ALGEBRA DI BOOLE

APPUNTI INTEGRATIVI ALLA LEZIONE DEL 09/10/2012

- L'algebra di Boole si costruisce su variabili booleane, che assumono solo due valori (VERO o FALSO)

- Le variabili booleane sono proposizioni (VERE o FALSE)

- Le operazioni nell'algebra di Boole sono i CONNETTIVI LOGICI:

1) $\wedge$ (AND, E, CONGIUNZIONE)
2) $\vee$ (OR, O, DISGIUNZIONE)
3) $\overline{}$ (NOT, NEGAZIONE)

Con questi tre connettivi di base si possono costruire anche connettivi come $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$.

- In realtà tutta l'algebra di Boole può essere costruita con solo 2 delle tre operazioni logiche!

AND e NOT oppure OR e NOT

questo è dimostrato dal teorema di ②

De Morgan:

1) $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$ (A e B sono proposizioni)

2) $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$

- POSTULATI DELL'ALGEBRA DI BOOLE
(indichiamo con V = VERO, F = FALSO; A, B, C... = proposizioni)

1) $A = F$ oppure $A = V$

2) $F \wedge F = F$

3) $V \wedge V = V$

4) $V \wedge F = F \wedge V = F$

5) $V \vee V = V$

6) $F \vee F = F$

7) $V \vee F = F \vee V = V$

- PROPRIETÀ

commutativa:

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

Associativa

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

DISTRIBUTIVA

AND SU OR $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

OR SU AND $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

IDEMPOTENZA

$$A \wedge A = A \qquad A \vee A = A$$

INVOLUZIONE

$$\overline{\overline{A}} = A$$

IDENTITÀ

$$F \vee A = V \wedge A = A$$

DOMINANZA

$$V \vee A = V \qquad F \wedge A = F$$

COMPLEMENTAZIONE

$$\bar{A} \vee A = V \qquad \bar{A} \wedge A = F$$

ASSORBIMENTO

$$A \vee (\bar{A} \wedge B) = A \vee B$$

$$A \wedge (\bar{A} \vee B) = A \wedge B$$

TAVOLE DELLA VERITÀ

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	....
V	V	V	V	....
V	F	F	V	....
F	V	F	V	....
F	F	F	F	....

- Data un'espressione algebrica:

$$C = (A \wedge B) \vee \overline{B}$$

C si può rappresentare con la tavola della verità. Per il passaggio inverso serve lo sviluppo in minterm.

SVILUPPO IN MINTERM

Lo sviluppo in minterm è una "tecnica" che permette di ottenere l'espressione algebrica di una funzione booleana a partire dalla tavola della verità.

TAV. VERITÀ $\xrightarrow{\text{SVILUPPO IN MINTERM}}$ ESPRESSIONE ALGEBRICA

$\forall$ espressione booleana si costruisce un minterm per ogni combinazione delle variabili.

Def MINTERM il minterm corrispondente ad una combinazione delle variabili è la congiunzione ($\wedge$) fra le variabili prese affermate o negate affinché il risultato sia VERO.

Vediamo un esempio.

A, B : var. booleane

m_i : minterm corrispondente alla combinazione i-esima:

A	B	m
F	F	$m_1 = \overline{A} \wedge \overline{B}$
F	V	$m_2 = \overline{A} \wedge B$
V	F	$m_3 = A \wedge \overline{B}$
V	V	$m_4 = A \wedge B$

come si può notare ogni singolo risultato vale VERO

$$m_1 = \overline{A} \wedge \overline{B} = \overline{F} \wedge \overline{F} = V \wedge V = V$$
$$m_2 = \overline{A} \wedge B = \overline{F} \wedge V = V \wedge V = V$$
$$m_3 = A \wedge \overline{B} = V \wedge \overline{F} = V \wedge V = V$$
$$m_4 = A \wedge B = V \wedge V = V.$$

Sia $f(A,B)$ una funzione booleana di A, B di valori f_1, f_2, f_3, f_4 in corrispondenza delle combinazioni i-esime:

A	B	f	m
F	F	f_1	m_1
F	V	f_2	m_2
V	F	f_3	m_3
V	V	f_4	m_4

Lo sviluppo in mintermi permette di esprimere la funzione come segue:

$$f(A,B) = (f_1 \wedge m_1) \vee (f_2 \wedge m_2) \vee (f_3 \wedge m_3) \vee (f_4 \wedge m_4)$$

questo può essere esteso a funzioni di più due var.

→ OR ricorsivo (sulle combinazioni) degli AND fra il valore della f e il mintermi corrispondente.

Esempio

A	B	f	m
F	F	$f_1 = F$	$m_1 = \bar{A} \wedge \bar{B}$
F	V	$f_2 = V$	$m_2 = \bar{A} \wedge B$
V	F	$f_3 = F$	$m_3 = A \wedge \bar{B}$
V	V	$f_4 = V$	$m_4 = A \wedge B$

$$f = (f_1 \wedge m_1) \vee (f_2 \wedge m_2) \vee \dots$$

$$= \underbrace{(F \wedge m_1)}_{=F} \vee \underbrace{(V \wedge m_2)}_{=m_2} \vee \underbrace{(F \wedge m_3)}_{=F} \vee \underbrace{(V \wedge m_4)}_{=m_4}$$

per le proprietà delle operazioni.

$$= F \vee m_2 \vee F \vee m_4$$

sempre per le proprietà

$$= m_2 \vee m_4 = (\bar{A} \wedge B) \vee (A \wedge B)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(A,B) = (\bar{A} \wedge B) \vee (A \wedge B)}$$

- In pratica si fa l'OR ($\vee$) fra i minterm corrispondenti alle combinazioni per le quali la funzione assume il valore VERO.

- La funzione ottenuta con lo sviluppo in minterm si può eventualmente semplificare usando le regole dell'algebra di Boole o eventuali altre tecniche.

Fra le tecniche di semplificazione citiamo le mappe di Karnaugh che vedremo...

- Per il teorema di De Morgan lo sviluppo in minterm può essere sostituito con lo sviluppo in maxterm, che vedremo...