COSTRUZIONE DI UN CPC

Costruiamo il profilo in sezione assiale di un CPC, di tipo 2D o 3D indifferentemente, caratterizzato da una divergenza angolare massima in uscita di 90°. Sappiamo che la condizione $\theta_{out} = 90°$ è quella che ci permette di ottenere il massimo valore del rapporto di concentrazione ottico, a parità di angolo di accettanza θ_{in} del concentratore. Per costruire il profilo del concentratore, abbiamo bisogno di due elementi:

i) il diametro **2a'** dell'apertura di uscita;

ii) la lunghezza focale f del profilo parabolico;

L'angolo di accettanza θ_{in} del CPC è derivato da essi. Quindi il CPC è definito a partire da due elementi o parametri indipendenti, che possono essere a' e f (*). Per prima cosa occorre fissare $2a'$ cioè la distanza tra i fuochi F1 e F2 dei due profili parabolici. Poi si costruiscono le due parabole di focale f, con gli assi paralleli tra loro e all'asse ottico del CPC (vedi fig.1): La condizione da rispettare è che ciascuna parabola contenga, all'interno della sua concavità, il fuoco dell'altra. In caso contrario il CPC non si può costruire. Per capire meglio questo, rivediamo la forma di una

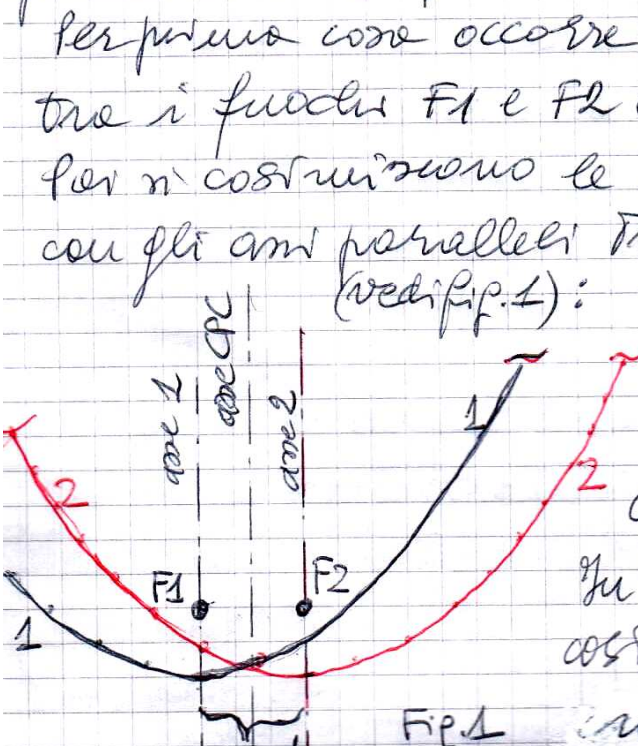


Fig.1

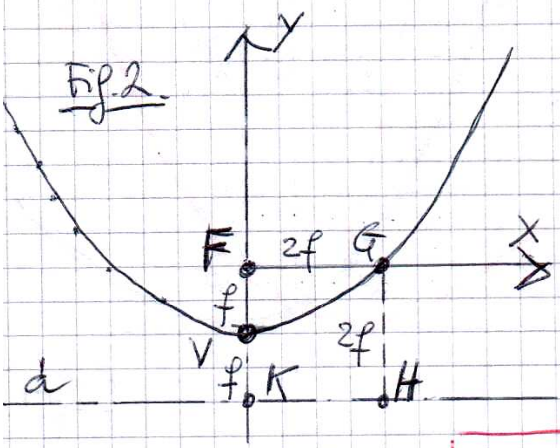
(*) Le grandezze dimensionali di un CPC sono:

a = raggio dell'apertura d'ingresso
a' = " " di uscita
L = lunghezza (distanza fra ingresso e uscita)
θ_{in} = angolo di accettanza
f = focale del profilo parabolico

Se si conoscono almeno due di queste grandezze, allora si possono derivare tutte le altre, quindi due sono le variabili indipendenti del sistema.

parabola (vedi Fig. 2) - L'equazione della parabola con l'asse di simmetria coincidente con l'asse y è data da:

Fig. 2



$$\boxed{y = \frac{x^2}{4f} \quad (1)}$$

se il vertice V è posto all'origine degli assi; per comodità noi poniamo invece il fuoco F all'origine degli assi - L'equazione diventa allora:

$$\boxed{y = \frac{x^2}{4f} - f \quad (2)}$$

. Ricordo che la parabola è il luogo dei punti equidistanti dal fuoco F e dalla retta d (direttrice) - Dalla Fig. 2 vedremo allora che $FV = VK = f$ e $FG = GH = 2f$ -

Ritornando alla Fig. 1 vedremo allora che la distanza fra i due fuochi $F1 - F2 = 2a'$ deve essere inferiore a $2f$ in modo tale che F1 sia all'interno della parabola 2 e che F2 sia all'interno della parabola 1 -

Fatto questo, non ci rimane che ruotare, attorno al fuoco F1, la parabola 1 in senso antiorario fino a sovrapporsi in F2 e, al contempo, ruotare, attorno al fuoco F2 la parabola 2 in senso orario fino a sovrapporsi in F1 - L'angolo corrispondente a questa rotazione è l'angolo di accettanza θ_m del CPC (vedi Fig. 3).

In Fig. 3 è mostrata la nuova posizione dell'asse a1 della parabola 1 e dell'asse a2 della parabola 2.

Una volta ruotate le due parabole, i tratti di parabola ~~interni~~ interni al di sopra dell'asse x vengono mantenuti e costituiscono il profilo assiale.

Trasformiamo ora la (4) tenendo conto che la parabola è stata ruotata in senso antiorario dell'angolo θ_m. Nella (4) dobbiamo allora porre $(\theta-\theta_m)$ anziché θ in modo tale da ottenere, con $\theta=\theta_m$, gli stessi valori di r che avevamo ponendo $\theta=0$. Quindi la (4) diventa:

$$\boxed{r(\theta)=\frac{2f\left[1+\sin(\theta-\theta_m)\right]}{\cos^2(\theta-\theta_m)} \quad (5)}$$

La (5) è l'equazione, in forma polare, del ramo di curva 1 del CPC (vedi Fig. 4). Usiamo ora la (5) per ricavare le espressioni delle varie grandezze del CPC. Ponendo $\theta=0$ abbiamo: $r(0)=2a'$, quindi:

$$\boxed{a'=\frac{f\left[1-\sin\theta_m\right]}{\cos^2\theta_m} \quad (6)}$$

Consideriamo ora il raggio estremo in ingresso al CPC. Esso sarà inclinato di θ_m rispetto all'asse y e quindi di $\left(\frac{\pi}{2}-\theta_m\right)$ rispetto all'asse x. Il raggio estremo lambisce l'apertura d'ingresso nel punto P, quindi avremo:

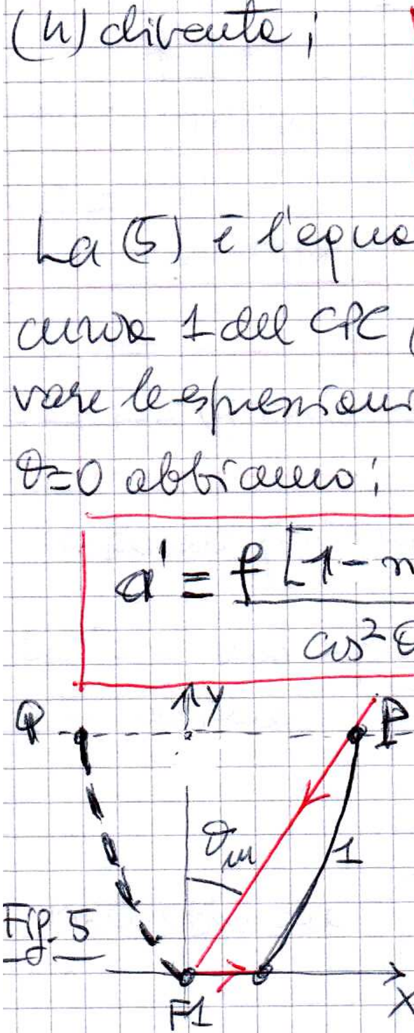


Fig. 5

$PQ=2a$ e $\boxed{F1P\cdot\sin\theta_m-a'=a \quad (7)}$

(a = raggio apertura d'ingresso)

Ora F1P è dato da:

$$F1P=r\left(\frac{\pi}{2}-\theta_m\right)=\frac{2f\left[1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta_m\right)\right]}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-2\theta_m\right)} \quad (8)$$

$$F1P=\frac{2f\left[1+\cos(2\theta_m)\right]}{\sin^2(2\theta_m)}=\frac{2f\cdot\left[2\cdot\cos^2\theta_m\right]}{4\sin^2\theta_m\cdot\cos^2\theta_m}=\ldots$$

$$\boxed{F_1P = \frac{f}{\sin^2\theta_m}} \quad (8)$$

e la (7) diventa allora:

$$a = F_1P \sin\theta_m - a'$$

$$\boxed{a = \frac{f}{\sin\theta_m} - a'} \quad (9) \qquad \boxed{(a+a')\cdot\sin\theta_m = f} \quad (10)$$

$$a = \frac{f}{\sin\theta_m} - \frac{f(1-\sin\theta_m)}{\cos^2\theta_m} = \frac{f(1-\sin\theta_m)}{\sin\theta_m\cdot\cos^2\theta_m} \Longrightarrow$$

$$\boxed{a = \frac{a'}{\sin\theta_m}} \quad (11)$$

Dalla fig. 5 abbiamo inoltre:

$$L = F_1P\cdot\cos\theta_m = \frac{f\cdot\cos\theta_m}{\sin^2\theta_m} = \frac{f}{\sin\theta_m}\cdot\cot g\,\theta_m$$

$$\boxed{L = (a+a')\cdot\cot g\,\theta_m} \quad (12)$$

la focale f si può anche esprimere: $\boxed{f = a'(1+\sin\theta_m)}$ (13)

La L si può esprimere anche solo in funzione di a' e di θ_m e si ottiene:

$$\boxed{L = \frac{a'\cdot(1+\sin\theta_m)\cdot\cos\theta_m}{\sin^2\theta_m}} \quad (14)$$

Ricordo che:
- $2a$ = diametro apertura d'ingresso
- $2a'$ = diametro apertura di uscita
- L = lunghezza del concentratore

E' interessante plottare il rapporto L/a' in funzione di θ_m, cioè calcolare la lunghezza del CPC relativa al raggio dell'apertura di uscita.

Si trova un andamento di questo tipo:

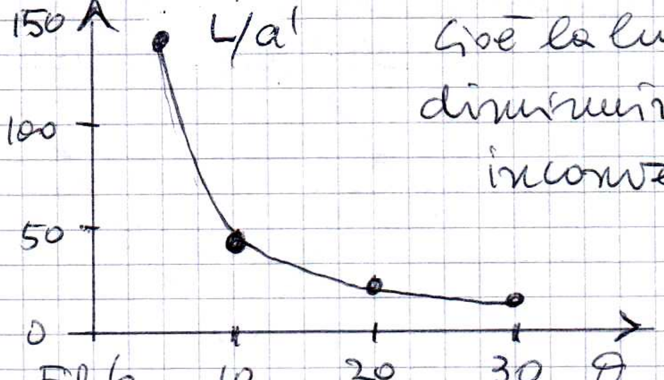


Fig.6

Cioè la lunghezza cresce moltissimo al diminuire di θ_m. Questo è il principale inconveniente del CPC.

Vediamo alcuni numeri:

$\theta_m(°)$	L/a'	$\theta_m(°)$	L/a'
1	3340	10	38
2	849	20	11
3	384	30	52
5	143	40	3

Facciamo ora una considerazione nel profilo del CPC. Consideriamo la Fig.7.

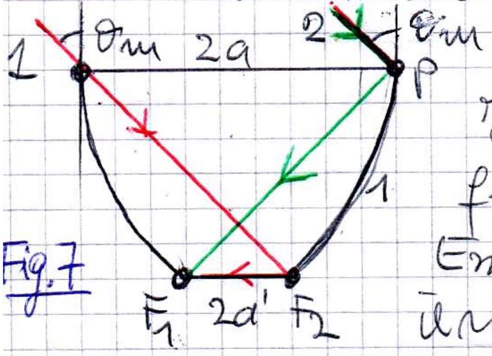


Fig.7

Il raggio estremo 1 di sinistra è riflesso nel punto F_2 e giunge al fuoco F_1. Esso è inclinato dell'angolo θ_m. Anche il raggio estremo 2 di destra è inclinato dell'angolo θ_m prima di essere riflesso dalla parete nel punto P e arrivare in F_1. Ma se il raggio 2 attraversa il CPC con la stessa inclinazione del raggio 1, allora vuol dire che la parete del CPC nel punto P è verticale. In conclusione "la tangente alla parete d'ingresso del CPC è parallela all'asse del CPC". Per vederlo analiticamente, consideriamo la fig. 8. La retta F_1P è quella del raggio estremo incidente con angolo θ_m rispetto all'asse del CPC. Essa è caratterizzata da un angolo polare $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_m$. Nel punto P il vettore $\vec{r}(\theta)$

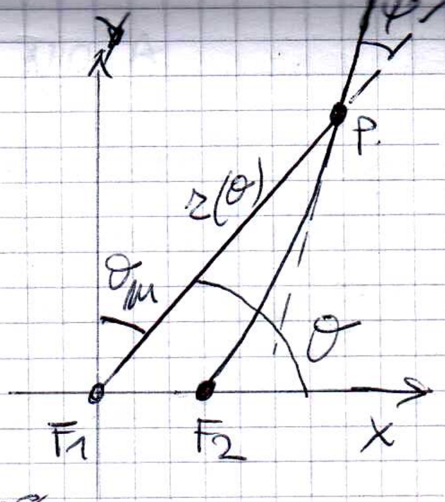


Fig.8

forma un angolo ψ con la tangente alla curva nel punto P — Calcoliamo $tg\psi$ — Abbiamo:

$$tg\psi = r \cdot \frac{d\theta}{dr} \quad (15)$$

Calcoliamo $\frac{dr}{d\theta}$ utilizzando la (5) che riscriviamo in questo modo:

$$\boxed{r(\theta) = \frac{2f}{1-\sin(\theta-\theta_m)}} \quad (5)$$

Abbiamo:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{2f \cdot \cos(\theta-\theta_m)}{[1-\sin(\theta-\theta_m)]^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\psi = \frac{2f}{1-\sin(\theta-\theta_m)} \cdot \frac{[1-\sin(\theta-\theta_m)]^2}{2f \cdot \cos(\theta-\theta_m)}$$

$$tg\psi = \frac{1-\sin(\theta-\theta_m)}{\cos(\theta-\theta_m)}$$ ... imponiamo $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta_m$:

$$tg\psi = \frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-2\theta_m)}{\cos(\frac{\pi}{2}-2\theta_m)} = \frac{1-\cos(2\theta_m)}{\sin(2\theta_m)} = \text{---}$$

$$\text{---} = \frac{2\sin^2\theta_m}{2 \cdot \sin\theta_m \cdot \cos\theta_m} = tg\,\theta_m$$

Otteniamo quindi:

$$\boxed{tg\psi\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}-\theta_m} = tg\,\theta_m} \quad (16)$$

Conseguenza della (16) è che la retta tangente al CPC nel punto P è parallela all'asse y —

NOTA

Alcune delle equazioni precedentemente poste possono essere scritte in una forma più semplice -
Abbiamo infatti:

Eq.ne (4) : $\boxed{r(\theta) = \dfrac{2f}{1-\sin\theta}}$ Eq.ne polare della parabola.

Eq.ne (5) ; $\boxed{r(\theta) = \dfrac{2f}{1-\sin(\theta-\theta_m)}}$ Eq.ne polare della parabola ruotata in senso ccw dell'angolo θ_m -

Eq.ne (6) ; $\boxed{a' = \dfrac{f}{1+\sin\theta_m}}$ raggio apertura di uscita