazioni informatiche, per definire le successioni è quello delle definizioni ricorsive, di cui si abbiamo già parlato nella pagina 16: esso consiste nell’abbinamento di due formule:

- una formula che assegna il primo termine della successione, (che potrebbe essere  $a_0, a_1$  o altro) (più raramente si assegnano i primi due termini anziché solo il primo);
- un seconda formula che esprime una legge che permette di trovare il termine  $n + 1$  una volta che sia noto il termine  $n$ -esimo (a volte anche il termine  $(n - 1)$ -esimo o precedenti).

Dunque il primo termine è assegnato, il secondo si calcola a partire dal primo, il terzo a partire dal secondo, e così via. Il Principio di Induzione ci garantisce che tutto funziona. Aggiungiamo alcuni esempi a quello della definizione di potenza già proposto nella pagina 16.

*Esempio.* Consideriamo la successione, definita ricorsivamente:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases} .$$

Ne determiniamo i primi termini e verichiamo se è possibile tradurre la definizione ricorsiva in una definizione “standard”.

Si ha

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 2a_0 = 2 \cdot 1 = 2 \\ a_2 &= 2a_1 = 2 \cdot 2 = 4 \\ a_3 &= 2a_2 = 2 \cdot 4 = 8 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Come si può ben vedere si tratta della successione delle potenze di 2, che si può scrivere, in maniera standard nella forma  $a_n = 2^n$ .

*Esempio.* Consideriamo la successione, definita ricorsivamente,

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \end{cases} .$$

Si tratta della famosa successione dei numeri di Fibonacci, i cui primi termini sono:

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1 + 0 = 1, a_3 = 1 + 1 = 2, a_4 = 2 + 1 = 3, a_5 = 3 + 2 = 5, \dots, a_{10} = 55, \dots$$

Anche in questo caso è possibile ricavare una scrittura standard per la successione, ma il calcolo effettivo è molto difficile ed esula dagli scopi di questo corso. Ne riportiamo il risultato, invitando lo studente a fare la prova (almeno per i primi tre valori: si tratta di un ottimo esercizio sui radicali!). Posto

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

si ha

$$a_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{(1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}} .$$

Molto importanti sono due speciali tipi di successioni, dette, rispettivamente, *progressioni aritmetiche* e *progressioni geometriche* e definite come segue.

- Si dice *progressione aritmetica* di termine iniziale  $a \in \mathbb{R}$  e ragione  $d \in \mathbb{R}$ , la successione definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases},$$

cioè una successione in cui ogni termine è ottenuto dal precedente aggiungendo una costante (detta *ragione*). Il nome  $d$  usato per la ragione deriva dal fatto che  $d$  è la differenza tra ogni termine e il suo precedente.

- Si dice *progressione geometrica* di termine iniziale  $a \in \mathbb{R}$  e ragione  $q \in \mathbb{R}$ , la successione definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = q \cdot a_n \end{cases},$$

cioè una successione in cui ogni termine è ottenuto dal precedente moltiplicando per una costante (detta *ragione*). Il nome  $q$  usato per la ragione deriva dal fatto che  $q$  è il quoziente tra ogni termine e il suo precedente.

Per le progressioni aritmetiche si dimostra (in maniera abbastanza facile e che potrebbe essere fatto come esercizio!) che

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \frac{a_0 + a_n}{2} (n + 1),$$

ovvero che per sommare i termini da  $a_0$  ad  $a_n$  basta fare la loro media e moltiplicare per il numero degli addendi.

Per le progressioni geometriche si dimostra una formula analoga

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = a_0 \frac{1 + q^{n+1}}{1 - q}.$$

## 7.2 Limiti di successioni

Per le successioni, come per tutte le funzioni, ci si può porre il problema del calcolo dei limiti: considerando che il dominio non può avere alcun numero reale come punto di accumulazione, rimane solo la possibilità, se la successione è infinita, di fare il limite per  $n \rightarrow +\infty$ . In ragione di questo fatto si tralascia spesso la scrittura  $n \rightarrow +\infty$  sotto la scrittura di limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \text{si scrive semplicemente} \quad \lim a_n,$$

e si parla semplicemente di *limite della successione*.

A seconda del risultato del limite, le successioni si classificano in

- *convergenti*, se  $\lim a_n = l \in \mathbb{R}$ ;
- *positivamente divergenti*, se  $\lim a_n = +\infty$ ;
- *negativamente divergenti*, se  $\lim a_n = -\infty$ ;
- *indeterminate*, se  $\lim a_n \nexists$ .

Per il calcolo del limite delle successioni si possono applicare le stesse strategie già viste per le funzioni, tranne la regola di l'Hôpital che non ha senso perchè, ovviamente, per le successioni non si può parlare di derivata.

Una strategia che spesso funziona è la seguente: se è data una successione  $a_n$  i cui valori si determinano mediante una serie di calcoli e se i calcoli possono essere “estesi” a tutti i numeri reali “vicini a  $+\infty$ ”, si può passare dalla successione  $a_n$  alla funzione “normale”  $f(x)$ , calcolare

il limite di  $f(x)$ , magari con l'Hôpital se possibile; se il limite della funzione esiste, esiste anche quello della successione e sono uguali (attenzione: non è vero il viceversa, in particolare anche se il limite della funzione non esiste, potrebbe benissimo esistere quello della successione).

*Esempio.* Per calcolare

$$\lim \frac{n^2}{e^n},$$

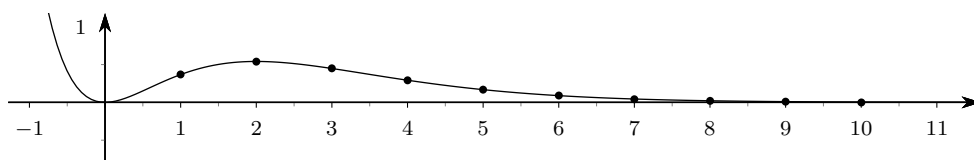
possiamo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \dots = 0 \quad (\text{Hôpital}),$$

per cui

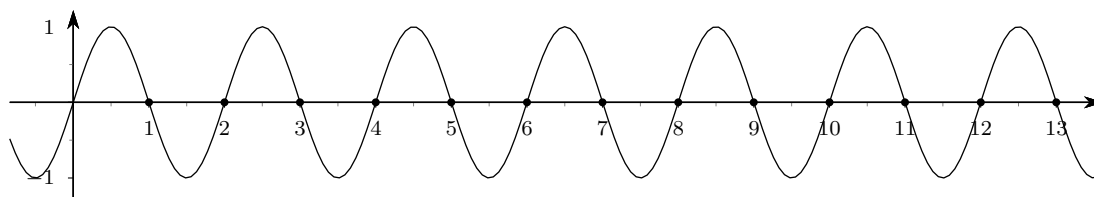
$$\lim \frac{n^2}{e^n} = 0.$$

Il grafico che segue illustra efficacemente il perché la cosa funziona: la successione “preleva” dal grafico della funzione solo alcuni punti, precisamente quelli che hanno per ascissa un numero naturale.



**Figura 7.3** La funzione  $f(x) = x^2/e^x$  e la successione  $a_n = n^2/e^n$

*Esempio.* Il “passaggio da una successione a una funzione” non fornisce alcuna informazione utile per la successione  $a_n = \sin(\pi n)$ , come mostra il grafico che segue.



**Figura 7.4** La funzione  $f(x) = \sin(\pi x)$  e la successione  $a_n = \sin(\pi n)$

In effetti la successione prende dal grafico della funzione solo i punti che hanno ascissa intera positiva, e così facendo diventa una successione costante, come è evidente se si tiene conto che  $\sin(\pi n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ .

*Esempio.* In altri casi il “passaggio da una successione a una funzione” non è possibile: dalla successione  $a_n = (-1)^n$  non si può ottenere alcuna “funzione normale”, in quanto  $(-1)^x$  è sempre definito solo sui naturali (si ricordi che le potenze di base negativa sono “una brutta bestia”). È comunque immediato concludere che questa successione non ha limite. Se ne veda il grafico nella figura 7.5 che segue.

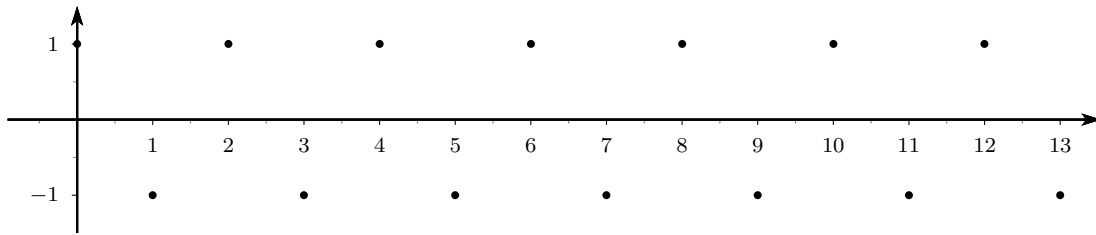


Figura 7.5 La successione  $a_n = (-1)^n$

### 7.3 Introduzione al calcolo combinatorio

Il calcolo combinatorio, premessa indispensabile al calcolo delle probabilità, si occupa della determinazione del numero di elementi di certi insiemi finiti, assegnati mediante una proprietà caratteristica. Il problema è usualmente molto complesso e, soprattutto, non esistono metodi standard per risolverlo: forse per questo è ritenuto argomento ostico e difficile.

È opportuno segnalare fin da subito che esistono situazioni in cui l'unica strategia che è possibile utilizzare è quella di scrivere l'insieme in questione e numerare, uno alla volta, i suoi elementi. L'esempio più classico è costituito dal seguente problema: dato un numero naturale  $n$ , determinare il numero degli elementi dell'insieme dei numeri primi minori di  $n$ . Non resta altro da fare che scrivere pazientemente tutti i numeri richiesti e contarli (magari servendosi di un calcolatore!). A chi pensa che un problema come quello di contare i numeri primi minori di un dato numero sia un problema che può interessare solo i matematici, e che non abbia alcun risvolto pratico, ricordiamo che sui numeri primi sono basati (almeno fino a oggi e forse anche per un bel po' ancora!) tutti gli algoritmi di cifratura, chiavi elettroniche, ecc., in uso sulla rete internet.

Un simbolo di uso comune nel calcolo combinatorio è quello del fattoriale di  $n$ , indicato con  $n!$  (leggi *n fattoriale*), e definito come segue.

$$(7.1) \quad \begin{cases} 0! = 1 \\ (n + 1)! = (n + 1)n! \end{cases} ,$$

ovvero,  $0!$  vale 1, mentre per  $n > 1$ ,  $n!$  è il prodotto di tutti i naturali da 1 a  $n$ .

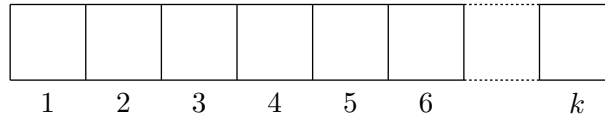
#### 7.3.1 Disposizioni

Consideriamo un insieme di  $n$  elementi, che denoteremo con

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

usando la stessa simbologia delle successioni (finite), anche se nei casi che considereremo gli "oggetti" non saranno necessariamente numeri reali.

Dato un naturale  $k \leq n$  si vogliono studiare i possibili raggruppamenti ottenuti scegliendo  $k$  dei precedenti  $n$  oggetti e disponendoli in un certo ordine: due raggruppamenti saranno considerati distinti se differiscono per qualche elemento, o per l'ordine degli elementi. Inoltre, in questa fase, gli elementi che costituiscono il raggruppamento devono essere tutti distinti, ovvero è esclusa la ripetizione di qualche elemento: sostanzialmente abbiamo  $k$  caselline numerate e  $n$  oggetti da poter disporre nelle caselline.



**Figura 7.6** Caselline numerate per accogliere  $k$  oggetti presi da un insieme di  $n$  elementi

**Definizione 7.2.** Dati  $n$  oggetti e il numero naturale  $k \leq n$ , si dicono disposizioni semplici degli  $n$  elementi, di classe  $k$ , oppure “a  $k$  a  $k$ ”, tutti i raggruppamenti ottenuti scegliendo  $k$  elementi distinti fra gli  $n$  disponibili, in modo che due raggruppamenti differiscano o per gli elementi che contengono o per l'ordine degli stessi.

Se per esempio l'insieme è costituito da 4 elementi che chiamiamo, per semplicità,  $a, b, c, d$ , le possibili *disposizioni semplici* degli oggetti a 2 a 2 sono le seguenti:

$$ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc,$$

per un totale di 12 possibilità. Si potrebbe anche dire che abbiamo costruito parole di due lettere, con lettere tutte distinte, da un alfabeto di 4 lettere.

In generale indicheremo con

$$D_{n,k}$$

il numero dei raggruppamenti possibili:  $D_{n,k}$  è dunque il numero delle disposizioni semplici di  $n$  oggetti a  $k$  a  $k$ .

È abbastanza facile calcolare il numero  $D_{n,k}$ : basta osservare che nella prima casellina ci sono  $n = n - 0$  possibilità di scelta, nella seconda  $n - 1$  possibilità, nell'ultima, la  $k$ -esima,  $n - (k - 1) = n - k + 1$ . Dunque basterà fare il prodotto di questi  $k$  numeri consecutivi decrescenti, a partire da  $n$ :

$$(7.2) \quad D_{n,k} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

dove l'ultima uguaglianza è ottenuta tenendo conto della definizione di fattoriale.

In molte situazioni ha interesse consentire la ripetizione di uno o più oggetti nella caselle: si pensi per esempio alle parole del dizionario, in cui è normale che alcune lettere siano ripetute.

**Definizione 7.3.** Dati  $n$  oggetti e il numero naturale  $k$ , che ora può anche essere maggiore di  $n$ , si dicono disposizioni con ripetizione degli  $n$  elementi, di classe  $k$ , oppure “a  $k$  a  $k$ ”, tutti i raggruppamenti ottenuti scegliendo  $k$  elementi fra gli  $n$  disponibili, essendo consentito che uno o più elementi possano essere ripetuti, in modo che due raggruppamenti differiscano o per gli elementi che contengono o per l'ordine degli stessi.

L'esempio più semplice di un tale tipo di raggruppamento è costituito da una colonna del totocalcio, che è una disposizione di 3 oggetti (i simboli 1,  $\times$ , 2), in 14 caselle.

Il numero delle disposizioni con ripetizione di  $n$  oggetti a  $k$  a  $k$  è ancora più semplice da calcolare, in quanto, essendo consentite le ripetizioni, in ognuna delle  $k$  caselline ci sono sempre  $n$  possibilità: il numero richiesto sarà

$$(7.3) \quad D_{n,k}^r = n^k.$$

Dunque le possibili colonne del totocalcio sono  $3^{14} = 4782969$ . Se si vuole essere certi di fare 14 basterà giocare 2391484.5 Euro!.

*Esempio.* Per determinare quante sono le partite da giocare nel campionato italiano di calcio, a 18 squadre, basterà pensare alle partite come raggruppamenti ordinati di due oggetti (due squadre) dei 18 disponibili: infatti conta anche l'ordine perché si gioca prima la partita tra  $A$  e  $B$  (andata) e poi quella tra  $B$  e  $A$  (ritorno). Le partite sono quindi  $D_{18,2} = 18 \cdot 17 = 306$ .

*Esempio.* Nel consiglio di amministrazione di una società devono essere nominati un presidente, un vicepresidente e un segretario, scelti tra i 20 componenti. La cosa si può fare in  $D_{20,3}$  modi diversi, ovvero in 6840 modi diversi.

*Esempio.* Le parole di tre lettere costruibili, a parte il loro significato, con le 26 lettere dell'alfabeto sono in numero di  $D_{26,3}^r$ , in quanto sono consentite le ripetizioni. Si tratta in totale di 15600 parole.

### 7.3.2 Permutazioni

Se nel considerare le disposizioni semplici immaginiamo di prendere  $k = n$ , allora due raggruppamenti potranno differire solo per l'ordine: è per esempio il caso degli anagrammi delle parole (con lettere tutte diverse). Questa situazione ha un particolare interesse, tanto che si dà una apposita definizione.

**Definizione 7.4.** *Dati  $n$  elementi si chiamano permutazioni semplici i raggruppamenti ottenuti scegliendo tutti gli  $n$  elementi disponibili, in modo che due raggruppamenti possono differire solo per l'ordine in cui sono scritti gli elementi.*

È immediatamente evidente che per il numero delle permutazioni si ha

$$(7.4) \quad P_n = D_{n,n} = n!.$$

Nelle applicazioni hanno interesse anche le permutazioni (anagrammi) in un elenco ordinato di oggetti non tutti distinti. Per ottenere, come utile esercizio, la formula relativa consideriamo l'esempio della parola mamma e cerchiamone gli anagrammi. Se inizialmente supponiamo che le lettere siano tutte distinte, possiamo scrivere, per esempio,

$$\boxed{m_1} \boxed{a_1} \boxed{m_2} \boxed{m_3} \boxed{a_2}.$$

Le permutazioni sarebbero così  $5! = 120$ . Ora però dobbiamo tenere conto che molti raggruppamenti saranno in realtà identici, come per esempio

$$\boxed{m_1} \boxed{a_1} \boxed{m_2} \boxed{m_3} \boxed{a_2} \quad \text{e} \quad \boxed{m_1} \boxed{a_2} \boxed{m_2} \boxed{m_3} \boxed{a_1},$$

oppure

$$\boxed{a_1} \boxed{a_2} \boxed{m_1} \boxed{m_2} \boxed{m_3} \quad \text{e} \quad \boxed{a_2} \boxed{a_1} \boxed{m_1} \boxed{m_2} \boxed{m_3}.$$

Anzi, se immaginiamo di avere scritto per intero le 120 permutazioni, possiamo dire che tutte quelle che hanno solo uno scambio di  $a_1$  con  $a_2$  saranno identiche: dunque per tenere conto di questo fatto basterà dividere il numero totale delle permutazioni per  $2 = 2!$ . In maniera perfettamente analoga possiamo dire che nelle 60 permutazioni rimanenti tutte quelle che differiscono solo per uno scambio delle  $m$  sono identiche, e poiché le  $m$  sono tre, questi scambi saranno  $3! = 6$ . Le permutazioni distinte saranno allora solo  $10 = 5!/(2! \cdot 3!)$ , eccole:

*mamma, mmmmaa, mmaam, mmama, mamam, ammma, amamm, aammm, ammam, amamm.*

Naturalmente non tutte hanno senso secondo il dizionario della lingua italiana (anzi in questo caso ha senso solo la prima, in accordo con il fatto che “di mamma ce n'è una sola”).

In generale se abbiamo  $n$  oggetti, di cui  $n_1$  uguali tra di loro,  $n_2$ , uguali tra di loro,  $\dots$ ,  $n_k$  uguali tra di loro, con la ovvia condizione che

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n,$$

allora le permutazioni fra questi elementi saranno in numero di

$$(7.5) \quad P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

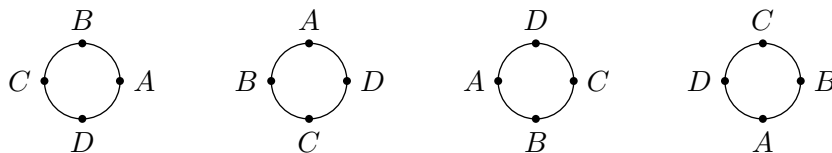
La formula si può usare anche se ci sono elementi non ripetuti, in quanto in quel caso avrei  $n_i = 1$ , e sappiamo che  $1! = 1$ .

*Esempio.* Gli anagrammi della parola *battaia* sono in numero di

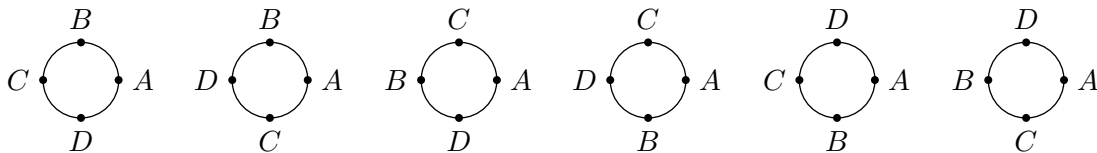
$$P_7^{1,1,3,2} = \frac{7!}{1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 2!} = 420,$$

e si capisce subito perché non sia poi così facile risolvere i giochini coinvolgenti gli anagrammi presenti sui giornali di enigmistica.

*Esempio.* Vogliamo calcolare in quanti modi diversi si possono sedere 4 persone attorno a un tavolo tondo, tenendo conto che in questo caso non dovremo considerare distinte due situazioni in cui tutte le persone sono solo ruotate, come nella figura seguente.



Per risolvere il problema basterà immaginare di tenere fissa una persona, e di permutare le altre 3 nei  $3! = 6$  modi possibili. La risposta nella figura seguente.



### 7.3.3 Combinazioni

Supponiamo ora di voler ricalcolare i raggruppamenti di  $n$  oggetti a  $k$  a  $k$ , senza ripetizioni, ma senza tenere più conto dell'ordine: nella sostanza, dato un insieme di  $n$  elementi, si tratta di considerare i suoi sottoinsiemi contenenti  $k$  elementi, in quanto, come è ben noto, nello scrivere un insieme non conta l'ordine degli elementi.

**Definizione 7.5.** Dato un insieme di  $n$  elementi tutti distinti, si chiamano combinazioni semplici degli  $n$  elementi a  $k$  a  $k$  i raggruppamenti ottenuti prendendo  $k$  degli  $n$  elementi, in modo che due raggruppamenti possano differire solo per almeno uno degli elementi presenti.

Il numero  $C_{n,k}$  delle combinazioni semplici si può calcolare facilmente. Basterà infatti immaginare di scrivere tutte le disposizioni e poi considerare identiche tutte quelle che differiscono solo per l'ordine, che sono in numero di  $k!$ . Si otterrà

$$(7.6) \quad C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$



Questo numero, che ha grande importanza nelle applicazioni, si indica anche con il seguente simbolo speciale

$$(7.7) \quad C_{n,k} = \binom{n}{k},$$

che si legge “ $n$  sopra  $k$ ”.

*Esempio.* Se in una classe di 25 alunni si devono scegliere due rappresentanti che avranno esattamente lo stesso ruolo, la cosa si può fare in  $C_{25,2} = 300$  modi diversi.

## 7.4 La formula del binomio di Newton

Le combinazioni compaiono in una importante formula che consente il calcolo della potenza  $n$ -esima di un binomio:

$$(7.8) \quad (a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

che si può scrivere in maniera compatta come segue

$$(7.9) \quad (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Questa formula è decisamente più utile del noto *triangolo di Tartaglia*, o *di Pascal*, in quanto consente di scrivere una data riga senza dover scrivere prima tutte le precedenti.

Il fatto che le combinazioni compaiano nella formula del binomio ha dato origine alla denominazione *coefficienti binomiali* per i numeri

$$\binom{n}{k}.$$

*Esempio.*

$$\begin{aligned} (a - b)^5 &= \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4(-b)^1 + \binom{5}{2}a^3(-b)^2 + \binom{5}{3}a^2(-b)^3 + \binom{5}{4}a(-b)^4 + \binom{5}{5}(-b)^5 = \\ &= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5. \end{aligned}$$

*Esempio.*

$$\begin{aligned} (1 + 1)^n = 2^n &= \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1} \cdot 1^1 + \dots + \binom{n}{n-1}1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n}1^n = \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}. \end{aligned}$$

Questo risultato è abbastanza importante perché l'ultimo membro si può interpretare nel seguente modo: dato un insieme di  $n$  elementi per ottenere il numero totale dei suoi sottoinsiemi si deve sommare il numero dei sottoinsiemi con 0 elementi, di quelli con 1 elemento, ecc.; ciascuno di questi numeri è dato da

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n},$$

per cui dal calcolo precedente si deduce che il numero dei sottoinsiemi è  $2^n$ .

*Esempio.* Dimostrare che

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Si ha

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \quad \text{e} \quad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Questa proprietà si riscontra nella formula del binomio: termini equidistanti dagli estremi hanno gli stessi coefficienti.

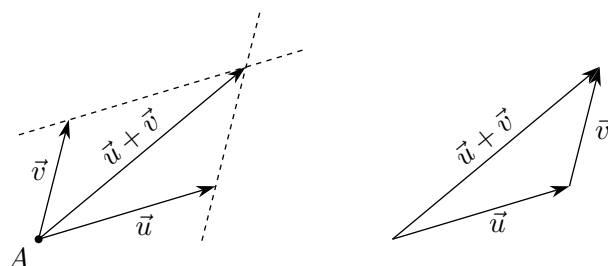
# 8 Algebra lineare

## 8.1 Operazioni tra vettori

Abbiamo già dato, vedi la pagina 12, la definizione di vettore dello spazio. Vediamo ora alcune operazioni che si possono eseguire sui vettori e le loro proprietà. Ripetiamo quanto già osservato nella pagina 13 e cioè che un vettore non è un segmento orientato, quindi non si dovrebbero usare scritte del tipo  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ . Poichè però in realtà un vettore è univocamente individuato da uno dei segmenti orientati della sua classe di equivalenza, potremo, anche se con un certo abuso di linguaggio, usare scritte del tipo indicato ed espressioni del tipo: si consideri il vettore  $\vec{u}$  avente origine nel punto  $A$ . In realtà, essendo un vettore caratterizzato solo da modulo, direzione e verso, il punto origine può essere qualunque.

Il vettore avente lunghezza zero, direzione e verso arbitrari, si chiama *vettore nullo* e si indica con il simbolo  $\vec{0}$ .

Dati due vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , possiamo definire la loro *somma* con la regola del parallelogramma o del “testa-coda”, come mostra la figura che segue.



**Figura 8.1** Somma di vettori: regole del parallelogramma e del testa-coda

Nel primo caso si rappresentano i due vettori a partire dalla stessa origine e si prende come somma la diagonale indicata; nel secondo caso si rappresenta il secondo vettore a partire dalla testa del primo e poi si unisce la coda del primo vettore con la testa del secondo: si ottiene chiaramente lo stesso risultato.

Per questa operazione valgono le usuali proprietà della somma tra numeri: commutativa, associativa, esistenza dell’elemento neutro (il vettore nullo) e dell’opposto (che si indica con  $-\vec{u}$ ).

Dato poi un vettore  $\vec{u}$  e un numero reale  $k$  si chiama prodotto del vettore  $\vec{u}$  per  $k$  il vettore, che si indica con  $k\vec{u}$ , che ha la stessa direzione di  $\vec{u}$ , lo stesso verso se  $k > 0$ , verso opposto se  $k < 0$  e modulo uguale al prodotto del modulo di  $\vec{u}$  per  $|k|$ .

Anche per questa operazione valgono alcune proprietà, simili (ma ovviamente non identiche perchè qui moltiplico tra di loro oggetti diversi: un numero e un vettore) alle proprietà del prodotto fra numeri.

1.  $(h + k)\vec{u} = h\vec{u} + k\vec{u}$ ,  $h(\vec{u} + \vec{v}) = h\vec{u} + h\vec{v}$  (proprietà distributive).
2.  $h(k\vec{u}) = (hk)\vec{u}$ .
3.  $0\vec{u} = \vec{0}$ ,  $1\vec{u} = \vec{u}$ ,  $-1\vec{u} = -\vec{u}$ .

## 8.2 Vettori e componenti

Se nello spazio consideriamo tre rette  $r, s, t$  non complanari, incidenti in un punto  $O$  è sempre possibile scomporre in modo unico un qualunque vettore  $\vec{u}$  in tre vettori paralleli alle tre rette, cioè trovare tre vettori paralleli alle tre rette la cui somma dia il vettore  $\vec{u}$ : questi tre vettori si dicono i *vettori componenti* di  $\vec{u}$  e si indicano con  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Si avrà dunque

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Se ragionassimo nel piano basterebbero due rette distinte e incidenti e si troverebbero due componenti anziché tre. Nelle figure che seguono prenderemo le due rette (nel piano) o le tre rette (nello spazio) tra di loro perpendicolari: si tratta solo di un questione di comodità grafica, la perpendicolarità è del tutto ininfluente.

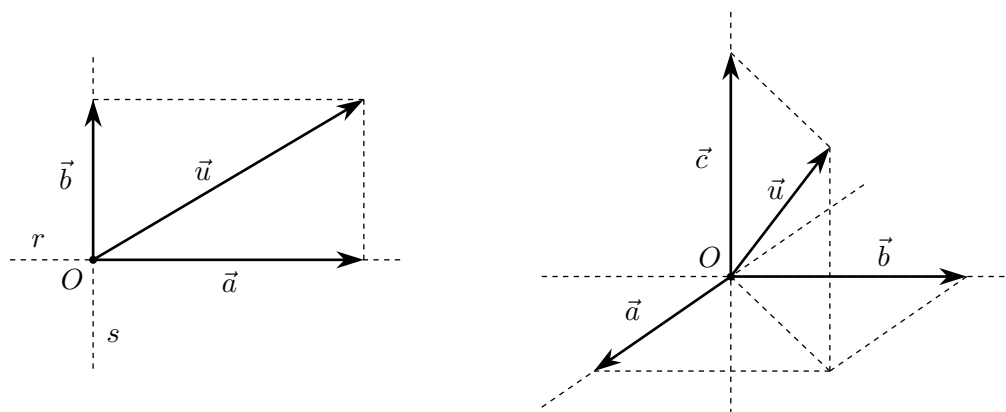


Figura 8.2 Scomposizione di un vettore in due vettori nel piano e tre vettori nello spazio

Se consideriamo tre vettori  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  di modulo 1 (vettori come questi si dicono *versori*) e paralleli alle tre rette  $r, s, t$  (due vettori se siamo nel piano), ciascuno dei vettori  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  si potrà ottenere moltiplicando  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  per un numero, che si dirà *componente del vettore  $\vec{u}$  rispetto ad  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$*  e si indicherà con  $u_1, u_2, u_3$  rispettivamente.

$$(8.1) \quad \vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$$

Dato un vettore  $\vec{u}$  la terna  $(u_1, u_2, u_3)$  è univocamente individuata e, viceversa, data una terna  $(u_1, u_2, u_3)$  c'è un unico vettore  $\vec{u}$  che soddisfi alla formula (8.1). Per di più valgono i due seguenti importantissimi fatti.

1. Dati due vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , di componenti rispettivamente  $(u_1, u_2, u_3)$  e  $(v_1, v_2, v_3)$ , il vettore  $\vec{u} + \vec{v}$  ha componenti  $(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$ .
2. Dato un vettore  $\vec{u}$  di componenti  $(u_1, u_2, u_3)$ , il vettore  $k\vec{u}$  ha componenti  $(ku_1, ku_2, ku_3)$ .

In sostanza per operare con i vettori si possono direttamente utilizzare le terne delle loro componenti (o le coppie se fossimo nel piano), indipendentemente dal fatto geometrico che i vettori sono classi di equivalenza di segmenti orientati equipollenti. Questo significa che si può identificare l'insieme dei vettori del piano con l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali ( $\mathbb{R}^2$ ) e l'insieme dei vettori dello spazio con l'insieme delle terne ordinate di numeri reali ( $\mathbb{R}^3$ ).

## 8.3 Vettori in $\mathbb{R}^n$

A questo punto, avendo *identificato* i vettori con coppie o terne di numeri, nulla ci vieta di considerare quaterne di numeri reali, o più in generale  $n$ -uple, e di operare su queste esattamente

come si opera sulle terne, e magari di chiamare ancora vettori queste  $n$ -uple, anche se, ovviamente, non ci potrà essere più alcun significato o interpretazione geometrica.

**Definizione 8.1.** Si dice *vettore  $n$ -dimensionale* una  $n$ -upla ordinata di numeri reali:  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ . L'insieme dei vettori  $n$ -dimensionali si indica con  $\mathbb{R}^n$ . Due vettori  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  sono uguali se e solo  $u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n$ . Il vettore  $(0, 0, \dots, 0)$  (cioè l' $n$ -upla costituita da tutti zeri, si chiama *vettore nullo* di  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 8.2.** Dati due vettori  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  si chiama *loro somma* il vettore

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n).$$

**Definizione 8.3.** Dato un vettore  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  e un numero reale  $k$  si chiama *prodotto del vettore  $\vec{u}$  per il numero reale  $k$*  il vettore

$$k\vec{u} = (ku_1, ku_2, \dots, ku_n)$$

Nell'insieme  $\mathbb{R}^n$  si possono dunque eseguire due operazioni, la somma, detta operazione interna perché sia i due addendi che il risultato sono vettori, e la moltiplicazione per un numero (si dice anche moltiplicazione per uno scalare), detta operazione esterna perché dei tre oggetti coinvolti (due in partenza e uno in arrivo) uno non è un vettore. Queste due operazioni godono esattamente delle stesse proprietà di cui godono le operazioni tra i vettori "ordinari" del piano e dello spazio ed è per questo che  $\mathbb{R}^n$  è detto uno *Spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$* . Il numero  $n$  si dice la *dimensione* dello spazio.

*Esempio.* Dati i tre vettori di  $\mathbb{R}^4$ ,  $\vec{u} = (2, -1, 3, 0)$ ,  $\vec{v} = (1, 2, -2, 1)$ ,  $\vec{w} = (-1, 3, 5, -2)$ , trovare il vettore  $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$ . Si ha

$$\begin{aligned} 2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} &= 2(2, -1, 3, 0) - 3(1, 2, -2, 1) + (-1, 3, 5, -2) = \\ &= (4, -2, 6, 0) + (-3, -6, 6, -3) + (-1, 3, 5, -2) = (0, -5, 17, -3). \end{aligned}$$

## 8.4 Matrici

**Definizione 8.4.** Si dice *matrice  $m \times n$  (in  $\mathbb{R}$ )* una tabella rettangolare costituita da numeri reali disposti su  $m$  righe e  $n$  colonne. Indicheremo una matrice con la scrittura

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

segnalando che alcuni usano le parentesi quadre al posto delle tonde.

Per indicare esplicitamente che la matrice ha  $m$  righe e  $n$  colonne scriveremo  $A_{m \times n}$  o anche, se non ci sono possibilità di equivoco,  $A_{mn}$ . Gli  $m \cdot n$  numeri reali che costituiscono una matrice si dicono i suoi *elementi*: l'elemento generico sarà indicato con  $a_{ij}$  dove  $i$  è l'*indice di riga* e  $j$  è l'*indice di colonna*.

Due matrici dello stesso tipo sono uguali se hanno tutti gli elementi corrispondenti uguali.

In sostanza una matrice è una fila di numeri (come un vettore), solo che i numeri invece di essere scritti in un'unica riga (in successione), sono scritti separandoli su varie righe. Non ci sarà quindi nessun problema a fare la somma di due matrici o il prodotto di una matrice per un numero. Il fatto però di aver scritto questi numeri in tabella ci consentirà però di introdurre una nuova operazione, il prodotto tra matrici, che si rivelerà cruciale per le applicazioni.

**Definizione 8.5.** Date due matrici dello stesso tipo, cioè entrambe  $m \times n$ , si dice *somma delle due matrici* la matrice  $m \times n$  ottenuta sommando ordinatamente gli elementi delle due matrici. Si dice *prodotto di una matrice per un numero* la matrice ottenuta moltiplicando ciascun elemento della matrice per quel numero.

È ovvio che queste operazioni godono delle stesse proprietà delle analoghe operazioni tra vettori, per cui l'insieme di tutte le matrici  $m \times n$  è uno spazio vettoriale, di dimensione  $m \times n$ .

E ora un po' di nomenclatura relativa alle matrici.

- Una matrice si dice *quadrata* se il numero di righe è uguale al numero di colonne. In questo caso il numero comune di righe e colonne si dice l'*ordine* della matrice.
- Data una matrice  $A_{mn}$  diremo *trasposta* di  $A$  la matrice  $A_{nm}^T$ , ottenuta scambiando in  $A$  le righe con le colonne.

*Esempio.* La trasposta di  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$  è la  $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ .

- La matrice  $A_{mn}$  i cui elementi sono tutti nulli si dice *la matrice nulla*  $m \times n$  e si indica con  $0_{mn}$ , a volte anche semplicemente con  $0$  se non ci sono possibilità di equivoci: bisogna però prestare attenzione a non confondere la matrice nulla con il numero  $0$ .
- Una matrice quadrata si dice *simmetrica* se coincide con la sua trasposta.

*Esempio.* La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  è simmetrica.

- In una matrice quadrata gli elementi aventi lo stesso numero di riga e di colonna costituiscono la *diagonale principale*

*Esempio.* Nella matrice seguente gli elementi incasellati sono quelli della diagonale principale.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 2 \\ 3 & \boxed{2} & 3 & 1 \\ 0 & 3 & \boxed{0} & -1 \\ 2 & 1 & -1 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

- Una matrice quadrata si dice *diagonale* se tutti gli elementi fuori dalla diagonale principale sono nulli.

*Esempio.* La matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  è diagonale.

- La matrice quadrata diagonale in cui tutti gli elementi della diagonale principale valgono  $1$  si dice *matrice unità*  $n \times n$  e si indica con  $I_n$ .

I vettori di  $\mathbb{R}^n$  possono essere considerati come matrici a una sola riga (e  $n$  colonne), e si dicono *vettori-riga* oppure a una sola colonna (e  $n$  righe) e si dicono *vettori-colonna*. Normalmente è più utile pensarli nel secondo modo, ovvero come vettori-colonna.

## 8.5 Il prodotto tra matrici

Come già anticipato, il fatto di avere scritto gli  $m \times n$  numeri che compongono una matrice in una tabella anzichè in una riga, ci consente di introdurre una nuova operazione nell'insieme

delle matrici, precisamente il *prodotto righe per colonne*. La definizione e le proprietà di questa operazione sono un po' più complesse e delicate che non quelle delle due operazioni precedenti e le tratteremo con un po' più di dettaglio.

Conviene subito precisare che, mentre l'operazione di somma si esegue tra matrici dello stesso tipo (cioè con lo stesso numero di righe e di colonne), ciò non accade per il prodotto (righe per colonne) di matrici. La condizione indispensabile perché questa operazione si possa eseguire è che *il numero di colonne della prima matrice sia uguale al numero di righe della seconda*.

Precisamente date una matrice  $A_{m \times n}$  e una matrice  $B_{n \times p}$ , il prodotto, che definiremo tra poco, tra  $A$  e  $B$ , *nell'ordine*, è un matrice  $C_{m \times p}$ :

$$C_{m \times p} = A_{m \times n} \cdot B_{n \times p}.$$

Anche se in questa formula abbiamo usato il punto per indicare la moltiplicazione, normalmente non useremo alcun simbolo, esattamente come si fa con il prodotto di numeri, quando non ci sono equivoci.

È ovvio che per questa operazione non ha nemmeno senso chiedersi, in generale, se vale la proprietà commutativa: infatti di solito se si può fare il prodotto  $AB$ , non si può fare quello  $BA$ . Per esempio il prodotto  $A_{2 \times 3} B_{3 \times 4}$  si può fare e produce una matrice  $C_{2 \times 4}$ , mentre il prodotto inverso non si può fare in quanto non è soddisfatta la regola generale sul numero di righe della prima matrice e il numero di colonne della seconda. Alcune volte ha senso invertire l'ordine nel prodotto, come nel caso  $A_{2 \times 3} B_{3 \times 2}$ , che produce una matrice  $C_{2 \times 2}$ ; il prodotto in ordine inverso produce invece una matrice completamente diversa, in quanto si tratta di una matrice  $D_{3 \times 3}$ . Se per caso le due matrici sono quadrate e dello stesso ordine, allora il prodotto, in qualunque ordine, dà una matrice ancora dello stesso ordine: tuttavia, come vedremo, anche in questo caso uno scambio di ordine può cambiare il risultato.

L'algoritmo da usare per eseguire il prodotto è un po' noioso da esprimere a parole e cercheremo di sintetizzarlo in modo da ottenere una formulazione facilmente utilizzabile, ragionando su un esempio. Supponiamo di dover moltiplicare una matrice  $A_{2 \times 3}$  per una matrice  $B_{3 \times 4}$ : il prodotto dovrà essere una matrice  $C_{2 \times 4}$ . Potremo simbolicamente rappresentare la situazione con la seguente figura

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}.$$

Ciascuno dei box da riempire della matrice  $C$  ha un ben preciso numero di riga e di colonna, come evidenziato nella figura che segue:

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1,1} & \boxed{1,2} & \boxed{1,3} & \boxed{1,4} \\ \boxed{2,1} & \boxed{2,2} & \boxed{2,3} & \boxed{2,4} \end{pmatrix}.$$

Consideriamo allora uno dei box da riempire, per esempio il box  $\boxed{2,3}$ . Basterà moltiplicare ciascun elemento della 2<sup>a</sup> riga della prima matrice (che ha 3 elementi), per *il corrispondente* elemento della 3<sup>a</sup> colonna della seconda matrice (che ha sempre 3 elementi) e poi sommare i prodotti così ottenuti: il risultato andrà ad occupare il box  $\boxed{2,3}$  della matrice prodotto. La figura che segue illustra il procedimento.

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \boxed{2,1} & \boxed{2,2} & \boxed{2,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \boxed{1,3} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \boxed{2,3} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \boxed{3,3} & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \boxed{2,3} & \cdot \end{pmatrix}.$$

Un esempio numerico chiarirà ancora meglio come si opera.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 11 & -4 & 7 \\ 18 & 8 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Il numero 8, al posto (2,3) della matrice prodotto, è stato ottenuto<sup>(1)</sup> con il seguente calcolo:

$$(-3)(-2) + (-1)(3) + (5)(1) = 8.$$

Lo studente può provare, per esercizio, ad ottenere gli altri valori indicati.

Come ulteriore esempio consideriamo il prodotto seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 10 & 21 \\ 19 & 4 & 18 & 13 \\ 3 & 2 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Oltre a controllare la correttezza del risultato<sup>(2)</sup>, è utile verificare che scambiando l'ordine il risultato è completamente diverso, anche se in questo caso lo scambio di ordine è perfettamente legittimo, trattandosi di matrici quadrate entrambe  $4 \times 4$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -5 & 15 \\ 3 & 4 & 16 & -4 \\ -3 & 7 & -6 & 14 \\ -3 & 17 & -3 & 29 \end{pmatrix}.$$

Naturalmente il fatto che, *di solito*, non sia consentito scambiare l'ordine nel prodotto, non significa che la cosa non sia mai possibile. Un esempio è fornito dal calcolo che segue.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ma anche

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un'altra cosa che distingue il prodotto di matrici dall'ordinario prodotto di numeri è il fatto che, per il prodotto di matrici, *non vale la legge dell'annullamento del prodotto*: può benissimo darsi che il prodotto di due matrici sia la matrice nulla (cioè formata da tutti zeri), senza che le due matrici fattore siano nulle. Un esempio è il seguente:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si verifica subito che si ha anche

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

<sup>1</sup>Tutti i software di calcolo simbolico consentono di ottenere facilmente il prodotto di matrici, anche molto grandi. In effetti il calcolo riportato nell'esempio è stato ottenuto con *Mathematica*, compresa la formattazione necessaria per la stampa con L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

<sup>2</sup>Sempre ottenuto con *Mathematica*, ma è meglio non fidarsi!



cioè che il prodotto rimane la matrice nulla, anche scambiando l'ordine. Visto che però il prodotto di due matrici non è commutativo, non deve stupire il fatto che, in un prodotto di due matrici  $A$  e  $B$ , possa succedere che  $AB = 0$ , mentre  $BA \neq 0$ , come mostra l'esempio che segue.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mentre

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ci sono naturalmente anche cose che il prodotto di matrici ha in comune con l'ordinario prodotto di numeri e sono, precisamente, le seguenti.

1. La *proprietà associativa*, ovvero  $(AB)C = A(BC)$ , che consente di evitare l'uso di parentesi;
2. La *proprietà distributiva* rispetto alla somma, ovvero  $(A+B)C = AC + BC$  e  $A(B+C) = AB + AC$ . Si noti che, non essendo il prodotto commutativo, le due scritture sono diverse. Anche con il prodotto di matrici si adotta la convenzione in uso con il prodotto di numeri, ovvero che il prodotto ha precedenza sulla somma: scrivendo  $AB+C$  intendiamo  $(AB)+C$ .
3. L'esistenza, nel caso ci si limiti ad operare *solo ed esclusivamente* con matrici quadrate dello stesso ordine  $n$ , dell'elemento neutro, cioè di una particolare matrice che non ha alcuna influenza nel prodotto, come il numero 1 nel prodotto tra numeri (il prodotto per 1 non occorre scriverlo!). Questa matrice è la  $I_n$  che, non a caso, abbiamo chiamato *matrice unità*.

Si tengano ben presenti le condizioni per potere effettuare le operazioni indicate: la somma di due matrici si può fare solo tra matrici dello stesso tipo (e produce ancora una matrice dello stesso tipo); il prodotto tra matrici si può fare solo se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda (e produce, in generale, una matrice diversa da entrambe). Operando nell'ambito delle matrici quadrate di ordine  $n$ , non c'è, naturalmente, alcun problema: le somme e i prodotti si possono sempre eseguire e tutti i risultati sono ancora matrici dello stesso ordine (ma attenzione a non scambiare i fattori in un prodotto!).

Le proprietà indicate si possono dimostrare rigorosamente, ma ci accontentiamo di una verifica in casi concreti, invitando ancora una volta lo studente, come utile esercizio, a fare tutti i calcoli necessari.

*Esempio.*

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 56 & -24 \\ 137 & -131 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*Esempio.*

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \\ & = \left[ \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right] + \left[ \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -12 & -9 \\ 31 & 29 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*Esempio.*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 \\ 5 & 3 & 7 & -2 \\ -3 & 6 & 8 & 1 \\ 4 & -9 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 \\ 5 & 3 & 7 & -2 \\ -3 & 6 & 8 & 1 \\ 4 & -9 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 \\ 5 & 3 & 7 & -2 \\ -3 & 6 & 8 & 1 \\ 4 & -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Un'altra sostanziale differenza tra il prodotto di matrici e il prodotto di numeri è legato al concetto di reciproco. È ben noto che, dato un numero  $a$  diverso da 0, esiste uno e un solo numero  $b$  diverso da zero tale che  $a \cdot b = 1$ . Il numero  $b$  si indica con  $a^{-1}$  o, anche, con  $1/a$  e si chiama il reciproco di  $a$ . Ci si può porre l'analogo problema con le matrici. Intanto ci si scontra con la difficoltà legata al fatto che il prodotto di matrici non è sempre definito, ma questo si risolve facilmente, limitandosi a considerare solo l'insieme delle matrici quadrate di ordine  $n$ , con  $n$  fissato. Nonostante questo, data una matrice  $A_{n \times n}$ , non è affatto detto che esista una matrice  $B_{n \times n}$ , tale che  $AB = I_n$ . Come al solito vediamo alcuni esempi per capire il problema.

*Esempio.* Sia data la matrice seguente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

e poniamoci il problema della ricerca di una matrice  $B_{2 \times 2}$  tale che

$$AB = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $B$  dovrà essere del tipo

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},$$

con valori delle incognite  $x, y, z, t$  da determinare. Se calcoliamo il prodotto  $AB$  notiamo che deve essere:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2z & y - 2t \\ 3x + 4z & 4t + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

da qui otteniamo un sistema di 4 equazioni in 4 incognite (di primo grado!), di immediata risoluzione:

$$\begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - 2t = 0 \\ 3x + 4z = 0 \\ 4t + 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{5} \\ z = -\frac{3}{10} \\ t = \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Si noti che il sistema è di facile risoluzione perché può essere spezzato in due separati sistemi di due equazioni in due incognite. Dunque in questo caso è stato possibile trovare una matrice  $B$  tale che  $AB = I_2$ . Si può verificare che vale anche  $BA = I_2$ .

Purtroppo la cosa non è sempre possibile, come mostra il seguente esempio.

*Esempio.* Sia data la matrice seguente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 13 & 1 \end{pmatrix},$$

e cerchiamo, se esiste, una matrice  $B$  tale che  $AB = I_3$ . Usando la stessa strategia di prima, il problema si potrà scrivere nella forma seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 13 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_4 - x_7 & x_2 + 2x_5 - x_8 & x_3 + 2x_6 - x_9 \\ -2x_1 + 3x_4 + x_7 & -2x_2 + 3x_5 + x_8 & -2x_3 + 3x_6 + x_9 \\ -4x_1 + 13x_4 + x_7 & -4x_2 + 13x_5 + x_8 & -4x_3 + 13x_6 + x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene un sistema di 9 equazioni in 9 incognite, che si può spezzare in 3 sistemi di 3 equazioni in 3 incognite. Non è difficile provare che il sistema non ha alcuna soluzione, da cui si conclude che, questa volta, non esiste una matrice  $B$  che soddisfi i requisiti richiesti.

Questi esempi ci conducono a dare la seguente definizione.

**Definizione 8.6.** Una matrice  $A_{n \times n}$  si dice invertibile, se esiste una matrice  $B_{n \times n}$  tale che  $AB = BA = I_n$ . In questo caso la matrice  $B$  si chiama inversa della matrice  $A$  e si indica con  $A^{-1}$ , in modo analogo a quanto si fa con i numeri.

Si prova poi che una tal matrice se esiste è unica. Il fatto che l'inversa non esista sempre ha come conseguenza che *non* si definisce una operazione di divisione tra matrici.

## 8.6 Il determinante di una matrice quadrata

Consideriamo una matrice quadrata  $A_{n \times n}$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

e scegliamo a caso un suo elemento. Se sopprimiamo la riga e la colonna che passano per quell'elemento, otterremo una nuova matrice  $B_{n-1 \times n-1}$ . Per esempio sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 6 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & 8 \\ 7 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

e consideriamo l'elemento  $a_{23} = 6$ . Se sopprimiamo la riga e la colonna che passano per quell'elemento, otterremo la nuova matrice  $B$ , a tre righe e tre colonne:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 7 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice si chiama *matrice complementare* dell'elemento  $a_{23}$  e si indica con il simbolo  $A_{23}$ . In generale, se indichiamo con  $a_{ij}$  l'elemento, la matrice complementare si indicherà con  $A_{ij}$ .

Introdurremo ora un numero di fondamentale importanza, associato ad ogni matrice quadrata, e precisamente il *determinante* della matrice, indicato con

$$\det(A), \quad \text{oppure} \quad |A| .$$

Come al solito preferiamo una definizione operativa ad una formale, e senza nemmeno preoccuparci di dare la più corta possibile, ma la più immediatamente utilizzabile. Partiamo allora da una matrice  $A_{1 \times 1}$ , cioè un numero reale: se  $A = a$ , porremo, per definizione,

$$\det(A) = a ,$$

cioè il determinante di una matrice  $1 \times 1$  è il numero stesso (qui è meglio non usare il secondo simbolo per il determinante perché si può fare confusione con il simbolo di valore assoluto).

Consideriamo poi una matrice  $2 \times 2$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} .$$

In questo caso porremo, sempre per definizione,

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

Passiamo poi a una matrice  $3 \times 3$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Scegliamo una riga o una colonna qualsiasi e scriviamo, per ciascuno degli elementi di quella riga o colonna, la matrice complementare: si tratta di 3 matrici  $2 \times 2$ , di cui già sappiamo calcolare il determinante. Supponendo di avere scelto, per esempio, la 3 riga, il determinante della matrice  $A_{3 \times 3}$  sarà, per definizione,

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{3+1} a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} . \end{aligned}$$

Per una matrice  $4 \times 4$  ripetiamo la strategia: scegliamo una riga o una colonna qualsiasi, calcoliamo le matrici complementari di ciascuno dei 4 elementi, ottenendo 4 matrici di ordine 3, di cui sappiamo calcolare il determinante e procediamo come abbiamo fatto con la matrice  $3 \times 3$ . Supponendo, per esempio, di avere scelto la seconda colonna, procederemo come mostra la formula seguente.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} a_{12} |A_{12}| + (-1)^{2+2} a_{22} |A_{22}| + (-1)^{3+2} a_{32} |A_{32}| + (-1)^{4+2} a_{42} |A_{42}|$$

Naturalmente dovremmo provare che il risultato non dipende dalla riga o colonna scelta, ma... ci fidiamo! In ogni caso, come al solito, è possibile verificarlo su esempi concreti.

È chiaro che si tratta di un calcolo lungo e noioso, anche se esistono numerose strategie per velocizzarlo. Esula dagli scopi di questo corso lo studio di queste strategie: segnaliamo solo che tutti i software di calcolo simbolico (compreso Geogebra) possono eseguire facilmente questo calcolo, che del resto è molto elementare, richiede solo di fare somme e prodotti di numeri (anche se in quantità industriale!).

*Esempio.* Nella matrice che segue, per trovare il determinante, scegliamo la prima riga, ottenendo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot (4 - 6) - 1 \cdot 3 \cdot (-8 + 6) + 1 \cdot (-1) \cdot (4 - 2) = 2.$$

È un utile esercizio ripetere lo stesso calcolo scegliendo un'altra riga o colonna.

Per completezza segnaliamo che il numero

$$(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

cioè il determinante della matrice complementare dell'elemento  $a_{ij}$ , moltiplicato per  $(-1)^{i+j}$ , si chiama *complemento algebrico* dell'elemento stesso.

### 8.6.1 Il calcolo della matrice inversa

La conoscenza del determinante di una matrice ci permette di stabilire a priori se la matrice stessa è invertibile oppure no. Precisamente si dimostra che una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero. Una matrice a determinante nullo si dice anche *singolare*, e il nome è proprio legato al fatto che la matrice in questo caso non è invertibile.

Il calcolo pratico della matrice inversa (se non singolare!) si può fare con la seguente regola.

1. Si calcola il determinante di  $A$ ,  $|A|$ ;
2. si scrive la matrice trasposta, di  $A$ :  $A^T$ ;
3. si sostituisce, in tale matrice trasposta, ciascun elemento con il rispettivo complemento algebrico;
4. si divide la matrice così ottenuta per  $|A|$ , ottenendo l'inversa della matrice  $A$ .

*Esempio.* Sia

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\det(A) = 6 \cdot 4 - 8 \cdot 7 = -32 \quad , \quad A^T = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sostituiamo in quest'ultima matrice ogni elemento con il suo complemento algebrico e dividiamo poi per  $-32$ :

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{-32} & \frac{-8}{-32} \\ \frac{-7}{-32} & \frac{6}{-32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{32} & -\frac{3}{16} \end{pmatrix}.$$

A questo punto è facile verificare che

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{32} & -\frac{3}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e che

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{32} & -\frac{3}{16} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 8.7 Il rango di una matrice

Data una matrice qualunque  $A_{m \times n}$ , dunque anche non quadrata, scegliamo  $k$  righe e  $k$  colonne qualsiasi: gli elementi comuni a queste  $k$  righe e  $k$  colonne costituiscono una matrice quadrata, che si chiama *matrice estratta* dalla matrice  $A$ ; di questa matrice si può calcolare il determinante che chiameremo *minore*, o anche minore estratto, di ordine  $k$ .

Per esempio dalla matrice  $A_{2 \times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

si possono estrarre 6 minori di ordine 1

$$1, 3, -1, -2, 1, -3,$$

e tre minori di ordine 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -5, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -8, \quad .$$

Il massimo intero positivo  $r$  per cui esiste un minore di ordine  $r$  diverso da zero si chiama *rango* della matrice.

*Esempio.* Il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

è 3, perchè, per esempio, il minore di ordine 3 ottenuto con la prima, la terza e la quarta colonna vale 7, come è facile provare:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 7.$$

*Esempio.* Il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -5 & 5 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -8 & 8 & -6 \end{pmatrix},$$

è 2, perché l'unico minore di ordine 4 (cioè il determinante della matrice stessa) vale 0 (provarlo per esercizio), tutti i minori di ordine 3 valgono sempre 0 (anche questo è da provare per esercizio), mentre per esempio il minore di ordine 2 ottenuto intersecando le prime due righe e le prime due colonne vale (è immediato!) 7.

## 8.8 I sistemi lineari

Si chiama *sistema lineare* un sistema di  $m$  equazioni in  $n$  incognite, di *primo grado*. Questo tipo di sistemi hanno grande importanza in numerose applicazioni, in particolare in informatica. Ci occuperemo, seppure per sommi capi del problema della loro risoluzione.

In generale un sistema del tipo considerato si può scrivere nella forma seguente.

$$(8.2) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

La matrice costruita con tutti i coefficienti delle incognite si dice matrice dei coefficienti o anche *matrice incompleta*.

$$(8.3) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

La matrice a  $m$  righe e una colonna, contenente i termini noti si chiama *vettore dei termini noti*.

$$(8.4) \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Si considera poi una matrice a  $n$  righe e una colonna, contenente tutte le incognite, detta *vettore delle incognite*.

$$(8.5) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

A questo punto il sistema (8.3) si può scrivere nella seguente forma compatta:

$$(8.6) \quad A\vec{x} = \vec{b},$$

che ha lo stesso identico aspetto delle equazioni di primo grado in una incognita

$$(8.7) \quad ax = b,$$

solo che ora gli oggetti  $A$ ,  $\vec{x}$  e  $\vec{b}$  non sono più numeri, ma matrici.

Si chiama *soluzione* del sistema (8.3) una vettore numerico a  $n$  componenti

$$(8.8) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

tale che sostituendo ordinatamente le sue componenti al posto delle incognite, il sistema risulti soddisfatto.

Si può dimostrare che un sistema di questo tipo può avere solo tre comportamenti rispetto alla sua risolubilità:

1. non avere soluzioni, nel qual caso si dice *incompatibile*;
2. avere una sola soluzione, nel qual caso si dice *determinato*;
3. avere infinite soluzioni, nel qual caso si dice *indeterminato*.

Un sistema che abbia soluzioni (una o infinite) si dice *compatibile*.

Per valutare la risolubilità del sistema occorre considerare, oltre alla matrice incompleta  $A$ , anche la *matrice completa*, che si indica con  $A|b$  e si ottiene aggiungendo, a destra, alle colonne di  $A$  la colonna dei termini noti.

$$(8.9) \quad A|b = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

La separazione dell'ultima colonna con una barra verticale consente di visualizzare immediatamente nella stessa scrittura sia la matrice incompleta che quella completa. In sostanza parlando di sistemi lineari, ci si può limitare a scrivere direttamente la matrice completa, nel modo indicato: da questa scrittura, volendo, è immediato ricavare la scrittura tradizionale con le equazioni e le incognite. Negli esempi che seguono faremo sempre così.

La risolubilità o meno del sistema lineare si può decidere sulla base del seguente teorema, che ci limitiamo a enunciare.

**Teorema 8.7** (Teorema di Rouché-Capelli). *Il sistema lineare (8.2) di  $m$  equazioni in  $n$  incognite ha soluzioni se e solo se la matrice incompleta e quella completa hanno lo stesso rango. Il rango comune delle due matrici, quando il sistema è compatibile, si chiama anche rango del sistema.*

*Esempio.* Il sistema lineare di matrice completa

$$A|b = \left( \begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 11 \\ 2 & 7 & 4 \end{array} \right)$$

non ha soluzioni, perché la matrice completa ha determinante

$$\det(A|b) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 11 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

e quindi rango 3, mentre quella incompleta potrebbe avere al massimo rango 2, in quanto ha solo due colonne.

*Esempio.* Il sistema lineare di matrice completa

$$A|b = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{array} \right)$$

è compatibile. Infatti si ha  $\det(A|b) = 0$ , mentre, per esempio,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

e quindi le matrici incompleta e, a maggior ragione quella completa, hanno rango 2. Si noti che, ovviamente, il rango della matrice completa non può essere più piccolo di quello della matrice incompleta, in quanto ogni minore della incompleta è anche minore della completa.



Come mostra l'ultimo esempio sopra riportato, per la compatibilità del sistema occorre trovare un minore non nullo di ordine massimo possibile che sia contemporaneamente minore della matrice incompleta e di quella completa. Fatto questo la risoluzione del sistema procede con i passi indicati di seguito (e che saranno meglio chiariti, al solito, con un esempio).

1. Sopprimi tutte le eventuali equazioni corrispondenti alle righe i cui coefficienti non intervengono nel minore trovato.
2. Trasporta a secondo membro tutti gli eventuali termini contenenti le incognite corrispondenti a colonne che non intervengono nel calcolo del minore trovato: queste incognite saranno considerate come parametri, cioè rimarranno completamente arbitrarie.
3. Il sistema residuo è ora un sistema quadrato, ovvero con lo stesso numero di equazioni e di incognite: risolvilo usando il teorema di Cramer che segue.

Se il sistema è compatibile e non c'è nessuna incognita da considerare come parametro, allora esso ha una sola soluzione; se è compatibile e ci sono incognite da considerare come parametro, allora il sistema ha infinite soluzioni e, se i parametri sono  $k$ , si usa dire che ha  $\infty^k$  soluzioni.

**Teorema 8.8** (Teorema di Cramer). *Sia dato un sistema quadrato compatibile di  $n$  equazioni in  $n$  incognite, di matrice dei coefficienti  $A$ , e determinante  $\det(A) \neq 0$ . Si considerino le matrici  $A_i$ , ottenute sostituendo alla  $i$ -esima colonna di  $A$  la colonna dei termini noti. L'unica soluzione del sistema è data da*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}.$$

*Esempio.* Il sistema di matrice completa

$$A|b = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 13 \\ 2 & 4 & 3 & 19 \\ 4 & 5 & 2 & 20 \end{array} \right)$$

è compatibile perché per la matrice incompleta si ha  $\det(A) = -17 \neq 0$ , e quindi il suo rango è 3. La matrice completa deve avere lo stesso rango, perché intanto ha rango maggiore della incompleta e, inoltre, ha solo 3 righe. Per le tre matrici  $A_i$  si ha:

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 13 & 2 & 2 \\ 19 & 4 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -17 \quad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 3 & 13 & 2 \\ 2 & 19 & 3 \\ 4 & 20 & 2 \end{vmatrix} = -34 \quad \det(A_3) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 13 \\ 2 & 4 & 19 \\ 4 & 5 & 20 \end{vmatrix} = -51.$$

La soluzione del sistema è allora data da

$$x_1 = \frac{-17}{-17} = 1, \quad x_2 = \frac{-34}{-17} = 2, \quad x_3 = \frac{-51}{-17} = 3,$$

cioè dal vettore colonna

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

*Esempio.* Il sistema lineare di matrice completa

$$A|b = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

ha rango 2. Infatti i quattro minori della matrice completa sono tutti nulli (compreso quindi quello costituito solo dalla matrice incompleta)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

mentre la matrice estratta prendendo le prime due righe e le prime due colonne (sottomatrice comune della completa e della incompleta), ha determinante (minore)  $9 - 8 = 1 \neq 0$ .

Trascuriamo quindi la terza equazione e portiamo i termini contenenti la terza incognita a secondo membro.

$$\left( \begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 + x_3 \\ 4 & 3 & 2 + x_3 \end{array} \right)$$

Questo sistema si risolve con Cramer ottenendo

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 + x_3 & 2 \\ 2 + x_3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = x_3 - 1, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 + x_3 \\ 4 & 2 + x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = 2 - x_3,$$

mentre  $x_3$  rimane completamente arbitrario (parametro) e possiamo indicarlo con  $t$ . I vettori soluzione sono allora

$$\begin{pmatrix} t - 1 \\ 2 - t \\ t \end{pmatrix},$$

che sono infinite, al variare di  $t$ . Poiché è rimasto un solo parametro, il sistema ha  $\infty^1$  soluzioni.

## 9 Elementi di Calcolo delle probabilità

In questo capitolo proponiamo una introduzione al calcolo delle probabilità. Ci limiteremo solo ai concetti essenziali, senza alcuna pretesa di completezza e sistematicità.

### 9.1 Definizioni di probabilità

Non è facile dare una definizione precisa di che cosa si intenda con *probabilità*, anche se a livello intuitivo il concetto sembra abbastanza chiaro. L'idea è quella di esprimere una valutazione numerica del grado di fiducia che attribuiamo al verificarsi di un certo fatto o *evento*: eventi attesi con maggiore fiducia dovranno essere contrassegnati da una probabilità più alta, eventi considerati rari da una probabilità minore. Storicamente sono i proposti diversi modi per definire in maniera formalmente precisa questo concetto. Ne proporremo alcuni.

**Definizione 9.1** (Definizione di Laplace, o Definizione classica). *La probabilità di un evento  $A$  è il rapporto tra il numero di casi favorevoli al manifestarsi di  $A$  e il numero totale di casi possibili, giudicati tutti egualmente possibili.*

*Esempio.* La probabilità di vincere giocando una sestina al superenalotto si ottiene osservando che c'è un unico caso favorevole (l'uscita della sestina giocata, appunto), mentre i casi possibili sono tutte le combinazioni di 90 numeri a gruppi di 6 (cioè tutte le sestine possibili; quest'ultimo numero è dato da

$$\binom{90}{6} = \frac{90!}{84! 6!} = 622614630.$$

La probabilità cercata è dunque

$$\frac{1}{622614630} \approx 0.0000000016$$

che è come dire *quasi 0!*

Questa definizione si presta subito a una critica: cosa vuol dire che i casi considerati sono tutti *egualmente possibili*? La prima cosa che ci viene in mente è di rispondere che i casi considerati hanno tutti la stessa probabilità di manifestarsi, ma così finiremmo per definire la probabilità usando il concetto di probabilità nella definizione, cioè cadremmo in un circolo vizioso. Ci sono poi situazioni di interesse concreto in cui i casi possibili non possono essere ricondotti a un numero finito di casi ugualmente possibili.

Nonostante queste (e altre) difficoltà, la definizione di Laplace è la più comunemente usata e anche noi, negli esempi ed esercizi proposti, ci riferiremo sempre ad essa.

Una diversa definizione si può dare utilizzando il concetto di *frequenza*, o meglio *frequenza relativa*, di un evento. Se per esempio lanciamo 10 volte un dado (che non sappiamo se è truccato oppure no) e esce 2 volte il numero 6, possiamo dire che la frequenza di uscita del 6 su 10 lanci, cioè la frequenza relativa, è  $2/10 = 0.2$ . L'idea è quella di assegnare all'evento "esce il 6" nel lancio di quel dado la probabilità 0.2. Naturalmente potremmo obiettare che 10 lanci sono pochi, e in effetti nella definizione che daremo si richiede che il numero di ripetizioni dell'esperimento sia molto elevato, anzi si considera il limite a cui tende la frequenza al tendere all'infinito del numero di ripetizioni.

**Definizione 9.2** (Definizione di von Mises o Definizione frequentista). *La probabilità dell'esito  $A$  di un esperimento (che possa essere ripetuto nelle stesse identiche condizioni) è il limite a cui tende la frequenza relativa dell'esito  $A$  al tendere all'infinito del numero di prove effettuate.*

Anche questa definizione si presta a critiche. Innanzitutto è necessario supporre che il limite richiesto esista; inoltre dobbiamo chiederci se è possibile ripetere infinite volte (o almeno un gran numero di volte) un esperimento nelle stesse identiche condizioni: in realtà è più corretto considerare un esperimento ripetuto  $n$  volte come una successione di  $n$  esperimenti (analoghi) effettuati successivamente.

Come ultima definizione di probabilità accenniamo a quella proposta da uno dei più grandi esperti contemporanei di questa materia, Bruno de Finetti.

**Definizione 9.3** (Definizione di de Finetti o Definizione soggettiva). *La probabilità di un evento  $A$ , secondo l'opinione di un individuo coerente, è il prezzo che tale individuo ritiene giusto scommettere per vincere un importo unitario al verificarsi dell'evento  $A$ .*

*Esempio.* Un individuo coerente riterrà giusto scommettere  $1/6$  di euro sull'uscita del numero 1, nel lancio di un dado, se tale uscita viene ricompensata con 1 euro. Pertanto la probabilità dell'evento è  $1/6$ .

Anche se una tale definizione sembra (come del resto dice il nome stesso) *soggettiva* e quindi pare non rispettare il carattere di oggettività che hanno tutte le definizioni matematiche, si deve osservare che è richiesto che lo scommettitore sia *coerente*: la sua valutazione non sarà dunque *arbitraria*, e coinciderà, in linea di principio, con quella di altri individui coerenti.

## 9.2 La grammatica del Calcolo delle probabilità

Come per tutte le teorie matematiche, per costruire il Calcolo delle probabilità abbiamo bisogno di alcune nozioni di base e di alcuni assiomi, che vanno sotto il nome di assiomi di Kolmogorov.

Consideriamo un esperimento (per esempio il lancio di un dado, o di una moneta) e diciamo  $\Omega$  l'insieme di tutti i possibili *esiti* dell'esperimento (nel caso del lancio di un dado si avrebbe  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , nel caso della moneta  $\Omega = \{\text{testa}, \text{croce}\}$ ). Diremo che  $\Omega$  è uno spazio probabilistico.

**Definizione 9.4** (Algebra di eventi su  $\Omega$ ). *Dato l'insieme  $\Omega$ , sia  $\mathcal{P}(\Omega)$  l'insieme delle sue parti. Un sottoinsieme  $E$  di  $\mathcal{P}(\Omega)$  (cioè un insieme di sottoinsiemi di  $\Omega$ ) si chiama un'algebra di eventi su  $\Omega$  se valgono le seguenti proprietà:*

1.  $\Omega \in E$ ;
2. se  $A \in E$  e  $B \in E$  allora anche  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $\complement A$  e  $\complement B$  stanno in  $E$ .

*Gli elementi di  $E$  si chiamano eventi.*

La più comune algebra di eventi<sup>(1)</sup> su  $\Omega$  è l'insieme  $\mathcal{P}(\Omega)$ , e questo succederà sempre nei nostri esempi.

Una conseguenza immediata della definizione è che l'insieme vuoto appartiene sempre ad  $E$ . Infatti, poiché  $\Omega \in E$  e poiché  $\emptyset = \complement \Omega$ , anche  $\emptyset \in E$ .

Ci limiteremo (almeno in questa introduzione) al caso in cui  $\Omega$  è finito; l'estensione al caso in cui  $\Omega$  è infinito richiede concetti che non sono alla portata di questo corso (per esempio il concetto di serie).

<sup>1</sup>In realtà il concetto di algebra di eventi si può porre su un insieme qualunque, ma noi qui siamo interessati solo al caso in cui questo insieme sia l'insieme degli esiti di un esperimento.

**Definizione 9.5** (Definizione assiomatica di probabilità). Sia  $\Omega$  l'insieme (finito) degli esiti di un esperimento,  $E \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  un'algebra di eventi su  $\Omega$ . Una funzione  $P: E \rightarrow [0, 1]$ , cioè una funzione che ad ogni insieme di  $E$  associ un numero reale, si chiama una (funzione di) probabilità se valgono i seguenti assiomi:

1.  $\forall A \in E, P(A) \geq 0$ .
2.  $P(\Omega) = 1$ .
3. Se  $A$  e  $B$  sono due insiemi disgiunti di  $E$ ,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

Il numero  $P(A)$  si chiama probabilità di  $A$ , ovvero probabilità dell'evento  $A$ , visto che gli elementi di  $E$  si chiamano eventi.

I tre assiomi della definizione affermano, a parole, che la probabilità di ogni evento è sempre positiva e minore o tutt'al più uguale a 1, che la probabilità di  $\Omega$  è proprio 1 (e per questo  $\Omega$  si chiama anche l'evento *certo*), che la probabilità di due eventi disgiunti è la somma delle probabilità dei due eventi.

**Definizione 9.6** (Spazio probabilizzato). Se  $\Omega$  è uno spazio probabilistico,  $E$  è un'algebra di eventi su  $\Omega$  e  $P$  è una funzione di probabilità, la terna  $(\Omega, E, P)$  si chiama uno spazio probabilizzato.

*Esempio.* Sia  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{\text{Insieme degli esiti nel lancio di un dado}\}$ ,  $E = \mathcal{P}(\Omega)$  e  $P$  la funzione definita come segue:

- $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = 1/12$ ;
- $P(\{5\}) = P(\{6\}) = 1/3$ ;
- se  $A$  è un altro sottoinsieme di  $\Omega$ ,  $A$  si può ottenere come unione disgiunta di due o più dei sottoinsiemi già considerati;  $P(A)$  è allora definita come somma delle probabilità degli insiemi componenti.

È chiaro che  $P$  è una probabilità e quindi che  $(\Omega, E, P)$  è uno spazio probabilizzato.

Si noti che, nella definizione assiomatica che abbiamo dato, non ha alcun interesse stabilire come la funzione  $P$  viene costruita, l'unica cosa che conta è che valgano le proprietà dette. Nell'esempio appena proposto è molto probabile che la funzione  $P$  sia costruita mediante la definizione frequentista e soggettiva.

Solo sulla base della definizione assiomatica si possono dimostrare alcune proprietà della probabilità, proprietà che qui ci limitiamo ad enunciare.

1.  $P(\complement A) = 1 - P(A)$ .
2.  $P(\emptyset) = 0$ .
3. Se  $A \subseteq B$ , allora  $P(A) \leq P(B)$ .
4. Per ogni  $A \in E$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$  (cioè la probabilità è sempre compresa tra 0 e 1).
5. Se  $A$  e  $B$  sono due insiemi di  $E$ ,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

## 9.3 Probabilità subordinata e correlazione

Consideriamo l'esperimento del lancio di un dado non truccato e la funzione di probabilità data dalla definizione classica di probabilità, con  $E$  coincidente con l'insieme di tutti i sottoinsiemi dello spazio degli esiti. La probabilità che esca il 2 in un lancio è allora  $1/6$ . Se però noi sappiamo che uscirà un numero pari, allora la probabilità dell'evento 2 è chiaramente  $1/3$ . È come se lo spazio dei risultati non fosse più  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , ma  $B = \{2, 4, 6\}$ . In un caso come questo si parla di probabilità dell'evento  $A = 2$  subordinata all'evento  $B = \{2, 4, 6\}$  e si scrive  $P(A|B)$ . Naturalmente la cosa ha interesse solo se  $B \neq \Omega$  e  $B \neq \emptyset$ .

**Definizione 9.7** (Probabilità condizionata o subordinata). *Dato uno spazio probabilizzato  $(\Omega, E, P)$  e due eventi  $A$  e  $B$  di  $E$ , si chiama probabilità di  $A$  subordinata o condizionata a  $B$ , e si scrive  $P(A|B)$ , la probabilità che si verifichi  $A$ , nell'ipotesi che si sappia che si è verificato (o che si verificherà)  $B$ .*

Non è difficile provare, con riferimento alla definizione di Laplace di probabilità, che vale la seguente formula, detta *delle probabilità composte*.

$$(9.1) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

In generale, nella definizione assiomatica, la formula (9.1) viene assunta come *definizione* di probabilità condizionata.

È chiaro che la probabilità  $P(A)$  di un evento e la probabilità  $P(A|B)$  sono entrambe probabilità riferite all'evento  $A$ , ma in condizioni diverse e dunque, a priori, si può ritenere che siano numeri diversi. Ci si può però chiedere:  $P(A)$  e  $P(A|B)$  sono sempre diversi? La risposta è *no* e a questo proposito si dà la seguente definizione.

**Definizione 9.8** (Indipendenza stocastica). *Se  $A$  e  $B$  sono due eventi di uno spazio probabilizzato tali che*

$$P(A) = P(A|B),$$

*allora i due eventi si dicono stocasticamente indipendenti. Ciò significa che il verificarsi di  $B$  lascia immutata la probabilità di  $A$ .*

*Esempio.* Consideriamo il lancio di una moneta per due volte in successione. Si ha, con evidente significato dei simboli,

$$\Omega = \{ (T, T), (T, C), (C, T), (C, C) \}.$$

Sia poi  $E = \mathcal{P}(\Omega)$  e  $P$  la probabilità definita classicamente, ovvero

$$P(\{(T, T)\}) = P(\{(T, C)\}) = P(\{(C, T)\}) = P(\{(C, C)\}) = \frac{1}{4},$$

mentre la probabilità degli altri sottoinsiemi è definita per somma.

Consideriamo poi gli eventi

- $A = \{ (T, T), (C, T) \}$  (cioè: il risultato del secondo lancio è *testa*);
- $B = \{ (T, T), (T, C) \}$  (cioè: il risultato del primo lancio è *testa*).

Poiché  $A \cap B = \{ (T, T) \}$ , si trova subito, applicando anche la formula (9.1),

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}, \quad P(A|B) = \frac{1}{2}.$$

Dunque  $A$  e  $B$  sono stocasticamente indipendenti: l'uscita di testa al primo lancio lascia invariata la probabilità dell'uscita di testa<sup>(2)</sup> al secondo.

**Definizione 9.9** (Correlazione positiva o negativa). *Sia  $A$  un evento di uno spazio probabilizzato, non stocasticamente indipendente dall'evento  $B$ . Se*

$$P(A) < P(A|B)$$

*$A$  si dice correlato positivamente all'evento  $B$  (il verificarsi di  $B$  facilita il verificarsi di  $A$ ); se*

$$P(A) > P(A|B)$$

*$A$  si dice correlato negativamente all'evento  $B$  (il verificarsi di  $B$  rende più difficile il verificarsi di  $A$ ).*

<sup>2</sup>Attenzione: anche al gioco del lotto succede lo stesso. Ad ogni estrazione la probabilità di uscita di un numero è esattamente sempre la stessa indipendentemente dal fatto che il numero stesso sia in ritardo oppure no!!

Ci limitiamo solo a citare un famoso (e importante) risultato classico del calcolo delle probabilità.

**Teorema 9.10** (di Bayes (in forma elementare)). *Dati  $(\Omega, E, P)$  e due eventi  $A$  e  $B$  di  $E$  risulta:*

$$(9.2) \quad P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

Da questo teorema si deduce facilmente che se  $A$  è stocasticamente indipendente da  $B$ , allora  $B$  è stocasticamente indipendente da  $A$ . Inoltre se  $A$  è correlato positivamente (negativamente) a  $B$ , allora  $B$  è correlato positivamente (negativamente) a  $A$ . Si può dunque dire semplicemente che  $A$  e  $B$  sono stocasticamente indipendenti oppure correlati positivamente o negativamente.

## 9.4 Variabili casuali

Introduciamo questo importante concetto con un esempio. Consideriamo l'esperimento del lancio di due dadi non truccati. Lo spazio  $\Omega$  dei risultati è costituito dalle seguenti 36 coppie di interi:

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Consideriamo poi una funzione<sup>(3)</sup>  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , che ad ogni risultato  $\omega \in \Omega$  faccia corrispondere un numero reale, per esempio la somma dei numeri delle due facce dei dadi. I possibili valori di questa funzione sono

$$\text{Im}(X) = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}.$$

È inoltre possibile stabilire qual è la probabilità che in un lancio ha ciascuno dei valori di  $\text{Im}(X)$ . Se per esempio usiamo la definizione classica di probabilità (che ci pare logica se i dadi non sono truccati) possiamo costruire la seguente tabella, dove nella prima riga abbiamo riportato i valori di  $\text{Im}(X)$  (scrivendo, come è tradizione, solo  $X$ ) e nella seconda riga le rispettive probabilità.

$X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

È evidente che la somma di tutte le probabilità è 1.

La funzione  $X$  si chiama una *variabile aleatoria o casuale*. La legge che lega ogni valore della funzione  $X$  alla rispettiva probabilità si chiama una *distribuzione di probabilità*. Non deve meravigliare il fatto che la “funzione”  $X$  sia chiamata “variabile”: in realtà i valori di questa funzione diventano le variabili della funzione distribuzione di probabilità.

Diamo ora le definizioni formali.

**Definizione 9.11** (Variabile casuale). *Sia  $(\Omega, E, P)$  uno spazio probabilizzato; una funzione  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tale che sia possibile attribuire ad ogni valore  $x$  di  $\text{Im}(X)$  la probabilità che la variabile casuale assuma proprio il valore  $x$  si chiama una variabile casuale o variabile aleatoria. La probabilità che la variabile casuale assuma il valore  $x$  si indica con  $P(X = x)$ .*

<sup>3</sup>Per motivi che appariranno chiari da quanto segue, oltreché per motivi storici, questo tipo di funzioni sono sempre indicate con lettere tipo  $X, Y$ , ecc., anziché con  $f, g$ , ecc., come avviene di norma.

Se i valori di  $\text{Im}(X)$  sono in numero finito o sono un insieme numerabile, la variabile casuale si dice *discreta*; se i valori di  $\text{Im}(X)$  sono tutto  $\mathbb{R}$  o un intervallo di  $\mathbb{R}$ , la variabile casuale si dice *continua*.

**Definizione 9.12** (Distribuzione di probabilità). *Sia  $(\Omega, E, P)$  uno spazio probabilizzato e sia definita la variabile casuale  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ; la relazione che lega ogni valore di  $\text{Im}(X)$  alla sua probabilità si chiama distribuzione di probabilità.*

Consideriamo qualche ulteriore esempio.

*Esempio.* Lanciamo una moneta due volte e consideriamo la variabile casuale  $X$  che ad ogni esito fa corrispondere il numero di teste moltiplicato per 100. Usiamo la definizione classica di probabilità per calcolare la probabilità di ogni valore della variabile. Con ovvio significato dei simboli avremo:

$$\Omega = \{ (C, C), (C, T), (T, C), (T, T) \},$$

$X$	0	100	200
$P$	$1/4$	$2/4$	$1/4$ .

*Esempio.* Sullo stesso  $\Omega$  dell'esempio precedente consideriamo la funzione  $Y$  che ad ogni esito faccia corrispondere il quadrato del numero di teste meno il quadrato del numero di croci, il tutto moltiplicato per 10. Si ha allora:

$Y$	-40	0	40
$P$	$1/4$	$2/4$	$1/4$ .

*Esempio.* Consideriamo un'urna contenente 4 palline bianche e 6 nere. Estraiamo 4 palline in successione dall'urna. Allora:

$$\Omega = \{ (B, B, B, B), (B, B, B, N), (B, B, N, B), \dots, (N, N, N, N) \},$$

dove ci sono esattamente

$$\binom{10}{4} = 210$$

quaterne possibili.

Consideriamo la variabile casuale che ad ogni esito dell'esperimento faccia corrispondere il numero di palline bianche. Dunque

$$\text{Im}(X) = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \},$$

e vediamo di calcolare la probabilità di ciascuno di questi valori.

La probabilità che esca 0, cioè  $P(X=0)$  è data da

$$P(X=0) = \frac{\text{num. tot. di quat. senza bianche}}{\text{num. tot. di quaterne}} = \frac{\text{num. di quat. solo nere}}{\text{num. tot. di quaterne}} = \frac{\binom{6}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{15}{210}.$$

Successivamente si trova:

$$P(X=1) = \frac{1 \text{ bianca su } 4 \cdot 3 \text{ nere su } 6}{\text{num. tot. di quaterne}} = \frac{\binom{4}{1} \binom{6}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{80}{210};$$

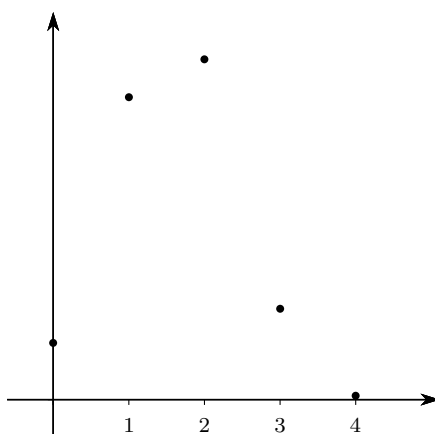


$$P(X = 2) = \frac{90}{210}, \quad P(X = 3) = \frac{24}{210}, \quad P(X = 4) = \frac{1}{210}.$$

Con questi valori possiamo costruire la seguente tabella

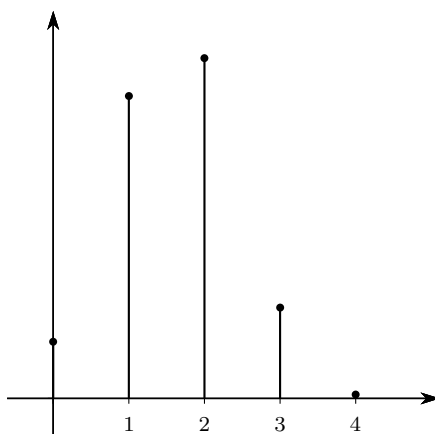
$X$	0	1	2	3	4
$P$	$15/210$	$80/210$	$90/210$	$24/210$	$1/210$

Naturalmente le distribuzioni di probabilità si possono rappresentare mediante grafici cartesiani (come tutte le funzioni). Con riferimento all'ultimo esempio il grafico sarà il seguente.



**Figura 9.1** Distribuzione di probabilità: grafico a punti

Abitualmente si usa un grafico a canne, anziché un grafico a punti:



**Figura 9.2** Distribuzione di probabilità: grafico a canne

## 9.5 Funzione di ripartizione

Oltre alla funzione distribuzione di probabilità è molto utile nelle applicazioni la *Funzione di ripartizione*, definita come segue.

**Definizione 9.13** (Funzione di ripartizione). *Sia  $(\Omega, E, P)$  uno spazio probabilizzato su cui è definita la variabile casuale  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Si chiama Funzione di ripartizione  $F$  di tale variabile*

casuale la funzione  $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  che ad ogni numero reale  $x$  associa la probabilità che la variabile  $X$  assuma un valore non maggiore di  $x$ :

$$(9.3) \quad F: x \rightarrow P(\{X \leq x\}).$$

Questa funzione si chiama anche *probabilità cumulata*, in quanto per ogni numero reale  $x$  somma (cumula) tutti i valori della densità di probabilità minori o uguali a  $x$ .

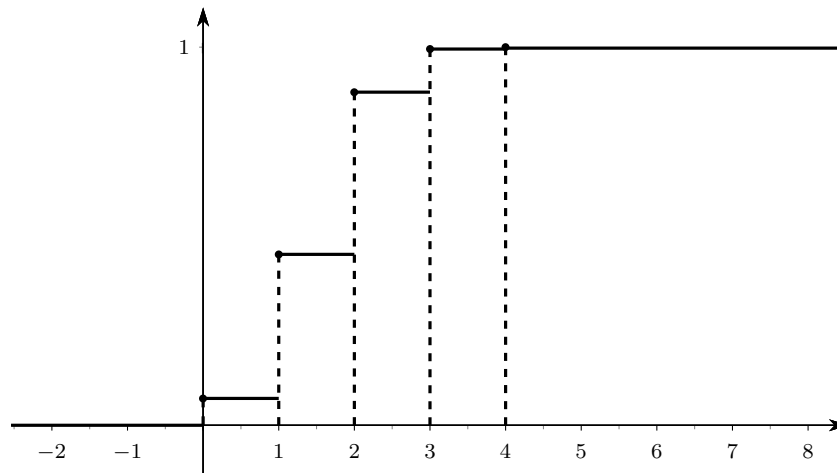


Figura 9.3 Funzione di ripartizione

Il grafico di questa funzione è sempre una funzione *a gradino*, come nell'esempio appena trattato. Inoltre è ovvio che  $0 \leq F(x) \leq 1$ , che  $F$  è crescente (in senso lato), che i limiti a  $-\infty$  e  $+\infty$  sono, rispettivamente, 0 e 1.

È immediato passare dalla funzione distribuzione di probabilità alla funzione di ripartizione; in particolare si osservi che l'alzata dei gradini nella funzione di ripartizione corrisponde ai valori assunti dalla funzione di distribuzione.

## 9.6 Media e varianza

Limitandoci al caso di variabili casuali discrete che assumano un numero finito di valori daremo i concetti di *media*, *varianza* e *scarto quadratico medio*.

**Definizione 9.14** (Media o speranza matematica). *Siano  $(\Omega, E, P)$  uno spazio probabilizzato,  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una variabile casuale e  $x_1, x_2, x_3, \dots$  (in numero finito) i valori assunti dalla variabile, con rispettive probabilità  $p_1, p_2, p_3, \dots$ . Si chiama media o speranza matematica della variabile la media aritmetica pesata dei valori della variabile, dove i pesi sono dati dalle rispettive probabilità.*

$$(9.4) \quad M(X) = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots} = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots,$$

in quanto  $p_1 + p_2 + p_3 + \dots = 1$ .

Per ogni valori  $x_1, x_2, x_3, \dots$  assunto dalla variabile si può calcolare il suo scostamento dalla media detto anche *scarto*:  $x_i - M(X)$ . Questi scarti saranno negativi in corrispondenza ai valori

$x_i$  minori della media, positivi in corrispondenza ai valori  $x_i$  maggiori della media. La media (ponderata) di tutti gli scarti è 0, come è facile provare:

$$\begin{aligned} (x_1 - M(X))p_1 + (x_2 - M(X))p_2 + (x_3 - M(X))p_3 + \dots = \\ = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \dots - M(X)(p_1 + p_2 + p_3 + \dots) = M(X) - M(X) = 0. \end{aligned}$$

Dunque lo scarto medio non ha alcun interesse. Se però facciamo la media (ponderata) dei quadrati degli scarti non otterremo più un valore nullo, in quanto i quadrati degli scarti sono tutti numeri positivi. Questa media si chiama *varianza*; precisamente si dà la definizione seguente.

**Definizione 9.15** (Varianza). *Siano  $(\Omega, E, P)$  uno spazio probabilizzato,  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una variabile casuale e  $x_1, x_2, x_3, \dots$  (in numero finito) i valori assunti dalla variabile, con rispettive probabilità  $p_1, p_2, p_3, \dots$  e con media  $M(X)$ . Si chiama varianza di  $X$  la media ponderata dei quadrati degli scarti dei valori di  $X$  dalla media  $M(X)$ :*

$$(9.5) \quad \sigma^2(X) = (x_1 - M(X))^2p_1 + (x_2 - M(X))^2p_2 + (x_3 - M(X))^2p_3 + \dots$$

Si introduce infine lo *scarto quadratico medio* facendo la radice quadrata della varianza. Questo numero è un indice della dispersione dei valori della variabile rispetto alla media.

## 9.7 La distribuzione binomiale

Nelle applicazioni ricorrono frequentemente alcune situazioni, per le quali dunque è utile fare uno studio particolare. Tra queste accenniamo alla *distribuzione binomiale* o di *Bernoulli*. Immaginiamo di ripetere un certo numero  $n$  (abituamente molto grande) di volte un esperimento che possa avere solo due esiti, che chiameremo *successo* e *insuccesso*. Come esempio possiamo considerare il lancio di un dado, in cui il successo sia dato dall'uscita del 6, l'insuccesso dall'uscita di un altro numero, oppure il lancio di una moneta in cui il successo sia l'uscita di testa e l'insuccesso l'uscita di croce. Il successo ha una certa probabilità, che indicheremo con  $p$ , l'insuccesso ha naturalmente la probabilità residua, cioè  $q = 1 - p$ . Con questo tipo di esperimento si può costruire la variabile casuale che fornisce il numero di successi su un totale di  $n$  ripetizioni. La distribuzione di probabilità di questa variabile si ottiene dal seguente teorema.

**Teorema 9.16.** *La probabilità che su  $n$  prove indipendenti il successo, che ha probabilità  $p$  su una prova, si presenti  $x$  ( $\leq n$ ) volte è data da*

$$(9.6) \quad f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x},$$

dove  $q = 1 - p$  è la probabilità di insuccesso.

È chiaro che la somma di tutte le probabilità con  $x$  che va da 0 a  $n$  deve essere 1, e in effetti si ha

$$\binom{n}{0} p^0 q^{n-0} + \binom{n}{1} p^1 q^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} p^n q^{n-n} = (p + q)^n = 1^n = 1.$$

Con riferimento al lancio di una moneta (non truccata) in cui il successo è l'uscita di testa, si ha, ovviamente,  $p = 1/2 = q$ . Se ripetiamo il lancio 6 volte possiamo costruire la seguente tabella della funzione distribuzione di probabilità.

$X$	0	1	2	3	4	5	6
$P$	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64

Da qui si possono trarre alcune ulteriori informazioni. Per esempio la probabilità di ottenere almeno 4 successi è  $P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 11/32$ .

Per la distribuzione bernoulliana si può dimostrare che

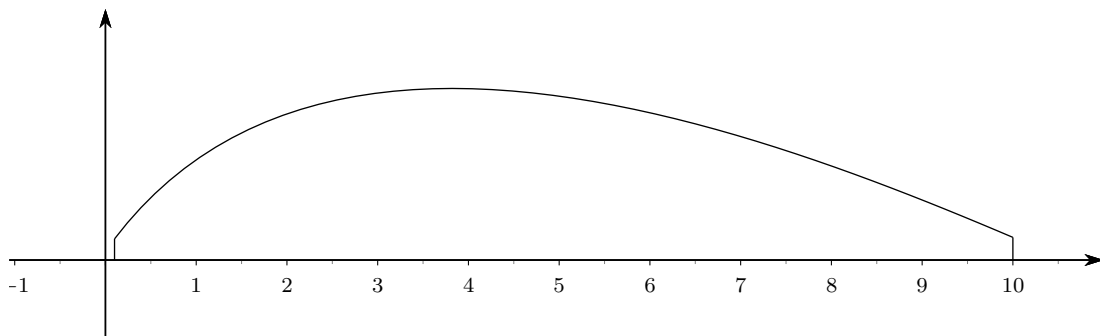
$$(9.7) \quad M(X) = np, \quad \sigma^2(X) = npq, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

Con riferimento all'esempio del lancio di un dado non truccato in cui il successo è l'uscita del 6, si ha  $p = 1/6$  e quindi per esempio la media dell'uscita del 6 su 1200 lanci è  $200 = 1200 \cdot 1/6$ .

## 9.8 Cenno alle variabili continue

Può succedere che i valori di una variabile casuale non siano finiti (o discreti), ma varino in un intervallo opportuno di numeri reali. Per esempio se abbiamo un cilindro di ferro che fa da perno ad una ruota, l'usura del cilindro dopo un certo intervallo di tempo può avere qualunque valore tra poco più di 0 mm e qualche millimetro, per esempio 10 mm. In casi come questo la variabile casuale è detta *continua* e non si assegna ad ogni valore  $x$  dell'intervallo una probabilità, ma si assegna una funzione  $f(x)$  detta *densità di probabilità*, con la proprietà che l'area racchiusa tra la curva, l'asse delle ascisse e due rette verticali  $x = a$  e  $x = b$ , rappresenti la probabilità che la variabile assuma un valore compreso tra  $a$  e  $b$ . In particolare l'area compresa tra la curva, l'asse delle ascisse e le rette verticali passanti per il minimo e massimo valore di  $x$  dove è definita la funzione deve essere 1. D'abitudine si pensa alla funzione  $f(x)$  come definita su tutta la retta reale, assegnandole il valore 0 fuori dall'intervallo effettivo.

Per esempio nel caso dell'usura del cilindro di ferro si potrebbe avere una situazione di questo tipo.



**Figura 9.4** Una possibile densità di probabilità per una variabile casuale continua

La probabilità che la variabile assuma un valore compreso tra  $a$  e  $b$  sarà

$$(9.8) \quad \int_a^b f(x) dx,$$

mentre si dovrà avere

$$(9.9) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Le formule per la media, la varianza e lo scarto quadratico medio saranno, rispettivamente,

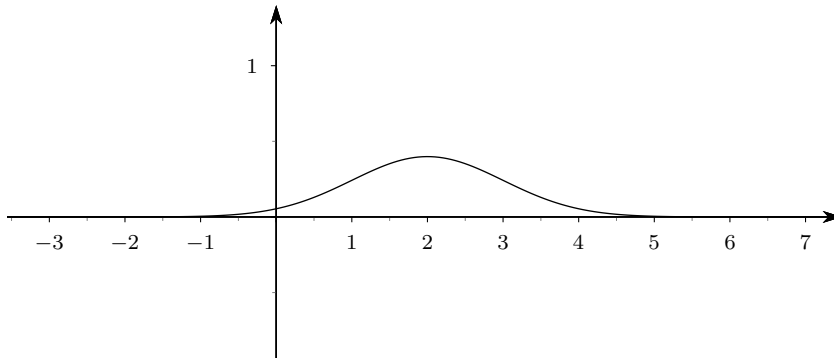
$$(9.10) \quad M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad \sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx, \quad \sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}.$$

La più importante distribuzione continua di probabilità è data dalla cosiddetta distribuzione normale o *Gaussiana*, per la quale si ha:

$$(9.11) \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

dove  $m$  è la media e  $\sigma$  lo scarto quadratico medio.

Per esempio se  $\sigma = 1$  e  $m = 2$ , si avrà il seguente grafico.



**Figura 9.5** Distribuzione normale con  $m = 2$  e  $\sigma = 1$



# 10 Introduzione alla statistica descrittiva

## 10.1 L'analisi statistica di un fenomeno

Immaginiamo, in una ricerca antropologica, di dover rispondere alla domanda: *qual è, mediamente, l'altezza delle donne europee?*

Per rispondere bisognerà precisare che cosa si intende con la parola “mediamente”: appare ben poco pratico informarsi sull'altezza di tutte le donne europee, in quanto si tratterebbe di esaminare decine di milioni di casi. Un metodo conveniente di indagine si baserà sulla raccolta di informazioni, o *dati*: quante donne vivono in Europa, come sono distribuite nei vari paesi europei. . . Dopo aver raccolto le informazioni necessarie, saremo chiamati ad una loro elaborazione: potremo per esempio, con opportuni metodi, stimare l'altezza delle donne dei vari paesi per poi giungere al risultato voluto.

Problemi come questo, e i metodi per affrontarli, fanno parte della statistica. Ci occuperemo in particolare della *statistica descrittiva* che si occupa della raccolta e interpretazione dei dati.

Nelle indagini statistiche si prendono in esame sempre fenomeni che riguardano delle collettività o *popolazioni*, cioè insiemi di elementi, che chiameremo *individui* o *unità statistiche* che presentano caratteristiche comuni: per esempio l'insieme dei cittadini italiani, o l'insieme delle pile elettriche prodotte da una certa ditta.

Per le popolazioni siamo interessati a valutare certi *caratteri*: per esempio per i cittadini italiani potremo valutare l'età, il titolo di studio, le opinioni politiche. Potremo anche parlare di *variabile statistica*

Ciascuno di questi caratteri si può manifestare con diversi attributi, che chiameremo *modalità*: per esempio le opinioni politiche possono manifestarsi nel voto per i vari partiti. Le modalità sono in sostanza i valori della variabile statistica.

In conformità a quanto fatto per le variabili aleatorie chiameremo  $X$  la variabile e  $x_i$  i suoi valori e potremo scrivere  $X = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$ .

## 10.2 Intensità e frequenza

I dati statistici possono essere *qualitativi*, ovvero espressi in forma verbale (come colore, nazionalità, religione, ecc.), oppure *quantitativi*, ovvero espressi da numeri (come statura, numero di figli in una famiglia, numero delle nascite in un anno, ecc.).

Il dato statistico è abitualmente rappresentato da un numero che rappresenta

1. quante volte si è manifestata una data modalità: si parla allora di *frequenza assoluta*;
2. una misura (peso, superficie, velocità, . . .): si parla allora di *intensità*.

Si chiama invece *frequenza relativa* di una data modalità il rapporto tra la frequenza assoluta e il numero totale di casi osservati.

*Esempio. Frequenze in modalità qualitative.* Consideriamo gli studenti di una classe (25) e valutiamo il colore dei loro occhi. Possiamo costruire la seguente tabella.

Colore	Freq.ass.	Freq.rel
azzurro	3	0.12
castano	10	0.4
verde	5	0.2
grigio	7	0.28

*Esempio. Intensità in modalità qualitative.* Consideriamo i prodotti di una certa azienda agricola e valutiamone le quantità. Possiamo costruire la seguente tabella.

Prodotto	Quantità (in kg)
patate	480
carote	50
insalata	30
peperoni	120

Le tabelle possono naturalmente essere rappresentate con grafici, come già visto trattando il concetto di funzione.

### 10.3 Indici statistici

Un primo tipo di elaborazione dei dati statistici consiste nell'individuazione di opportuni *indici*, che possano riassumere in breve (cioè con un solo valore) qualche caratteristica saliente dei dati stessi. Ne esamineremo alcuni.

Nel seguito indicheremo con  $f(x_i)$  o con  $f_i$  le frequenze assolute e con  $p(x_i)$  o con  $p_i$  quelle relative dei valori di una variabile statistica  $X$ .

**Definizione 10.1** (Moda). *Data una variabile statistica  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  con frequenze assolute  $f(x_i)$  e relative  $p(x_i)$ , si dice moda il valore  $x_m$  a cui corrisponde la massima frequenza assoluta o relativa.*

È ovvio che la moda può non essere unica, in quanto ci possono essere diversi valori con la stessa frequenza. Se tutti valori hanno la stessa frequenza, invece, non è possibile individuare una moda.

**Definizione 10.2** (Mediana). *Data una distribuzione di  $n$  valori numerici, disposti in ordine (crescente o decrescente, in senso lato), si dice mediana il valore  $x_c$  che si trova al centro dei valori se  $n$  è dispari, la semisomma dei due valori centrali, se  $n$  è pari.*

**Definizione 10.3** (Media aritmetica semplice). *Data una variabile statistica costituita da  $n$  valori numerici  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , si dice media aritmetica semplice il numero  $M$  ottenuto dividendo la somma di tutti i valori per  $n$ :*

$$(10.1) \quad M = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Esempi in geometria analitica sono dati dalle coordinate del punto medio di un segmento che sono la media delle coordinate degli estremi, oppure le coordinate del baricentro di un triangolo che sono la media delle coordinate dei vertici.



**Definizione 10.4** (Media aritmetica ponderata). *Data una variabile statistica costituita da  $m$  valori numerici  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , a ciascuno dei quali corrisponda una frequenza assoluta  $f_1, f_2, \dots, f_m$ , si chiama media aritmetica ponderata il numero*

$$(10.2) \quad M = \frac{\sum_{i=1}^m x_i f_i}{\sum_{i=1}^m f_i}.$$

I coefficienti  $f_i$  si dicono anche pesi.

Se nella variabile statistica consideriamo le frequenze relative anziché quelle assolute allora la media aritmetica ponderata si esprime come

$$(10.3) \quad M = \sum_{i=1}^m x_i p_i,$$

risultato la cui dimostrazione è immediata.

**Definizione 10.5** (Media geometrica semplice e ponderata). *Data una variabile statistica costituita da  $n$  valori numerici  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tutti positivi, si dice media geometrica semplice il numero*

$$(10.4) \quad M_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}.$$

*Data una variabile statistica costituita da  $m$  valori numerici  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , tutti positivi, a ciascuno dei quali corrisponda una frequenza assoluta  $f_1, f_2, \dots, f_m$ , si chiama media geometrica ponderata il numero*

$$(10.5) \quad M_g = \sqrt{(f_1+f_2+\dots+f_m)}{\prod_{i=1}^m x_i^{f_i}}.$$

I coefficienti  $f_i$  si dicono anche pesi.

Se nella variabile statistica costituita da  $m$  valori numerici  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , tutti positivi, consideriamo le frequenze relative  $p_i$ , anziché quelle assolute, allora la media geometrica ponderata è data da

$$(10.6) \quad M_g = \prod_{i=1}^m x_i^{p_i},$$

risultato di cui non forniamo la dimostrazione.

**Definizione 10.6** (Media armonica semplice e ponderata). *Data una variabile statistica costituita da  $n$  valori numerici  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , tutti non nulli, si dice media armonica semplice il numero*

$$(10.7) \quad M_h = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}.$$

Data una variabile statistica costituita da  $m$  valori numerici  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , tutti non nulli, a ciascuno dei quali corrisponda una frequenza assoluta  $f_1, f_2, \dots, f_m$ , si chiama media armonica ponderata il numero

$$(10.8) \quad M_h = \frac{\sum_{i=1}^m f_i}{\sum_{i=1}^m \frac{f_i}{x_i}}.$$

Se nella variabile statistica costituita da  $m$  valori numerici  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , tutti non nulli, consideriamo le frequenze relative  $p_i$ , anziché quelle assolute, allora la media armonica ponderata è data da

$$(10.9) \quad M_h = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{p_i}{x_i}},$$

risultato di cui non forniamo la dimostrazione.

In perfetta analogia con quanto fatto per le variabili casuali si definiscono i concetti di scarto, varianza e scarto quadratico medio, normalmente con riferimento alla media aritmetica. Non ripetiamo le definizioni che sono una semplice trascrizione di quelle date per le variabili casuali.

## 10.4 Cenno all'inferenza statistica

In molte situazioni applicative si è portati a considerare variabili casuali o statistiche caratterizzate da distribuzioni di probabilità non note a priori. Per esempio supponiamo di avere un'urna con  $n$  palline di cui alcune bianche e alcune colorate e consideriamo la variabile casuale  $X$  che associa ad ogni estrazione dall'urna il numero 1 se esce una pallina colorata, il numero 0 se esce una pallina bianca. Se non conosciamo il numero esatto di palline bianche e di palline colorate, non potremo stabilire a priori qual è la distribuzione di probabilità di questa variabile casuale. In statistica supponiamo di considerare la variabile statistica *colore degli occhi* della popolazione italiana, colore che possiamo anche rappresentare per semplicità con un numero: 1 significa azzurro, 2 significa verde, 3 significa castano, ecc. È chiaramente difficile chiedere a tutti i cittadini il colore dei loro occhi e quindi individuare la funzione  $f(x)$  che rappresenta la frequenza assoluta o la funzione  $p(x)$  che rappresenta la frequenza relativa di questa variabile.

In casi come questi anziché lavorare sull'intera popolazione si considera solo un *campione di individui* della popolazione stessa, campione che sia ben rappresentativo della totalità della popolazione. La scelta del campione non è operazione semplice e richiede continue verifiche e affinamenti.

Un metodo semplice di campionamento potrebbe essere quello dell'estrazione casuale di un certo numero di individui della popolazione: per esempio nel caso delle palline dell'urna, considerato sopra, potrebbe essere un buon metodo. Se però volessimo conoscere le intenzioni di voto per una consultazione elettorale probabilmente dovremmo seguire strategie molto più complesse.

Non possiamo entrare nei dettagli di questo delicato problema e ci accontentiamo solo di averne fatto un breve cenno.

# Notazioni utilizzate

Le notazioni utilizzate in questo testo sono quelle di default nel sistema tipografico  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ , notazioni che, nella maggior parte dei casi, concordano con quelle previste dalla normativa ISO 31 – 11.

Segnaliamo inoltre che, nella numerazione dei teoremi, definizioni, osservazioni, ecc., abbiamo scelto di usare una numerazione progressiva per capitolo. Altri testi usano invece numerazioni progressive separatamente per i teoremi, le definizioni, ecc. Si tratta naturalmente solo di una questione di gusto personale.

La scrittura di un testo contenente molta matematica è sempre un'impresa ardua e che richiede molto tempo e fatica. Un aiuto indispensabile è fornito da un sistema di composizione come quello che abbiamo adottato (e che costituisce ormai lo standard de facto per i testi scientifici). Per chi fosse interessato a conoscere  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$  segnaliamo che si tratta di un sistema di composizione tipografica di livello professionale e assolutamente gratuito. Tutte le informazioni utili si possono trovare sul sito ufficiale della comunità degli sviluppatori, <http://www.ctan.org/e>, in lingua italiana, sul sito degli Utilizzatori italiani di  $\text{\TeX}$  e  $\text{\LaTeX}$ , <http://www.guit.sssup.it/>. Alcuni manuali introduttivi e consigli per iniziare si trovano anche sul sito personale del docente, <http://www.batmath.it>.

## Elenco delle notazioni

$\neg$	“non” (negazione logica).
$\vee$	“vel”, o, oppure (disgiunzione logica).
$\wedge$	“et”, e, e contemporaneamente (congiunzione logica).
$\Rightarrow$	“implica”, se ... allora ... (implicazione logica).
$\Leftrightarrow$	“se e solo se” (equivalenza logica).
$\mathbb{N}$	Insieme dei numeri naturali: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ .
$\mathbb{Z}$	Insieme dei numeri interi: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ .
$\mathbb{Q}$	Insieme dei numeri razionali: $\mathbb{Q} = \{m/n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ .
$\mathbb{R}$	Insieme dei numeri reali.
$\mathbb{C}$	Insieme dei numeri complessi.
$\mathbb{N}^+, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{R}^+$	Numeri naturali, interi, razionali, reali, maggiori di 0.
$A, B, \dots$	Notazione per gli insiemi.
$A \subseteq B$	$A$ è un sottoinsieme di $B$ .
$A \subset B$	$A$ è un sottoinsieme proprio di $B$ .
$B \supseteq A$	$B$ è un soprainsieme di $A$ .
$B \supset A$	$B$ è un soprainsieme proprio di $A$ .
$A \setminus B$	Differenza tra gli insiemi $A$ e $B$ .
$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ .
$]a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ .
$]a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ .
$[a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ .
$[a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ .
$]a, +\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ .
$] - \infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ .

*Continua nella pagina successiva*

*Segue dalla pagina precedente*

$] - \infty, a[$	$\{ x \in \mathbb{R} \mid x < a \}$ .
$f: D \rightarrow C, x \mapsto f(x)$	Notazione per le funzioni.
$\exp(x) = e^x$	Notazione per la funzione esponenziale di base $e$ .
$\ln(x)$	Logaritmo in base $e$ di $x$ .
$\log(x)$	Logaritmo in base 10 di $x$ .

### Osservazioni

- Per alcuni autori  $\mathbb{N} = \{ 1, 2, \dots, n, \dots \}$ , cioè l'insieme dei naturali non comprende lo zero.
- L'insieme dei numeri razionali è in realtà l'insieme delle frazioni, come più sopra definito, ma con una opportuna relazione che renda identiche due frazioni equivalenti. Inoltre nulla cambierebbe se si prendessero frazioni in cui anche il denominatore possa essere intero (naturalmente diverso da 0).
- La notazione utilizzata in questi appunti per gli insiemi non è l'unica possibile. Altri usano per esempio lettere maiuscole in grassetto: **A**, **B**, ... e questa scelta ha qualche indubbio vantaggio, in quanto anche i punti dello spazio sono abitualmente indicati con le lettere maiuscole corsive, con possibilità di confusione. In ogni caso tutto dovrebbe essere chiaro dal contesto.
- Molti usano  $\subset$  per indicare i sottoinsiemi (propri o no) e  $\subsetneq$ , o  $\subsetneq$  per indicare i sottoinsiemi propri. Analoga osservazione per i soprainsiemi.
- Per indicare la differenza di due insiemi molti usano il simbolo  $A - B$ .
- Per quanto riguarda le notazioni sui logaritmi è da segnalare che la convenzione da noi scelta è quella in uso nella maggior parte dei software di calcolo e, quasi sempre, anche nelle calcolatrici tascabili. Altri adottano la notazione  $\log(x)$  per indicare il logaritmo in base  $e$  e la notazione  $\text{Log}(x)$  o esplicitamente  $\log_{10}(x)$  per indicare il logaritmo in base 10 del numero  $x$ .

# Alfabeto greco

Riportiamo, per l'importanza che ha nelle notazioni matematiche, l'alfabeto greco con la relativa pronuncia.

alfa	$\alpha$	$A$	nu (ni)	$\nu$	$N$
beta	$\beta$	$B$	csi	$\xi$	$\Xi$
gamma	$\gamma$	$\Gamma$	omicron	$o$	$O$
delta	$\delta$	$\Delta$	pi	$\pi$	$\Pi$
epsilon	$\varepsilon$	$E$	ro	$\varrho$	$R$
zeta	$\zeta$	$Z$	sigma	$\sigma$	$\Sigma$
eta	$\eta$	$H$	tau	$\tau$	$T$
theta	$\vartheta$	$\Theta$	upsilon	$\upsilon$	$\Upsilon$
iota	$\iota$	$I$	fi	$\varphi$	$\Phi$
cappa	$\kappa$	$K$	chi	$\chi$	$X$
lambda	$\lambda$	$\Lambda$	psi	$\psi$	$\Psi$
mu (mi)	$\mu$	$M$	omega	$\omega$	$\Omega$

Come si può notare, in molti casi le lettere greche maiuscole non differiscono nella grafia dalle lettere dell'alfabeto latino.

Segnaliamo anche una lettera dell'alfabeto ebraico di uso comune in matematica.

aleph     $\aleph$



# Indice analitico

algebra degli eventi, 120  
asintoto obliquo, 75  
asintoto orizzontale, 75  
asintoto verticale, 75

Bayes, 123  
binomio di Newton, 101

caratteri statistici, 131  
centro di un intervallo, 18  
codominio, 18  
coefficiente angolare, 29  
coefficienti binomiali, 101  
combinazioni semplici, 100  
complemento algebrico, 113  
connettivi, 2  
coppia ordinata, 9  
correlazione negativa, 122  
correlazione positiva, 122  
coseno, 36

definizioni ricorsive, 16  
densità di probabilità, 128  
derivata destra, 62  
derivata prima, 61  
derivata sinistra, 62  
determinante, 112  
diagonale principale, 106  
diagramma a barre, 20  
diagramma a torta, 19  
diagrammi cartesiani, 20  
differenza di insiemi, 9  
dimensione di uno spazio, 105  
disposizioni con ripetizione, 98  
disposizioni semplici, 98  
distribuzione binomiale, 127  
distribuzione di Bernoulli, 127  
distribuzione di probabilità, 123  
distribuzione gaussiana, 129  
distribuzione normale, 129  
dominio, 18  
dominio naturale, 25

enunciato, 1  
estremo inferiore, 14  
estremo superiore, 14

famiglie di insiemi, 9  
fattoriale, 97  
frequenza assoluta, 131  
frequenza relativa, 131  
funzione ceil, 57  
funzione composta, 28  
funzione continua, 53  
funzione convessa, 73  
funzione derivabile, 61  
funzione derivata prima, 61  
funzione di ripartizione, 125  
funzione floor, 57  
funzione parte intera, 57  
funzioni, 18  
funzioni biunivoche, 26  
funzioni iniettive, 26  
funzioni potenza, 37  
funzioni suriettive, 26

indici statistici, 132  
indipendenza stocastica, 122  
insieme complementare, 9  
insieme delle parti, 8  
insieme inferiormente limitato, 14  
insieme limitato, 14  
insieme quoziente, 11  
insieme superiormente limitato, 14  
insieme universo, 9  
insieme vuoto, 7  
insiemi disgiunti, 8  
integrale definito, 86  
integrale indefinito, 83  
intensità, 131  
intersezione di insiemi, 8  
intervalli, 17  
intorni dell'infinito, 46  
intorno, 43

- limite, 48  
 limite destro, 52  
 limite sinistro, 52  
 logaritmo, 34  
  
 maggiorante, 14  
 massimo assolto, 71  
 massimo di un insieme, 14  
 matrice, 105  
 matrice complementare, 112  
 matrice completa, 116  
 matrice diagonale, 106  
 matrice estratta, 114  
 matrice incompleta, 115  
 matrice inversa, 111  
 matrice invertibile, 111  
 matrice nulla, 106  
 matrice simmetrica, 106  
 matrice singolare, 113  
 matrice unità, 106  
 media, 126  
 media aritmetica ponderata, 133  
 media aritmetica semplice, 132  
 media armonica ponderata, 134  
 media armonica semplice, 133  
 media geometrica ponderata, 133  
 media geometrica semplice, 133  
 mediana, 132  
 minimo assoluto, 71  
 minimo di un insieme, 14  
 minorante, 14  
 minore di una matrice, 114  
 moda, 132  
 modalità di un carattere statistico, 131  
  
 numeri decimali, 15  
 numeri interi, 15  
 numeri naturali, 15  
 numeri razionali, 15  
 numeri reali, 15  
  
 ordinata all'origine, 29  
 ordine totale, 13  
  
 partizione di un insieme, 10  
 pendenza di una retta, 29  
 permutazioni semplici, 99  
 popolazioni statistiche, 131  
 predicato, 3  
 primitiva, 83  
 probabilità condizionata, 122  
 probabilità subordinata, 122  
 probabilità: definizione assiomatica, 121  
 probabilità: definizione classica, 119  
 probabilità: definizione frequentista, 120  
 probabilità: definizione soggettiva, 120  
 prodotto cartesiano, 10  
 prodotto di matrici, 107  
 prodotto di un vettore per un numero, 103  
 prodotto righe per colonne, 107  
 produttoria, 6  
 progressioni aritmetiche, 95  
 progressioni geometriche, 95  
 proposizione, 1  
 punti interni a un intervallo, 18  
 punto angoloso, 63  
 punto di accumulazione, 47  
 punto di flesso, 73  
 punto di frontiera, 47  
 punto di massimo relativo, 71  
 punto di minimo relativo, 71  
 punto isolato, 47  
  
 quantificatori, 3  
  
 raggio di un intervallo, 18  
 rango, 114  
 rango di un sistema, 116  
 rapporto incrementale, 61  
 rappresentazione tabulare, 19  
 relazione binaria, 10  
 relazione d'ordine, 13  
 relazione di equivalenza, 11  
 retta reale estesa, 45  
 retta secante, 60  
  
 scarto quadratico medio, 126, 127  
 segmenti equipollenti, 12  
 segmento orientato, 12  
 seno, 36  
 sistema compatibile, 116  
 sistema determinato, 116  
 sistema incompatibile, 116  
 sistema indeterminato, 116  
 sistema lineare, 115  
 sistemi cartesiani monometrici, 24  
 somma di due vettori, 103  
 sommatoria, 5  
 soprainsieme, 8  
 sottoinsieme, 8  
 spazio probabilitizzato, 121  
 spazio vettoriale, 105



speranza matematica, 126  
successione, 93

tavola di verità, 3  
termine generale, 93  
trapezoide, 81  
trasposta di una matrice, 106

unione di insiemi, 8  
unità statistiche, 131

valore assoluto, 31  
variabile casuale, 123  
variabile casuale continua, 128  
variabile dipendente, 25  
variabile indipendente, 25  
variabile statistica, 131  
varianza, 126, 127  
versore, 104  
vettore, 12  
vettore  $n$  dimensionale, 105  
vettore dei termini noti, 115  
vettore delle incognite, 115  
vettore nullo, 103  
vettore-colonna, 106  
vettore-riga, 106  
vettori componenti, 104