A. PARRETTA

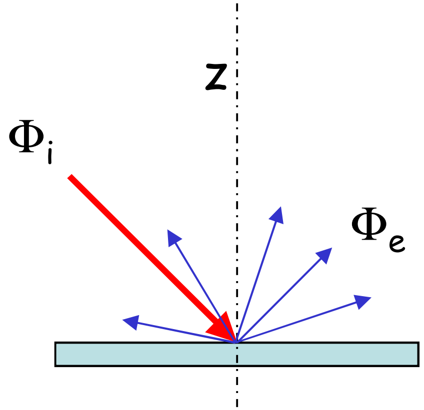
CORSO DI OTTICA APPLICATA

A.A. 2011-2012

TEORIA DELLE SFERE INTEGRATRICI

TEORIA DELLE SFERE INTEGRATRICI

RADIANZA DI UN DIFFUSORE LAMBERTIANO

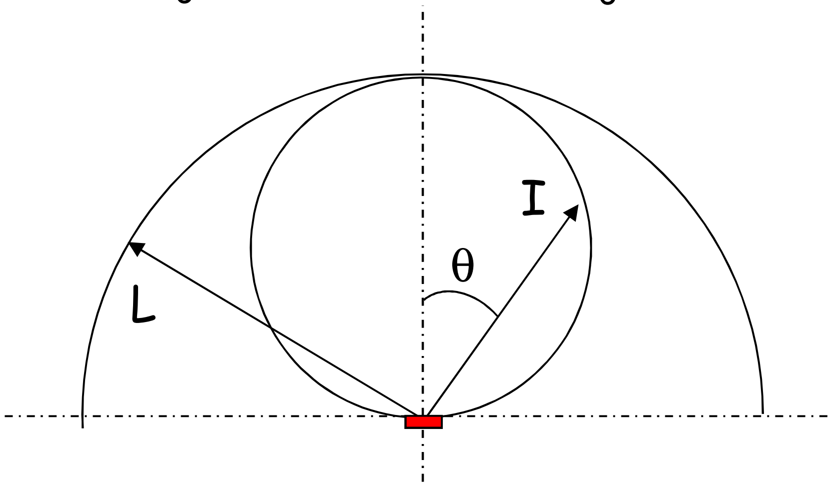


Radianza di un diffusore lambertiano $$L_e = \frac{I_0}{A} = \frac{\Phi_e}{\pi\, A} = \frac{M}{\pi} = \frac{\rho \cdot \Phi_i}{\pi\, A}$$

Diffusore lambertiano

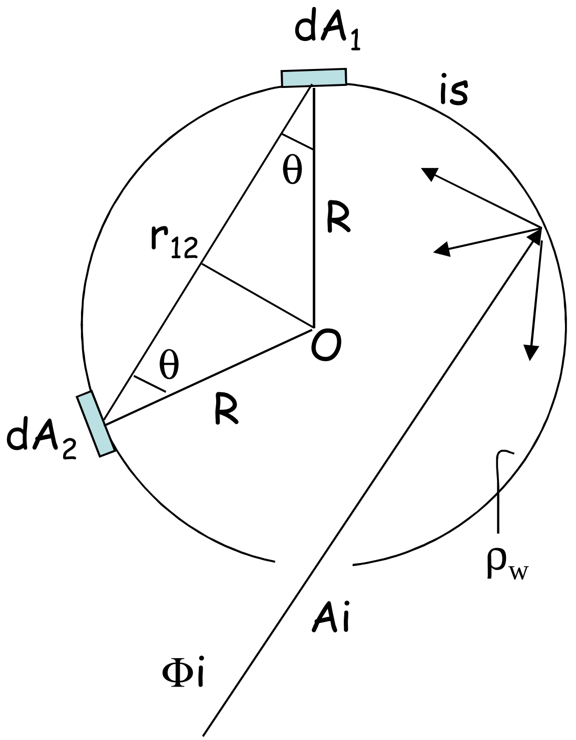
$L = L_0 = \text{cost}$

$I = I_0 \cos\theta$



$$\begin{cases} \text{Flusso totale emesso: } \Phi_e = \pi\, I_0 \\ \text{Flusso totale emesso: } \Phi_e = \pi\, A\, L_0 \end{cases}$$

IRRADIANZA ALL'INTERNO DI UNA SFERA INTEGRATRICE



Trasferimento di potenza $dA_1 \rightarrow dA_2$:

$$d^2\Phi_{12} = L_1 \cdot \frac{dA_1 \cdot \cos\theta_1 \cdot dA_2 \cdot \cos\theta_2}{r_{12}^2}$$

$$d^2\Phi_{12} = L_w \cdot \frac{dA_1 \cdot dA_2 \cdot \cos^2\theta}{r_{12}^2} = L_w \cdot \frac{dA_1 \cdot dA_2}{4R^2}$$

Trasferimento di potenza $A_1 \rightarrow dA_2$:

$$d\Phi_2 = \frac{L_w}{4R^2} \cdot dA_2 \cdot \int dA_1 = \frac{L_w}{4R^2} \cdot dA_2 \cdot A_{sph} \cdot (1-f)$$

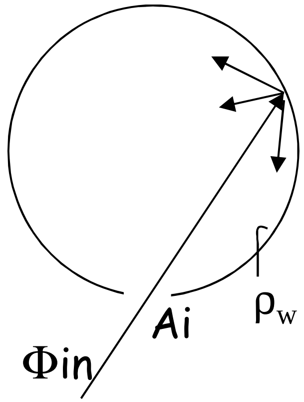
f = area finestre / area sfera

Irradianza su dA_2: $$E_2 = E_w = \frac{d\Phi_2}{dA_2} = \frac{L_w}{4R^2} \cdot A_{sph} \cdot (1-f) = \pi \cdot L_w \cdot (1-f)$$

Irradianza sulla parete della sfera: $$\boxed{E_w = \pi \cdot L_w \cdot (1-f)}$$

Emettenza della sfera: $$\boxed{M_{sph} = \pi \cdot L_w \cdot (1-f)}$$

RADIANZA DI UNA SFERA INTEGRATRICE



Dopo la 1a riflessione:

Flusso: $\Phi_1 = \rho_w \cdot \Phi_{in}$

Irradianza sulla parete: $E_1 = \dfrac{\Phi_1}{A_{sph}} = \dfrac{\rho_w \cdot \Phi_{in}}{A_{sph}}$

Dopo la 2a riflessione:

Flusso: $\Phi_2 = E_1 \cdot \rho_w \cdot A_{sph}(1 - f)$

Irradianza sulla parete: $E_2 = \dfrac{\Phi_2}{A_{sph}} = E_1 \cdot \rho_w \cdot (1 - f)$

Dopo la 2a riflessione:

Flusso: $\Phi_3 = E_2 \cdot \rho_w \cdot A_{sph}(1 - f)$

Irradianza sulla parete: $E_3 = \dfrac{\Phi_3}{A_{sph}} = E_2 \cdot \rho_w \cdot (1 - f) = E_1 \cdot \rho_w{}^2 \cdot (1 - f)^2$

Dopo la n-ma riflessione:

Flusso: $\Phi_n = E_{n-1} \cdot \rho_w \cdot A_{sph}(1 - f)$

Irradianza sulla parete: $E_n = \dfrac{\Phi_n}{A_{sph}} = E_{n-1} \cdot \rho_w \cdot (1 - f) = E_1 \cdot \rho_w{}^{n-1} \cdot (1 - f)^{n-1}$

RADIANZA DI UNA SFERA INTEGRATRICE

Irradianza sulla parete della sfera dopo infinite riflessioni (allo stato stazionario):

$$E_\infty = E_w = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots = \ldots$$

$$\ldots = E_1 + E_1 \cdot \rho_w \cdot (1-f) + E_1 \cdot \rho_w^{\,2} \cdot (1-f)^2 + \ldots = \ldots$$

$$\ldots = E_1 \cdot [1 + \rho_w \cdot (1-f) + \rho_w^{\,2} \cdot (1-f)^2 + \ldots] = E_1 \cdot \frac{1}{[1-\rho_w \cdot (1-f)]}$$

$$E_w = \frac{\rho_w \cdot \Phi_{in}}{A_{sph}} \cdot \frac{1}{[1-\rho_w \cdot (1-f)]}$$

$$\left.\begin{array}{l} E_w = M_{sph} = \pi\, L_{sph} \\ E_w = \pi \cdot L_w \cdot (1-f) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Downarrow$$

$$L_{sph} = L_w \cdot (1-f)$$

Emettenza della sfera:

$$\boxed{M_{sph} = \frac{\rho_w \cdot \Phi_{in}}{A_{sph}} \cdot \frac{1}{[1-\rho_w \cdot (1-f)]}}$$

Radianza della sfera:

$$\boxed{L_{sph} = \frac{M_{sph}}{\pi} = \frac{\rho_w \cdot \Phi_{in}}{\pi\, A_{sph}} \cdot \frac{1}{[1-\rho_w \cdot (1-f)]}}$$

L_{sph} = radianza della sfera; L_w = radianza della parete interna della sfera

CONFRONTO TRA DIFFUSORE PIANO E SFERA INTEGRATRICE

	Diffusore lambertiano	Sfera integratrice
Flusso incidente distribuito:	$\Phi_{in}^{'}$	$\rho_w \cdot \Phi_{in} \cdot (1-f)$
Radianza:	$L_d = \dfrac{\rho_d \cdot \Phi_{in}^{'}}{\pi A_d}$	$L_{sph} = \dfrac{\rho_w \cdot \Phi_{in}}{\pi A_{sph}} \cdot \dfrac{1}{\left[1-\rho_w \cdot (1-f)\right]}$

Poniamo: $\rho_d = \rho_w \quad ; \quad A_d = A_{sph}(1-f)$

Normalizziamo L_d rispetto al flusso e all’area:

$$L_d = \frac{\rho_d \cdot [\rho_d \cdot \Phi_{in} \cdot (1-f)]}{\pi A_{sph} \cdot (1-f)} = \frac{\rho_d^{\ 2} \cdot \Phi_{in}}{\pi A_{sph}} = \frac{\rho_w^{\ 2} \cdot \Phi_{in}}{\pi A_{sph}}$$

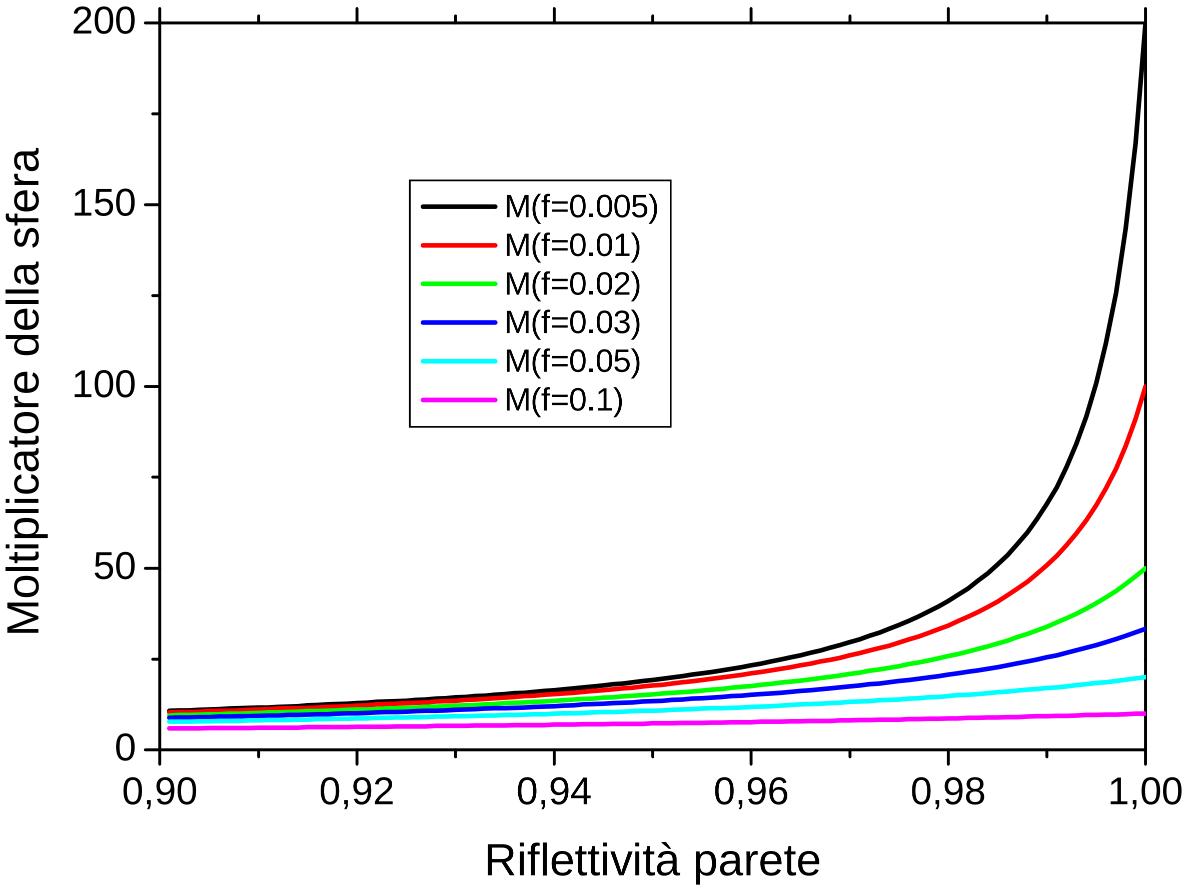
Poniamo: $L_{sph} = L_d \cdot \boldsymbol{M}$ $\quad$ $\boldsymbol{M}$ = moltiplicatore della sfera

$$L_{sph} = \frac{\rho_w^{\ 2} \cdot \Phi_{in}}{\pi A_{sph}} \cdot \boldsymbol{M}$$

$$\boxed{\boldsymbol{M} = \frac{1}{\rho_w \cdot \left[1-\rho_w \cdot (1-f)\right]}}$$

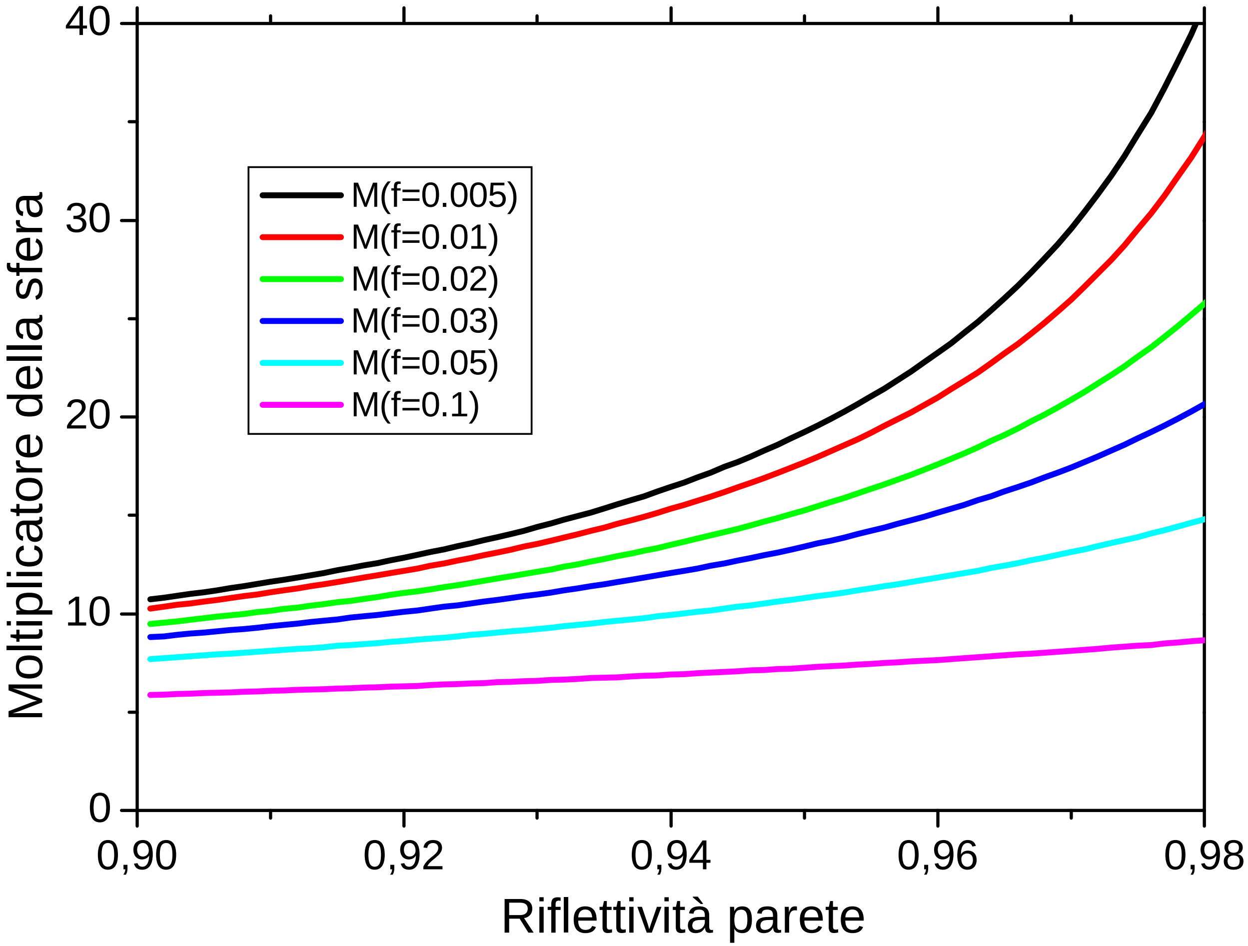
MOLTIPLICATORE DI UNA SFERA INTEGRATRICE

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{\rho_w \cdot \left[1 - \rho_w \cdot (1 - f)\right]}$$



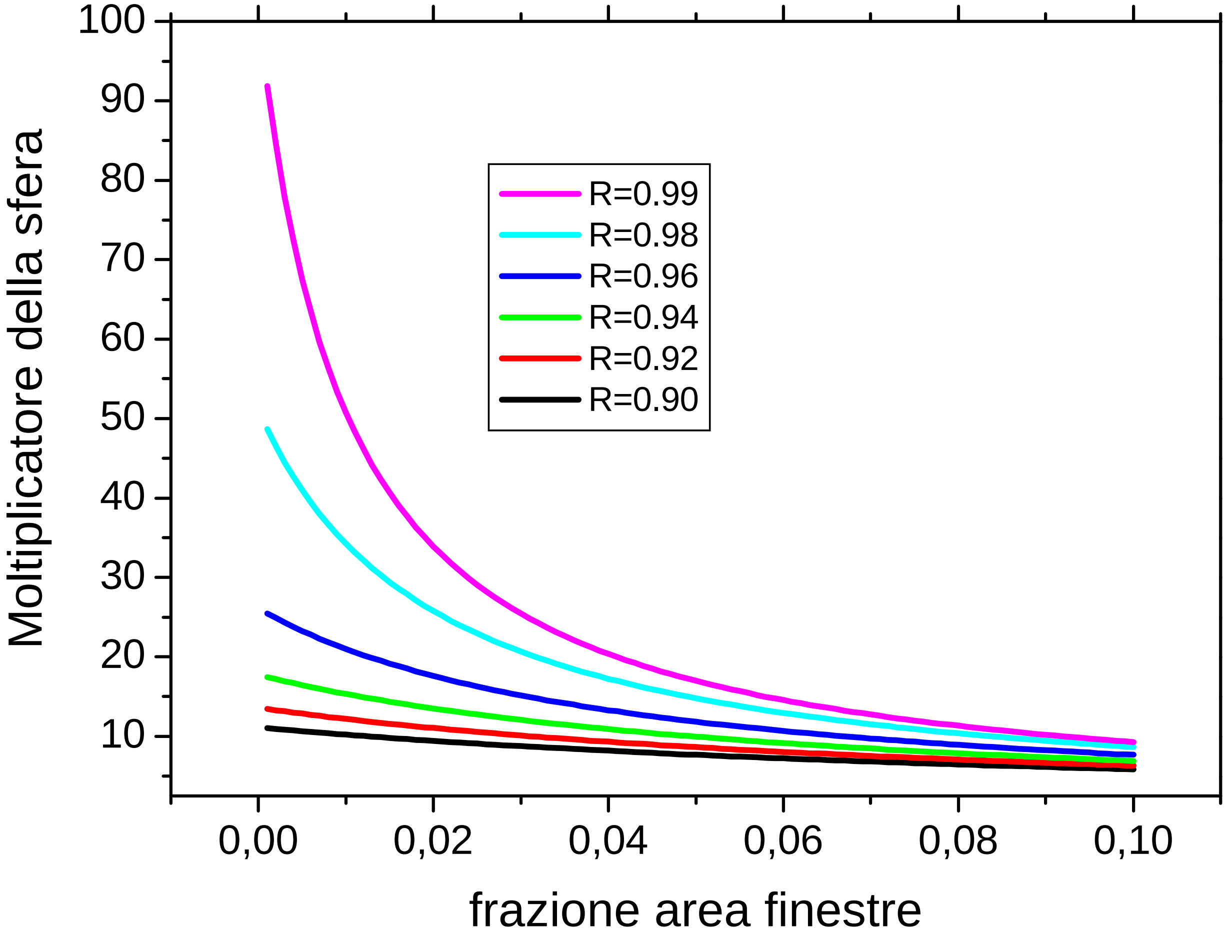
MOLTIPLICATORE DI UNA SFERA INTEGRATRICE

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{\rho_w \cdot [1 - \rho_w \cdot (1 - f)]}$$



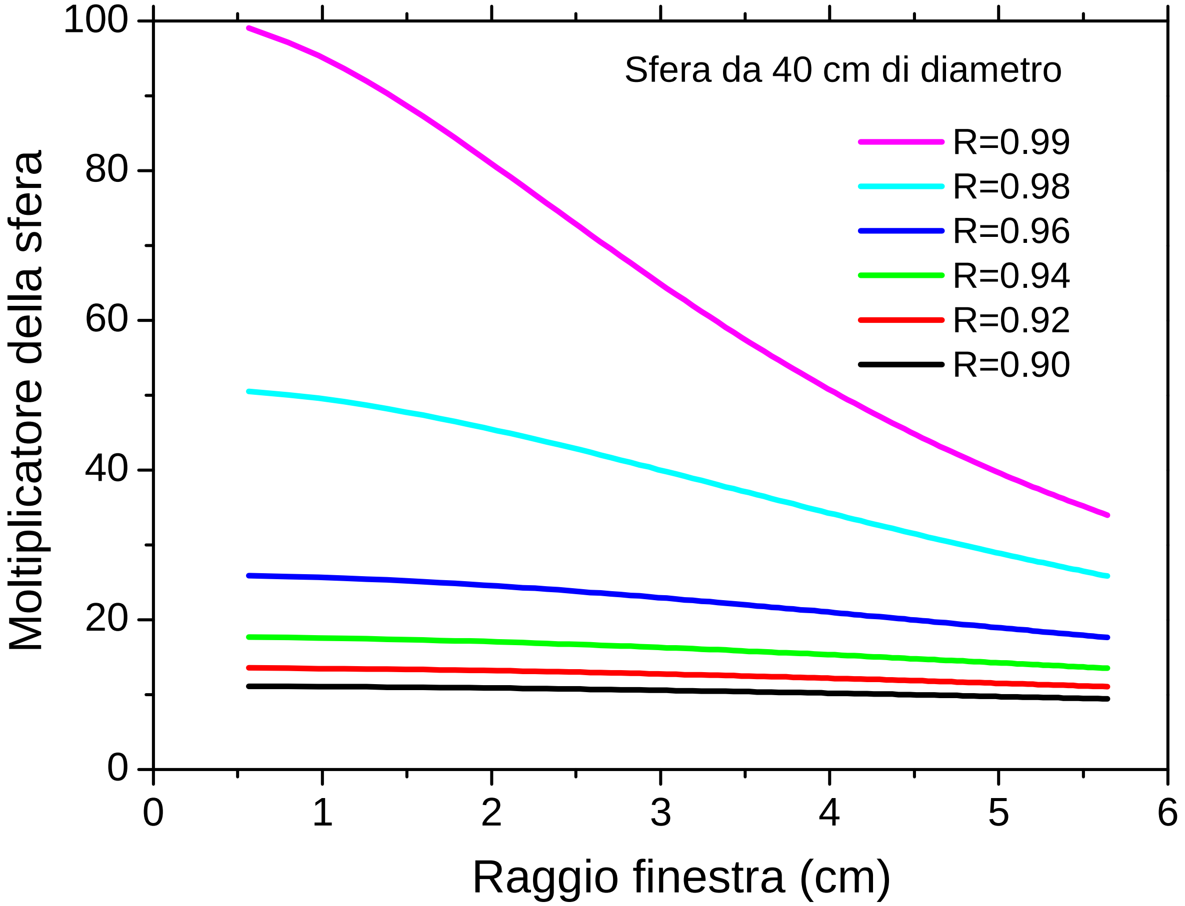
MOLTIPLICATORE DI UNA SFERA INTEGRATRICE

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{\rho_w \cdot \left[1 - \rho_w \cdot (1 - f)\right]}$$

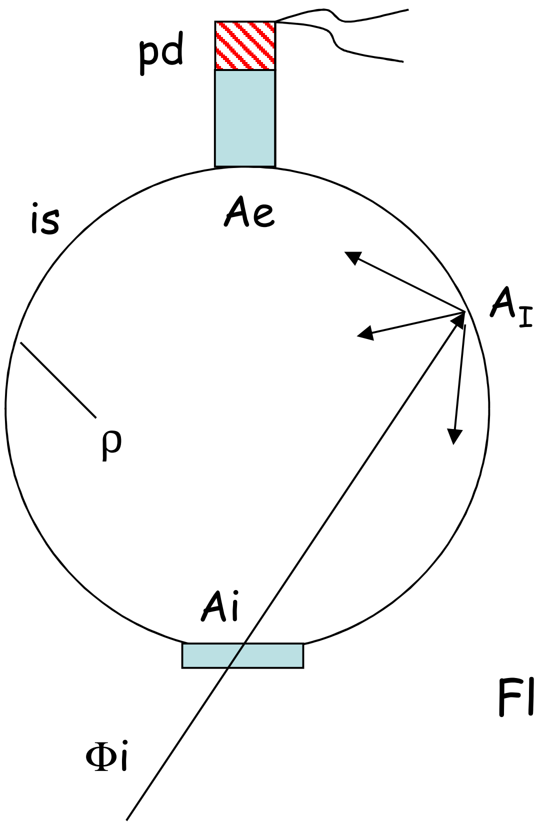


MOLTIPLICATORE DI UNA SFERA INTEGRATRICE

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{\rho_w \cdot [1 - \rho_w \cdot (1 - f)]}$$



IRRADIANZA SULLA PARETE E SULLA ZONA DI PRIMO IMPATTO



Flusso totale sulla parete della sfera
(non direttamente illuminata):

$$\Phi_w^{tot} = \rho_w \cdot \Phi_{in} \cdot (1 - f) \cdot \frac{1}{1 - \rho_w (1 - f)}$$

Irradianza sulla parete della sfera
(non direttamente illuminata):

$$\boxed{E_w = \frac{\Phi_w^{tot}}{A_{sph} \cdot (1 - f)} = \frac{\rho_w \cdot \Phi_{in}}{A_{sph}} \cdot \frac{1}{1 - \rho_w (1 - f)}}$$

Flusso totale sulla zona di primo impatto:

$$\Phi_I^{tot} = \Phi_w^{tot} \cdot \frac{A_I}{A_{sph}(1 - f)} + \Phi_{in} = \Phi_{in} \cdot \left[1 + \frac{A_I}{A_{sph}} \cdot \frac{\rho_w}{1 - \rho_w (1 - f)} \right]$$

IRRADIANZA SULLA PARETE E SULLA ZONA DI PRIMO IMPATTO

Irradianza sulla zona di primo impatto:

$$E_I = \frac{\Phi_I^{tot}}{A_I} = \Phi_{in} \cdot \left[\frac{1}{A_I} + \frac{1}{A_{sph}} \cdot \frac{\rho_w}{1-\rho_w(1-f)} \right]$$

Rapporto tra le due irradianze:

$$\varepsilon = \frac{E_I}{E_w} = 1 + \frac{A_{sph}}{A_I} \cdot \frac{1-\rho_w(1-f)}{\rho_w} = 1 + \frac{1-\rho_w(1-f)}{\alpha \cdot \rho_w}$$

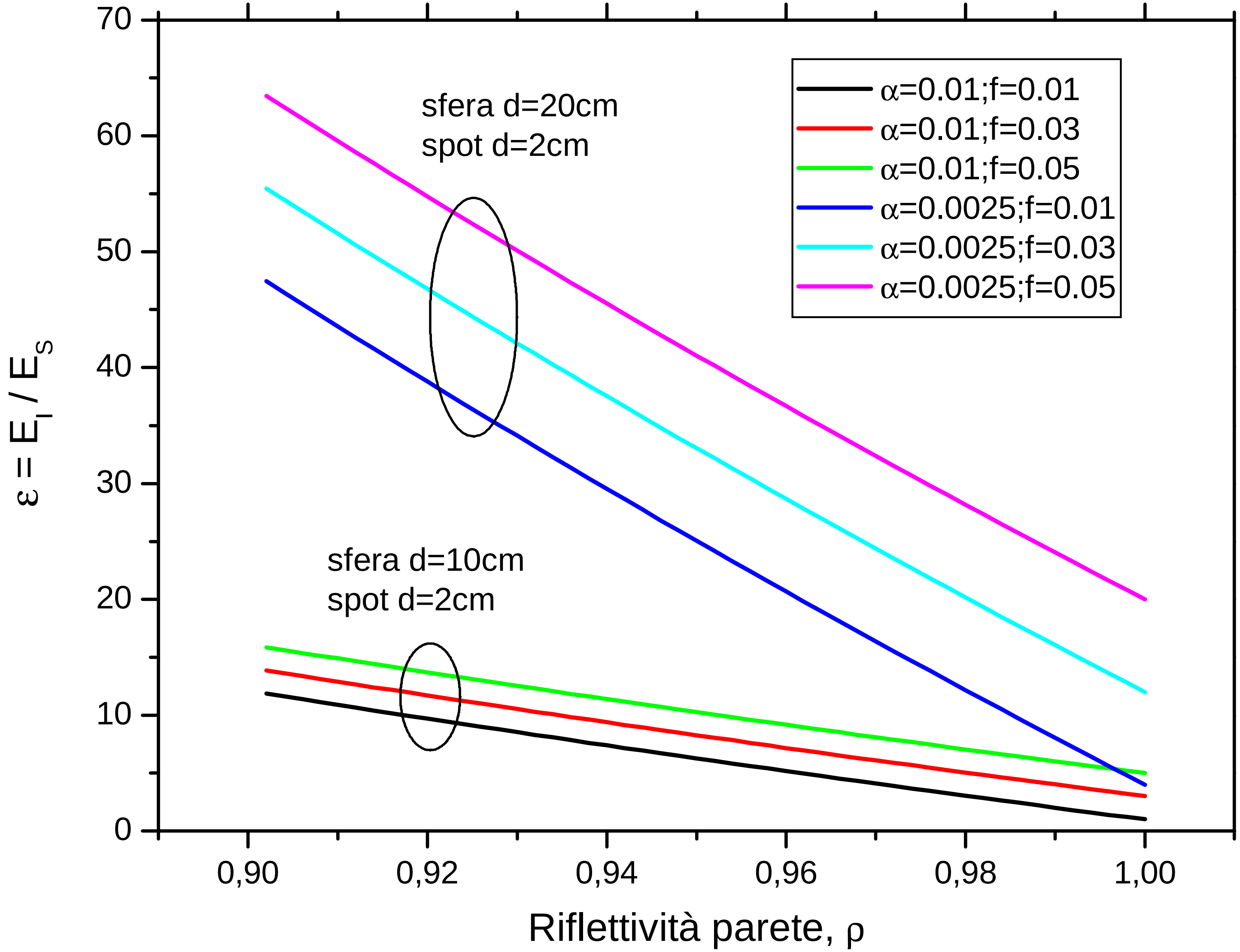
$$\varepsilon = \frac{E_I}{E_w} > 1$$

$$\alpha = \frac{A_I}{A_{sph}} < 1$$

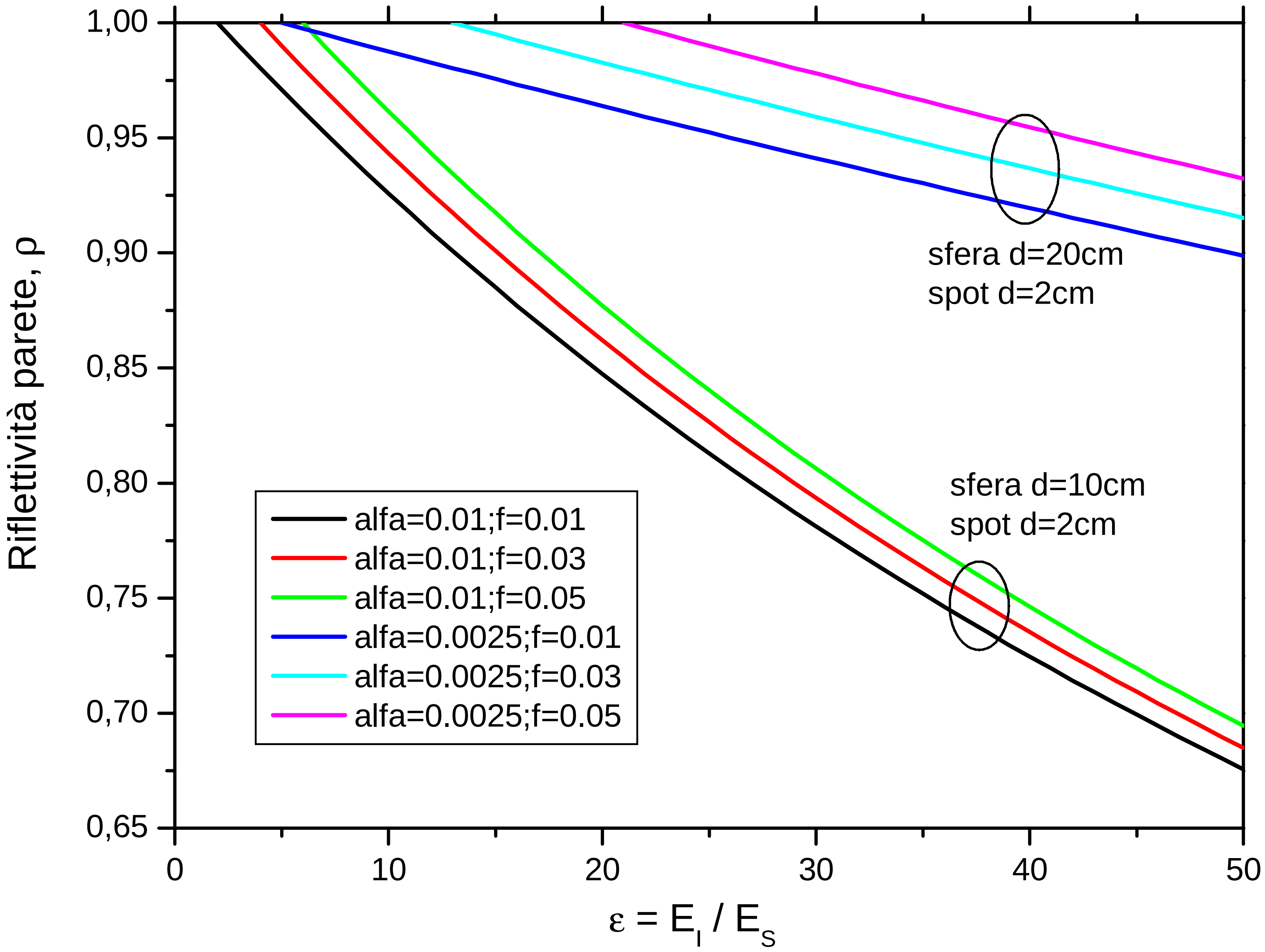
Metodo MIRCO
Misurando il rapporto ε, si può risalire alla riflettività della parete della sfera:

$$\rho_w = \frac{1}{\alpha(\varepsilon - 1) + (1-f)}$$

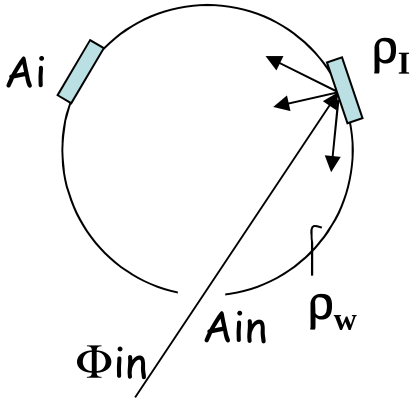
RAPPORTO TRA LE DUE IRRADIANZE



CALCOLO DELLA RIFLETTIVITA' DI PARETE



FORMULA GENERALE PER IL CALCOLO DELL'IRRADIANZA ALL'INTERNO DI UNA SFERA INTEGRATRICE



$\rho_I =$ Riflettanza di primo impatto

$\rho_w =$ Riflettanza della parete

$\rho_i =$ Riflettanza della porta i-ma

$f_i =$ Frazione di area della porta i-ma $= \dfrac{A_i}{A_{sph}} = \dfrac{A_i}{4 \cdot \pi \cdot R^2}$

$$E_w = \frac{\rho_I \cdot \Phi_{in}}{A_{sph}} \cdot \frac{1}{1 - \rho_w \left(1 - \sum_{i=1}^{n} f_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \rho_i f_i}$$

Irradianza sulla parete della sfera

Radianza della sfera:

$$L_{sph} = \frac{\rho_I \cdot \Phi_{in}}{\pi \cdot A_{sph}} \cdot \frac{1}{1 - \rho_w \left(1 - \sum_{i=1}^{n} f_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \rho_i f_i}$$

RIFLETTANZA MEDIA DI UNA SFERA INTEGRATRICE

Espressione generale per il Moltiplicatore della sfera:

$$M = \frac{1}{\rho_I \cdot \left[1 - \rho_w (1 - \sum_{i=1}^{n} f_i) - \sum_{i=1}^{n} \rho_i f_i \right]}$$

$\rho_I =$ Riflettanza iniziale del flusso incidente

$\rho_w =$ Riflettanza della parete

$\rho_i =$ Riflettanza della porta i-ma

$f_i =$ Frazione di area della porta i-ma

La quantità: $\bar{\rho} = \rho_w (1 - \sum_{i=1}^{n} f_i) + \sum_{i=1}^{n} \rho_i f_i$ rappresenta la riflettanza media della sfera

il Moltiplicatore della sfera diventa quindi:

$$M = \frac{1}{\rho_I \cdot (1 - \bar{\rho})}$$

INTEGRAZIONE SPAZIALE

Flusso sulla parete dopo n riflessioni:

$$\boldsymbol{\Phi}_w^n = \boldsymbol{\Phi}_{in} \cdot \sum_{k=1}^{n} \rho^k (1-f)^k$$

Frazione del flusso totale dopo n riflessioni:

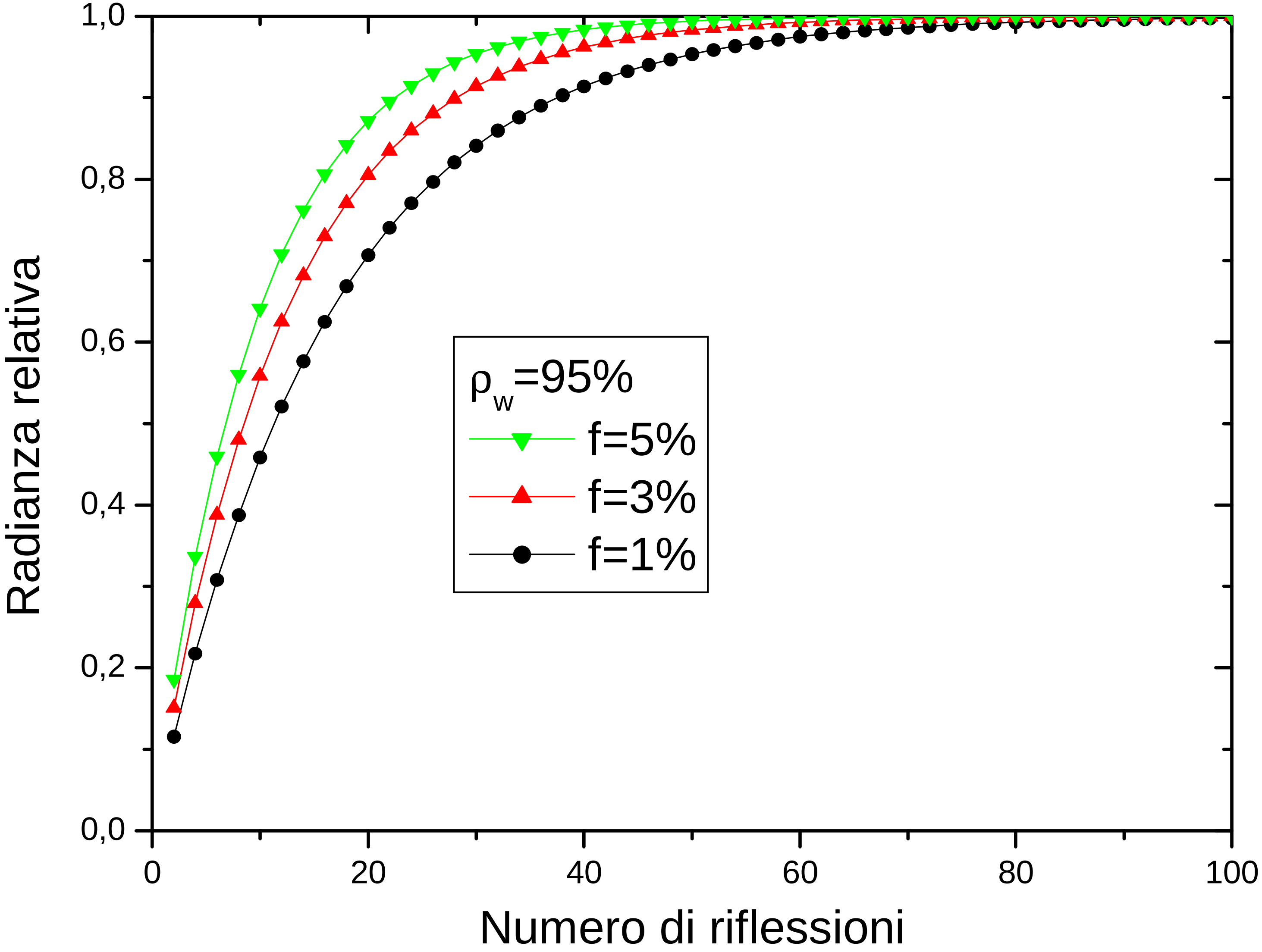
$$\boldsymbol{\Phi}_w^n \Big/ \boldsymbol{\Phi}_w^\infty = \sum_{k=1}^{n} \rho^k (1-f)^k \Bigg/ \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (1-f)^k = \ldots$$

$$\ldots = 1 - \rho^n (1-f)^n$$

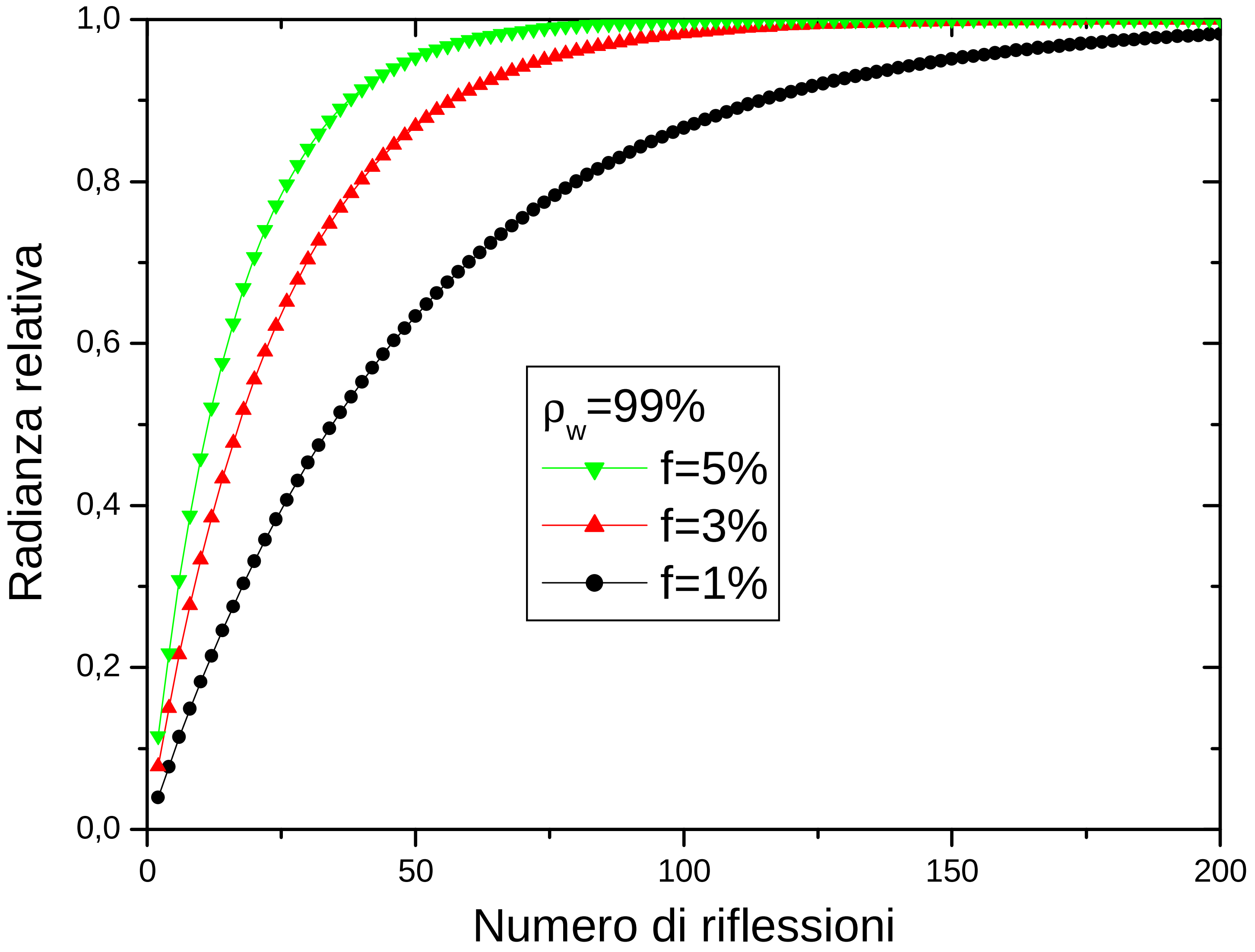
Riportiamo la frazione del flusso totale dopo n riflessioni in funzione della riflettività ρ_w della parete e del fattore f delle porte:

....

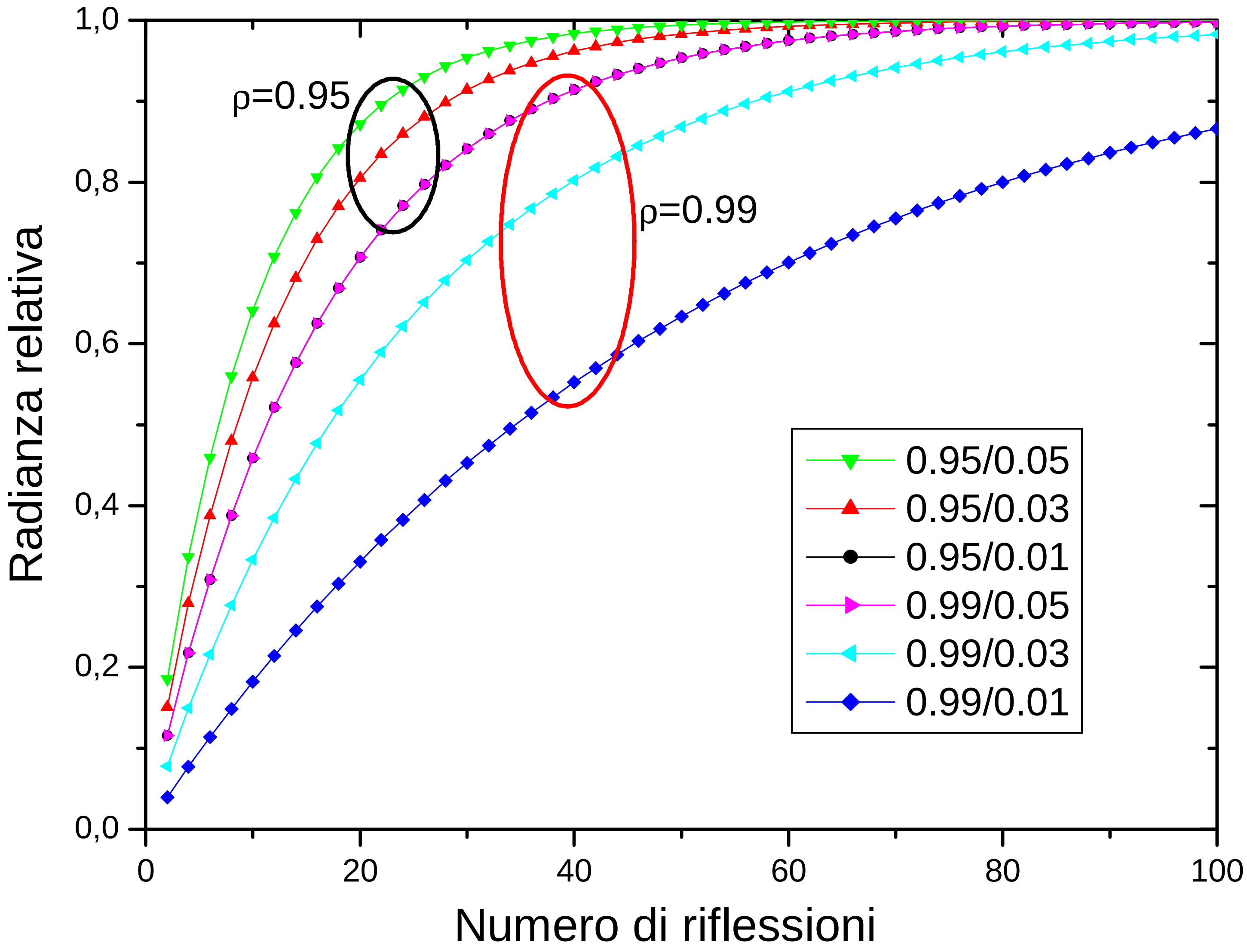
INTEGRAZIONE SPAZIALE



INTEGRAZIONE SPAZIALE



INTEGRAZIONE SPAZIALE



RISPOSTA TEMPORALE

Il segnale luminoso in uscita dalla sfera, in corrispondenza ad un impulso luminoso in ingresso, si ottiene dalla convoluzione del segnale in ingresso con la risposta temporale della sfera.
Esso è del tipo:

$$\Phi_s \propto e^{-t/\tau}$$

Dove la costante di tempo τ è data da:

$$\boxed{\tau = -\frac{2}{3} \cdot \frac{D_s}{c} \cdot \frac{1}{\ln \bar{\rho}}}$$

Con:

$\bar{\rho} =$ Riflettanza media della sfera

$c =$ Velocità della luce

$D_s =$ Diametro della sfera integratrice

ESERCIZI

Esercizio n. 1:
Derivare l'equazione per la costante di tempo relativa alla risposta temporale della sfera.

Esercizio n. 2:
Calcolare l'irradianza su un campione posto al centro di una sfera integratrice illuminata dal flusso φ_1. Ripetere i calcoli per un campione posto su una finestra della sfera.

Esercizio n. 3:
Calcolare l'incremento che la radianza di una superficie lambertiana A_1, illuminata dal flusso φ_1, subisce a causa della presenza nei pressi di una superficie lambertiana A_2 non direttamente illuminata.

Esercizio n. 4:
Calcolare l'incremento che la radianza di una sfera integratrice, illuminata dal flusso φ_1, subisce a causa della presenza nei pressi di una superficie lambertiana A_2 non direttamente illuminata.

ESERCITAZIONI PRATICHE

Esercitazione n. 1:

E' a disposizione una sfera integratrice da sei pollici.
Illuminare la parete della sfera con un fascio laser.
Osservarne gli effetti.
Osservare l'intensità luminosa della regione di primo impatto e del resto della superficie sferica.
Osservare come il rapporto tra le due intensità sia strettamente legato alla riflettività della parete della sfera.

Affacciare ora un campione piano qualsiasi ad una finestra della sfera.
Illuminare il campione con un fascio laser.
Osservarne gli effetti.
Osservare come l'intensità luminosa all'interno della sfera, ovvero la radianza della sfera, sia funzione della riflettività della superficie del campione direttamente illuminato dal fascio laser.
Questo è alla base delle misure di riflettanza di una superficie con la sfera integratrice.