1. Una particella di massa unitaria si muove lungo l'asse Ox in assenza di forze. A partire dalla descrizione hamiltoniana in tale sistema di riferimento,

   (a) si verifichi la canonicità della trasformazione $(x, p) \longrightarrow (X, P)$:
   $$X = x + pt^2; \qquad P = p$$
   e si scriva la nuova Hamiltoniana $K(X, P)$;

   (b) si risolva la corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi, esplicitando la soluzione del moto $X = X(X_0, P_0, t)$.

2. Si consideri un oscillatore armonico bidimensionale di massa unitaria, descritto dalla funzione di Lagrange
   $$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)$$
   e si scriva la corrispondente funzione di Hamilton.

   (a) Si applichi alle equazioni di Hamilton del sistema la trasformazione
   $$Q_i = q_i; \quad P_1 = p_2; \quad P_2 = p_1$$
   e si verifichi che il sistema trasformato è ancora hamiltoniano; si commenti la canonicità della trasformazione.

   (b) Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi per il nuovo sistema hamiltoniano.

3. Una particella di massa unitaria si muove nello spazio, soggetta a una forza costante di modulo γ, diretta come l'asse Oz. Si scriva la funzione di Hamilton del sistema e

   (a) si verifichi che la funzione $G = \gamma x + p_x p_z$ genera una simmetria per H.

   (b) si discuta la costruzione della trasformazione canonica finita per esponenziazione di tale simmetria.

4. Una particella di massa m si muove nel piano Oxy sotto l'azione di una forza di modulo costante F, diretta come l'asse Ox; si consideri inoltre, nelle variabili canoniche x, y, p_x, p_y, l'operatore differenziale:
   $$\widehat{G} = F\frac{\partial}{\partial p_y} - \frac{p_y}{m}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{p_x}{m}\frac{\partial}{\partial y}.$$

   (a) Si verifichi che l'applicazione successiva dell'operatore hamiltoniano $\widehat{H}$ relativo a questo sistema e dell'operatore $\widehat{G}$ alle variabili canoniche, $\widehat{H}(\widehat{G}(z))$, è commutativa;

   (b) si scriva esplicitamente la simmetria dell'Hamiltoniana generata da $\widehat{G}$ e si verifichi che la corrispondente funzione generatrice è una costante del moto.

5. Una particella carica di massa unitaria si muove in un campo magnetico costante (di modulo B) diretto come l'asse x_3 e in un campo elettrico costante (di modulo E), diretto come l'asse x_1. Facendo uso dei potenziali vettore e scalare

$$\mathbf{A} = Bx_1\mathbf{e}_2; \qquad V = -Ex_1,$$

   (a) si discuta l'integrabilità della corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi;

   (b) si determini, mediante l'esponenziazione dell'operatore $\widehat{H}$, l'evoluzione temporale della funzione

$$F(x_3(t), p_3(t)) = \frac{x_3^2}{p_3}.$$

6. Il moto di una particella sull'asse Ox è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 + A\frac{p}{x}, \qquad A \in \mathbb{R}.$$

   (a) Si scriva l'espressione della forza (posizionale) a cui è soggetta la particella;

   (b) si scrivano le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili:

$$Q = \arctan \lambda\frac{x}{p}; \qquad P = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{\lambda} + \lambda x^2\right), \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

7. Il moto di una particella di massa unitaria sull'asse Ox è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2} + V(x)$$

   (a) Si consideri la trasformazione di scala

$$Q = \beta x; \qquad P = \alpha p \qquad\qquad \beta\alpha \in \mathbb{R}$$

   e si mostri che è canonoide rispetto ad H, determinando la nuova hamiltoniana $K(Q, P)$;

   (b) si verifichi se esistono condizioni su β e α per cui le equazioni differenziali del moto sono invarianti.

8. Si determini per quali valori delle costanti α e β le seguenti equazioni

$$\dot{p}_1 = 0; \quad \dot{p}_2 = 0; \quad \dot{q}_1 = p_1 + p_2; \quad \dot{q}_2 = \alpha p_1 - 2p_2 - \beta q_2^4, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

   sono equazioni di Hamilton. Si scriva la funzione di Hamilton e

   (a) si determini la corrispondente funzione di Lagrange;

   (b) si dica per quale funzione $\lambda = \lambda(p_1, p_2)$ è costante durante il moto hamiltoniano la funzione

$$G = q_1 + t\lambda(p_1, p_2).$$

9. Una particella di carica q e massa unitaria si muove in un campo magnetico il cui potenziale vettore è
$$\mathbf{A} = f(x_1)\mathbf{e}_3$$
mentre è nullo il potenziale scalare ϕ.
   (a) Si scriva per il sistema l'operatore hamiltoniano
   $$\widehat{H} = \frac{\partial H}{\partial z}\Gamma\frac{\partial}{\partial z};$$
   (b) mediante esponenziazione di tale operatore si studi l'evoluzione temporale della funzione
   $$F = \frac{x_2^2}{2p_2}$$

10. Sia
$$H = \frac{1}{2}\left[\mathbf{p}^2 + \frac{q^2B^2}{4}(x_1^2 + x_2^2) + qB(p_1x_2 - x_1p_2)\right]$$
la funzione di Hamilton di una particella di carica q e massa unitaria in moto in un campo magnetico costante, e campo elettrico nullo.

    Si applichi al sistema la trasformazione (lineare) di punto $(x_1, x_2, x_3) \to (Q_1, Q_2, Q_3)$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \dfrac{1}{\alpha}\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}$$
dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e φ è un angolo assegnato, e si scriva la nuova hamiltoniana $K(Q, P)$; si discuta se, per qualche valore di α, $K(Q, P)$ ha la stessa forma funzionale di H e dunque la trasformazione è una simmetria (finita) dell'hamiltoniana.

11. Si consideri nello spazio delle fasi bidimensionale la generica trasformazione lineare invertibile, insieme con la sua inversa:
$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}; \quad \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$
    (a) Si individui quali di queste trasformazioni sono canonoidi per l'oscillatore armonico unidimensionale;
    (b) si verifichi se tra le canonoidi individuate esistono trasformazioni canoniche.

12. Una particella è vincolata nel piano Oxy e la sua evoluzione dinamica è descritta dalla funzione di Hamilton
$$H = \frac{p_x^2}{2} + p_y^2 - p_xp_y - 2y.$$
    (a) Si scriva l'operatore hamiltoniano $\widehat{H}$ e si valuti la serie $\quad z(t) = e^{-t\widehat{H}}z^0 \quad$ per ogni variabile canonica;

(b) si scriva la nuova hamiltoniana K dopo aver eseguito la trasformazione di coordinate

$$X = x; \qquad Y = \frac{1}{2}(x+y)$$

e si verifichi che $\qquad [p_x, K] = 0$

dove $p_x = p_x(X, Y, P_X, P_Y)$ è espresso nelle nuove coordinate.

13. Si consideri la trasformazione di coordinate dello spazio delle fasi $(q,p) \longrightarrow (Q,P)$,

$$Q = \frac{1}{2}q^2 p; \qquad P = f(q)$$

(a) Si determini per quale funzione $f(q)$ tale trasformazione è canonica;

(b) si applichi tale trasformazione all'hamiltoniana di una particella libera e si verifichi che la nuova hamiltoniana $K = K(Q,P)$ è invariante per le trasformazioni infinitesime generate dalla quantità di moto

$$p = p(Q,P).$$

14. Le particelle P_1 e P_2, di ugual massa, sono vincolate a muoversi, rispettivamente, sull'asse Ox e sull'asse Oy di un sistema di riferimento ortogonale di un piano orizzontale. Le due particelle esercitano una sull'altra una forza diretta come la loro congiungente e di modulo

$$F(r) = e^{-r} - 1$$

dove r è la distanza tra i due punti.

(a) Si scriva la funzione di Hamilton per il sistema, scegliendo come variabili lagrangiane r e l'angolo θ che il segmento $(P_2 - P_1)$ forma con l'asse Ox;

(b) si discuta l'equazione di Hamilton Jacobi.

15. Una particella di massa unitaria si muove nel piano Oxy soggetta alla forza

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -k(t)x + \dfrac{\alpha}{x^3} \\ \\ -k(t)y + \dfrac{\alpha}{y^3} \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Si scriva la funzione di Hamilton per il sistema;

(b) si espliciti la trasformazione canonica infinitesima generata da

$$G = \alpha\frac{x^4 + y^4}{x^2 y^2} + (xp_y - yp_x)^2$$

e si mostri che tale trasformazione è una simmetria per H.

16. La funzione di Lagrange per un moto unidimensionale ha la forma

$$\mathscr{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} e^{f(x)}.$$

Si scriva l'operatore hamiltoniano $\widehat{H}$ corrispondente a tale moto e

(a) si verifichi se $\widehat{H}$ commuta con l'operatore associato alla funzione generatrice

$$G = f(x) - 2\ln p.$$

(b) Si determini la forma di $f(x)$ per la quale lo sviluppo in serie

$$p(t) = e^{-t\widehat{H}} p_0$$

si arresta al primo ordine e si commenti il risultato.

17. Un sistema di coordinate cartesiano ortogonale $Ox_1x_2x_3$ di un osservatore inerziale viene trasformato nel sistema rotante $Oy_1y_2y_3$ secondo la seguente equazione:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix};$$

(a) si discuta la canonicità di tale trasformazione, determinandone la funzione generatrice;

(b) si applichi tale trasformazione al moto di una particella soggetta a forze centrali ($V = V(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$) e si scriva la funzione di Hamilton nel nuovo sistema di coordinate;

(c) si discuta la conservazione di tale hamiltoniana.

18. Una particella di massa unitaria si muove nel piano Oxy e la sua dinamica è descritta dalla funzione di Hamilton

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{k^2}{(x^2+y^2)} + \frac{k}{x^2+y^2}(xp_y - yp_x);$$

(a) si scriva la funzione di Hamilton in coordinate polari, eseguendo l'usuale trasformazione

$$x = \rho\cos\theta; \qquad y = \rho\sin\theta;$$

(b) si scriva la corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi e se ne discuta la separabilità.

19. La funzione di Lagrange

$$\mathscr{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{d}{dt}(f(x))$$

descrive il moto di una particella libera, di massa unitaria, qualsiasi sia la funzione $f(x)$.

Si scrivano la funzione di Hamilton e le equazioni di Hamilton corrispondenti a tale lagrangiana e:

(a) si applichi a tali equazioni la trasformazione di coordinate $(x, p) \longrightarrow (Q, P)$:

$$Q = x; \qquad P = \left(p - \frac{df}{dx}\right)^2,$$

discutendo se tale trasformazione possa essere canonoide rispetto all'hamiltoniana data;

(b) si discuta la canonicità di tale trasformazione.

20. Le equazioni del moto di una particella nello spazio delle fasi bidimensionale di coordinate x, p sono:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(t)p + (a-1)x \\ \dot{p} &= -F(t)\frac{dG}{dx} \end{aligned}$$

dove $a \in \mathbb{R}$, e le funzioni F e G dipendono, come è indicato, rispettivamente da t e da x.

(a) si trovi per quali valori di a tali equazioni sono canoniche e si scriva la corrispondente funzione di Hamilton;

(b) si risolva per tale hamiltoniana l'equazione di Hamilton Jacobi.

21. Si mostri che la trasformazione

$$Q = q; \qquad P = p^2 - f(q)$$

è canonoide per l'hamiltoniana della particella libera $H = \frac{p^2}{2}$ per ogni scelta di $f(q)$. Si determini la nuova hamiltoniana $K = K(Q, P)$ e si studi la corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi

$$K + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

22. Sia $V = \dot{\theta}\rho$ l'energia potenziale generalizzata di una particella che si muove su un piano i cui punti sono individuati dalle coordinate polari ρ e θ.

(a) si riduca il numero di variabili lagrangiane con il metodo di Routh;

(b) a partire dalla funzione di Routh, si scriva la corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi, discutendone la risolubilità.

23. Una particella carica si muove in un campo magnetico costante, diretto come l'asse Oz. Si descriva il sistema facendo uso delle coordinate cilindriche ρ, θ, z e dei momenti coniugati p_ρ, p_θ, p_z, e in tale sistema di coordinate

(a) si scrivano gli operatori

i. $\widehat{H}$ che genera il moto infinitesimo del sistema;

ii. $\widehat{L}$ che genera le rotazioni infinitesime attorno all'asse Oz;

iii. $\widehat{P}$ che genera le traslazioni infinitesime lungo l'asse Oz;

(b) si verifichi se si annullano i commutatori

$$[\widehat{H}, \widehat{L}], \qquad [\widehat{H}, \widehat{P}], \qquad [\widehat{L}, \widehat{P}]$$

24. Una particella di massa unitaria si muove in un piano, soggetta a una forza di potenziale

$$U = \frac{\cos\theta}{\rho^2}.$$

Si scriva per il sistema la funzione di Hamilton $H = H(\rho, \theta, p_\rho, p_\theta)$ e

(a) si verifichi che la trasformazione infinitesima

$$\begin{cases} \delta\theta = \epsilon p_\theta \\ \delta p_\theta = -\epsilon \sin\theta \end{cases} \tag{1}$$

è canonica e lascia invariata in forma la funzione di Hamilton;

(b) si scrivano il generatore infinitesimo $\widehat{G}$ della (1), l'operatore hamiltoniano $\widehat{H}$ relativo al moto del sistema e si verifichi se essi commutano con l'operatore

$$\widehat{p_\rho}.$$

25. Una particella di massa unitaria si muove su una retta soggetta a una forza costante, cosicché la corrispondente funzione di Hamilton è:

$$H = \frac{p^2}{2} - x.$$

Si trovi la funzione generatrice della trasformazione canonica

$$(x, p) \longrightarrow (X, P)$$

che soddisfa ai seguenti requisiti:

(a)

$$P = \frac{1}{p};$$

(b) nelle nuove coordinate, il sistema è descritto dalla funzione di Hamilton

$$K = XP^2.$$

26. Una particella di massa unitaria si muove nello spazio soggetto a una forza di potenziale

$$-\frac{f(\theta)}{\rho^2} + g(z)$$

dove ρ, θ, z sono le coordinate cilindriche.

Si consideri la trasformazione infinitesima

$$\delta\theta = \epsilon p_\theta; \quad \delta p_\theta = -\epsilon \frac{df(\theta)}{d\theta}; \quad \delta z = \epsilon t; \quad \delta p_z = \epsilon$$

Dopo averne verificato la canonicità,

(a) si valuti la variazione in forma dell'Hamiltoniana per effetto di tale trasformazione;
(b) si trovi una condizione sotto la quale la trasformazione è una simmetria dell'Hamiltoniana

27. La funzione di Hamilton che descrive il moto di una particella di massa unitaria è
$$H(q,p,t) = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{t}qp.$$
Si esegua la trasformazione di coordinate $(q,p) \longrightarrow (Q,P)$
$$Q = tq, \qquad P = \frac{p}{t}$$
(a) Verificata la canonicità di tale trasformazione, si scriva la nuova hamiltoniana $K(Q,P,t)$ per il nuovo sistema canonico;
(b) si risolva l'equazione di Hamilton-Jacobi relativa a K.

28. La funzione di Hamilton che descrive il moto di un sistema a un grado di libertà è
$$H(q,p,t) = \frac{a^2t^2}{2}\frac{p^2}{q^2} - \frac{q^2}{2} + \frac{qp}{2t}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$
Si esegua la trasformazione di coordinate di punto $(q,p) \longrightarrow (Q,P)$ caratterizzata da
$$Q = \frac{q^2}{2at}.$$
(a) Si scriva la nuova hamiltoniana $K(Q,P,t)$ ottenuta per effetto di tale trasformazione e la corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi;
(b) si discuta se la funzione
$$S(Q,\alpha,t) = bt^2Q + \alpha Q + \lambda(t), \qquad b \in \mathbb{R},$$
rappresenta l'integrale completo per tale equazione.

29. La funzione di Lagrange di una particella carica in moto in un campo magnetico costante e in un campo elettrico nullo è
$$\mathscr{L}_1 = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + q\frac{B}{2}(x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2)$$
(dove: $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$, m la massa, q la carica; per semplicità assumiamo $\dot{x}_3(0) = 0$). Tenendo conto dell'arbitrarietà del potenziale vettore, una lagrangiana (gauge-)equivalente a $\mathscr{L}_1$ è palesemente
$$\mathscr{L}_2 = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + q(f(x_1)\dot{x}_1 + Bx_1\dot{x}_2)$$
dove $f = f(x_1)$ è completamente arbitraria. Siccome è noto che la funzione
$$G = m(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1) + \frac{qB}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$
è costante durante il moto, si verifichi se, in ambito hamiltoniano, essa genera una simmetria anche per la funzione di Hamilton ricavata da $\mathscr{L}_2$. Si verifichi inoltre se tale risultato dipende dalla funzione $f(x_1)$.

30. Esercizio 7.10 Goldstein pag. 455

   (a) Una particella carica si muove nello spazio sotto l'azione di un potenziale conservativo. Si imposti l'equazione di Hamilton-Jacobi in coordinate ellissoidali u, v, ϕ definite in funzione delle usuali coordinate cilindriche ρ, z e ϕ da

$$\rho = a \sinh v \sin u \qquad \phi = \phi \qquad z = a \cosh v \cos u.$$

   Si dica per quali forme di $V(u, v, \phi)$ l'equazione è separabile.

   (b) Si utilizzino i risultati del punto (a) per ridurre alle quadrature il problema di una particella puntiforme di massa m che si muove nel campo gravitazionale di due particelle con masse diverse tra loro, fissate sull'asse z a distanza reciproca $2a$.

SOLUZIONI

1. La funzione di Hamilton, ovviamente, è $H = \dfrac{p^2}{2}$.

   (a) Le condizioni

$$\begin{aligned} p = & \ \frac{\partial F_2}{\partial x} && = P \\ X = & \ \frac{\partial F_2}{\partial P} && = x + Pt^2 \end{aligned}$$

   risultano soddisfatte da $F_2 = xP + \dfrac{P^2 t^2}{2}$. Allora,

$$\boxed{K(X, P) = H(x, p) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \left(t + \frac{1}{2}\right) P^2}.$$

   (b) L'equazione di Hamilton-Jacobi

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)^2 + \frac{2}{2t+1}\frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

   è a variabili separabili. Infatti, se scriviamo la soluzione come

$$S(X, \alpha, t) = W_X(X, \alpha) + W_t(t, \alpha),$$

   si ha

$$\left(\frac{\partial W_X}{\partial X}\right)^2 = \alpha^2 = -\frac{2}{2t+1}\frac{\partial W_t}{\partial t}.$$

   Dunque, $$\boxed{S = W_X + W_t = \alpha X - (t+1)\frac{t}{2}\alpha^2.}$$

Allora, valutando all'istante iniziale $t = 0$ le relazioni tra le variabili

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\partial S}{\partial \alpha} = X - \alpha(t+1)t \\ P &= \frac{\partial S}{\partial X} = \alpha, \end{aligned}$$

otteniamo

$$\beta = X^0 = X(0); \qquad \alpha = P^0 = P(0)$$

e la soluzione

$$\boxed{X = X^0 + P^0(t+1)t}$$

<u>Osservazione</u>: naturalmente tale soluzione, tornando alle coordinate originarie, si trasforma in

$$x + pt^2 = x^0 + p^0(t+1)t \Longrightarrow x = x^0 + p^0 t,$$

come deve essere per la particella libera.

2. La funzione di Hamilton è

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)$$

con equazioni del moto

$$\dot{q}_i = p_i; \qquad \dot{p}_i = -q_i, \qquad\qquad i = 1, 2$$

La trasformazione non è ovviamente canonica, basta considerare che

$$[Q_1, P_1] = [q_1 p_2] = 0.$$

La trasformazione è però canonoide. Infatti, dalla trasformazione delle equazioni differenziali del moto, si ottiene che

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{\partial Q_1}{\partial q_1}\dot{q}_1 = P_2 \\ \dot{Q}_2 &= \frac{\partial Q_2}{\partial q_2}\dot{q}_2 = P_1 \\ \dot{P}_1 &= \frac{\partial P_1}{\partial p_2}\dot{p}_2 = -Q_2 \\ \dot{P}_2 &= \frac{\partial P_1 2}{\partial p_1}\dot{p}_1 = -Q_1 \end{aligned}$$

che rappresentano le equazioni di Hamilton per la funzione

$$K = P_1 P_2 + Q_1 Q_2.$$

La conseguente equazione di Hamilton-Jacobi è

$$\left(\frac{\partial S}{\partial Q_1}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial Q_2}\right) + Q_1 Q_2 = \alpha$$

3. La funzione di Hamilton è $\quad H = \dfrac{\mathbf{p}^2}{2} + \gamma z$; la funzione G genera le trasformazioni infinitesime

$$\begin{array}{ll} \delta x = \delta\lambda p_z & \delta p_x = -\delta\lambda\gamma \\ \delta y = 0 & \delta p_y = 0 \\ \delta z = \delta\lambda p_x & \delta p_z = 0 \end{array}$$

G genera una simmetria per H ed è una costante del moto poiché, come è immediato verificare,

$$[G, H] = \gamma p_x - p_x\gamma = 0$$

$$K = \frac{1}{2}\left(P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2\right) - \delta\lambda\gamma P_X + \delta\lambda\gamma p_x + \gamma Z \Longrightarrow \Delta H = 0.$$

Per quel che concerne il secondo punto, tenendo conto che

$$\widehat{G} = \gamma\frac{\partial}{\partial p_x} - p_z\frac{\partial}{\partial x} - p_x\frac{\partial}{\partial z},$$

	$\widehat{G}$	$\widehat{G}^2$	$\widehat{G}^3$
x	$-p_z$	0	0
y	0	0	0
z	$-p_x$	$-\gamma$	0
p_x	γ	0	0
p_y	0	0	0
p_z	0	0	0

e, dunque,
$$\begin{array}{ll} x(\lambda) = x^0 + \lambda p_z & p_x(\lambda) = p_x^0 - \lambda\gamma \\ y(\lambda) = y^0 & p_y(\lambda) = p_y^0 \\ z(\lambda) = z^0 + \lambda p_x - \gamma\frac{\lambda^2}{2} & p_z(\lambda) = p_z^0 \end{array}$$

4. (a) Prima questione.

Siccome $\quad \widehat{H} = F\dfrac{\partial}{\partial p_x} - \dfrac{p_x}{m}\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{p_y}{m}\dfrac{\partial}{\partial y},$

$$\begin{array}{ll} \widehat{H}(\widehat{G}(x)) = \widehat{H}\left(-\dfrac{p_y}{m}\right) = 0 & \widehat{G}(\widehat{H}(x)) = \widehat{G}\left(-\dfrac{p_x}{m}\right) = 0 \\ \widehat{H}(\widehat{G}(y)) = \widehat{H}\left(-\dfrac{p_x}{m}\right) = -\dfrac{F}{m} & \widehat{G}(\widehat{H}(y)) = \widehat{G}\left(-\dfrac{p_y}{m}\right) = -\dfrac{F}{m} \\ \widehat{H}(\widehat{G}(p_x)) = \widehat{H}(0) = 0 & \widehat{G}(\widehat{H}(p_x)) = \widehat{G}(F) = 0 \\ \widehat{H}(\widehat{G}(p_y)) = \widehat{H}(F) = 0 & \widehat{G}(\widehat{H}(p_y)) = \widehat{G}(0) = 0 \end{array}$$

concludiamo che la commutatività è soddisfatta. In realtà il risultato è generalizzabile a ogni arbitraria $f(x, y, p_x, p_z)$:

$$\widehat{H}(\widehat{G}(f)) = \widehat{H}\left(F\frac{\partial f}{\partial p_y} - \frac{p_y}{m}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{p_x}{m}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \widehat{G}(\widehat{H}(f)) = \widehat{G}\left(F\frac{\partial f}{\partial p_x} - \frac{p_x}{m}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{p_y}{m}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

(b) Seconda questione. Rispondendo alla prima questione si è già stabilito che

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta\lambda \frac{p_y}{m} \\ \delta p_x &= 0 \\ \delta y &= \delta\lambda \frac{p_x}{m} \\ \delta p_y &= -\delta\lambda F \end{aligned}$$

da cui $\quad G = Fy + \frac{1}{m} p_x p_y \Longrightarrow [G, H] = \left[Fy + \frac{1}{m} p_x p_y, \frac{1}{m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + Fx \right] = 0,$

che dimostra la conservazione di G e ribadisce il suo ruolo di generatrice di una simmetria.

5. (a) Prima questione.

La funzione di Lagrange del sistema è

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + qEx_1 + qBx_1\dot{x}_2$$

e le trasformazioni di Legendre (dirette e inverse) sono:

$$\left\{ \begin{aligned} p_1 &= \dot{x}_1 \\ p_2 &= \dot{x}_2 + qBx_1 \\ p_3 &= \dot{x}_3 \end{aligned} \right. \qquad \longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= p_1 \\ \dot{x}_2 &= p_2 - qBx_1 \\ \dot{x}_3 &= p_3 \end{aligned} \right.$$

Conseguentemente, la funzione di Hamilton e l'operatore hamiltoniano sono, rispettivamente,

$$H = \frac{1}{2}\left[p_1^2 + (p_2 - qBx_1)^2 + p_3^2\right] - qEx_1$$

$$\widehat{H} = (qB(qBx_1 - p_2) - qE)\frac{\partial}{\partial p_1} - p_1\frac{\partial}{\partial x_1} - (p_2 - qBx_1)\frac{\partial}{\partial x_2} - p_3\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

L'equazione di Hamilton Jacobi è dunque:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right) - qBx_1\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2\right] - qEx_1 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0;$$

siccome le variabili t, x_2 e x_3 sono cicliche, poniamo

$$S(\mathbf{x}, \alpha_i) = -\alpha_1 t + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + W(x_1, \alpha_i)$$

e, sostituendo, otteniamo

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2 + (\alpha_2 - qBx_1)^2 + \alpha_3^2\right] - qEx_1 = \alpha_1;$$

il problema è allora ridotto alla quadratura:

$$W = \int dx_1 \sqrt{2\alpha_1 - \alpha_3^2 + qEx_1 - (\alpha_2 - qBx_1)^2}$$

(b) Seconda questione.

La proiezione del moto lungo l'asse x_3 ha una velocità costante, essendo x_3 ciclica e p_3 conseguentemente costante:

$$p_3 = p_3^0 \qquad x_3 = x_3^0 + p_3^0 t.$$

Rispondendo alla seconda domanda, si ottiene proprio che:

$$\widehat{H}(F) = \left((qB(qBx_1 - p_2) - qE)\frac{\partial}{\partial p_1} - p_1\frac{\partial}{\partial x_1} - (p_2 - qBx_1)\frac{\partial}{\partial x_2} - p_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\left(\frac{x_3^2}{p_3}\right)$$
$$= -2x_3$$
$$\Longrightarrow \widehat{H}^2(F) = 2p_3; \qquad \widehat{H}^3(F) = 0$$

da cui, infine,

$$\frac{x_3^2}{p_3}(t) = \frac{(x_3^0)^2}{p_3^0} - (-2x_3^0)t + \frac{1}{2!}2p_3^0 t^2 = \frac{(x_3^0 + p_3^0 t)^2}{p_3^0}$$

6. La trasformazione di Legendre $\quad p = m\left(\dot{x} - \dfrac{A}{x}\right) \quad$ permette di scrivere la funzione di Lagrange direttamente come

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x} - \frac{A}{x}\right)^2 - \frac{k}{2}x^2$$

sfruttando il fatto che il termine lineare in p si semplifica. Si noti inoltre che, anche se apparentemente il termine lineare in $\dot{x}$ fa presupporre l'esistenza di un potenziale generalizzato, in realtà la lagrangiana espressa nella forma

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\frac{A^2}{x^2} - \frac{k}{2}x^2 + \frac{d}{dt}(-mA\ln x)$$

è gauge-equivalente a quella di una particella che si muove sull'asse Ox soggetta alla forza posizionale

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{i} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{m}{2}\frac{A^2}{x^2} + \frac{k}{2}x^2\right) = -m\frac{A^2}{x^3} - kx$$

La trasformazione è canonica come si può direttamente verificare:

$$[Q,P] = \frac{p^2}{p^2 + \lambda^2 x^2} + \frac{\lambda^2 x^2}{p^2 + \lambda^2 x^2} = 1$$

Invertendo la trasformazione,

$$\lambda^2 x^2 = p^2 \tan^2 Q \Rightarrow p^2 = \frac{2\lambda P}{1 + \tan^2 Q} \Longrightarrow p = \sqrt{2\lambda P}\cos Q; \qquad x = \frac{\sin Q}{\lambda}\sqrt{2\lambda P}$$

Le equazioni del moto sono dunque quelle relative all'hamiltoniana

$$K = \left(\frac{\lambda}{m}\cos^2 Q + \frac{k}{\lambda}\sin^2 Q\right)P + A\lambda \text{ cotan } Q$$

7. (a) Essendo $Q = \beta q; \quad P = \alpha p$, si deduce che, ponendo $H'(Q,P) = H(q,p)$,

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \beta\dot{q} = \beta\frac{\partial H}{\partial p} = \beta\frac{\partial H'(Q,P)}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p} = \alpha\beta\frac{\partial H'(Q,P)}{\partial P} = \frac{\partial K}{\partial P} \\ \dot{P} &= \alpha\dot{p} = -\alpha\frac{\partial H}{\partial q} = -\alpha\frac{\partial H'(Q,P)}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q} = -\alpha\beta\frac{\partial H'(Q,P)}{\partial Q} = -\frac{\partial K}{\partial Q}\end{aligned}$$

La soluzione del problema è

$$K(Q,P) = \alpha\beta H'(Q,P),$$

da cui si vede che le trasformazioni di scala sono <u>canonoidi per tutte le hamiltoniane</u>. In particolare, relativamente al problema in esame,

$$K(Q,P) = \alpha\beta\left(\frac{1}{2}\frac{P^2}{\alpha^2} + V'(Q)\right)$$

(b) Le equazioni di Hamilton implicano:

$$\ddot{Q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial P} = \frac{\beta}{\alpha}\dot{P} = \frac{\beta}{\alpha}\left(-\alpha\beta\frac{\partial V'(Q)}{\partial Q}\right)$$

e la richiesta di simmetria è allora soddisfatta se e solo se:

$$\beta^2\frac{\partial V'(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial V(Q)}{\partial Q}$$

ma questo comporta, a parte una costante additiva,

$$V'(Q) = V\left(\frac{Q}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta^2}V(Q).$$

Dunque, ci sono 2 possibilità:

i. $\beta = 1 \qquad \text{(banale)}$

ii. $V(Q) \propto Q^2$

in quest'ultimo caso, V è una funzione omogenea di grado 2; il sistema è un oscillatore armonico.

8. Le prime due equazioni impongono che H, se esiste, non dipende esplicitamente dalle coordinate, ma solo dai momenti; dunque, comunque, $\beta = 0$. Inoltre, l'integrazione della terza equazione fornisce

$$H = \frac{p_1^2}{2} + p_1 p_2 + C(p_2), \qquad C \text{ funzione arbitraria}$$

Il confronto con l'ultima equazione impone che

$$\alpha = 1, \qquad H = \frac{p_1^2}{2} + p_1 p_2 - p_2^2$$

(a) Dunque, le trasformazioni di Legendre inverse sono

$$p_1 = \frac{1}{3}(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2); \quad p_2 = \frac{1}{3}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$$

ed essendo la funzione di Hamilton quadratica omogenea nelle p, si ha direttamente che

$$\mathscr{L} = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{2}(2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2 - \frac{1}{2}\dot{q}_2^2\right)$$

(b)

$$\frac{dG}{dt} = [G, H] + \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_1} + \lambda(p_1, p_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -(p_1 + p_2)$$

9. La funzione di Lagrange della particella di carica q è

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + qf(x_1)\dot{x}_3;$$

dunque, le trasformazioni di Legendre sono date dalle

$$p_1 = \dot{x}_1; \quad p_2 = \dot{x}_2; \quad p_3 = \dot{x}_3 + qf(x_1).$$

(a) Siccome la funzione di Hamilton è

$$H = \frac{1}{2}(\mathbf{p}^2 - 2qp_3 f(x_1) + q^2 f^2(x_1)),$$

scriveremo l'operatore richiesto come:

$$\widehat{H} = q(qf - p_3)f' \frac{\partial}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - p_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + (qf - p_3)\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

(b) Poiché

$$\widehat{H}(F) = -x_2^0; \quad \widehat{H}^2(F) = p_2^0; \quad \widehat{H}^3(F) = 0,$$

l'evoluzione temporale di F si determina mediante

$$F(x_2(t), p_2(t)) = e^{-t\widehat{H}} F(x_2^0, p_2^0) = \frac{x_2^2(t)}{2p_2(t)} = \frac{(x_2^0)^2}{2p_2^0} + tx_2^0 + \frac{t^2}{2!}p_2^0;$$

tenendo conto che $\widehat{H}(p_2) = 0$ implica che $p_2 = p_2^0$ è costante, si ha infine

$$x_2^2 = (x_2^0 + p_2^0 t)^2 \, .$$

Questo risultato ribadisce un fatto evidente: che la componente del moto lungo l'asse x_2 è uniforme.

10. Ricordiamo che le trasformazioni di punto sono sempre canoniche e che inducono sui momenti le equazioni di trasformazione

$$P_k = p_j \frac{\partial x_j}{\partial Q_k} \qquad p_i = P_l \frac{\partial Q_l}{\partial x_i}$$

dove, per quest'ultima, si fa uso dello Jacobiano della trasformazione diretta:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \alpha\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La canonicità della trasformazione e la sua indipendenza dal tempo garantisce che

$$H(x,p) = K(Q,P) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\alpha}\cos\varphi P_1 - \sin\varphi P_2\right)^2 + (\sin\varphi P_1 + \alpha\cos\varphi P_2)^2 + P_3^2 + \right.$$

$$+\frac{q^2B^2}{4}\left((\alpha\cos\varphi Q_1 + \sin\varphi Q_2)^2 + \left(-\sin\varphi Q_1 + \frac{1}{\alpha}\cos\varphi Q_2\right)^2\right) +$$

$$qB\left(\left(\frac{1}{\alpha}\cos\varphi P_1 - \sin\varphi P_2\right)\left(-\sin\varphi Q_1 + \frac{1}{\alpha}\cos\varphi Q_2\right) - (\alpha\cos\varphi Q_1 + \sin\varphi Q_2)\right)$$

$$\left.(\sin\varphi P_1 + \alpha\cos\varphi P_2)\right].$$

In generale, la trasformazione muta la forma dell'hamiltoniana. Discutiamo comunque due casi particolari:

(a) $\varphi = \frac{\pi}{2}$: le equazioni di trasformazione sono

$$x_1 = Q_2; \quad x_2 = -Q_1; \quad x_3 = Q_3; \qquad p_1 = -P_2; \quad p_2 = P_1; \quad p_3 = P_3$$

$$K = \frac{1}{2}\left[\mathbf{P}^2 + \frac{q^2B^2}{4}(Q_1^2 + Q_2^2) - qB(P_1Q_2 - Q_1P_2)\right]$$

(b) $\alpha = 1$: la trasformazione è una rotazione piana: ovviamente i termini quadratici si conservano; d'altra parte

$$p_1x_2 - x_1p_2 = (P_1Q_2 - Q_1P_2)\cos 2\varphi - (Q_1P_1 + Q_2P_2)\sin 2\varphi$$

11. La trasformazione lineare sulle equazioni dell'oscillatore armonico di massa unitaria

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}q^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \dot{q} = \dfrac{p}{m} \\ \\ \dot{p} = -kq \end{cases}$$

comporta, in generale,

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \alpha\frac{\partial H}{\partial p} - \beta\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\alpha}{m}p - \beta k q = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\alpha}{m}(-\gamma Q + \alpha P) - \beta k(\delta Q - \beta P)\right] \\ \dot{P} &= \gamma\frac{\partial H}{\partial p} - \delta\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\gamma}{m}p - \delta k q = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\gamma}{m}(-\gamma Q + \alpha P) - \delta k(\delta Q - \beta P)\right]\end{aligned}$$

Dunque, infine, ci chiediamo se esiste una hamiltoniana K che soddisfa contemporaneamente le relazioni

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= -\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\alpha\gamma}{m} + \beta\delta k\right)Q + \frac{1}{\Delta}\left(\beta^2 k + \frac{\alpha^2}{m}\right)P = \frac{\partial K}{\partial P} \\ \dot{P} &= -\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\gamma^2}{m} + \delta^2 k\right)Q + \frac{1}{\Delta}\left(\beta\delta k + \frac{\alpha\gamma}{m}\right)P = -\frac{\partial K}{\partial Q}\end{aligned}$$

La risposta evidentemente è sempre affermativa, in quanto, senza condizioni sui coefficienti della trasformazione, le relazioni sono soddisfatte da

$$K = \frac{1}{\Delta}\left(\beta^2 k + \frac{\alpha^2}{m}\right)\frac{P^2}{2} + \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\gamma^2}{m} + \delta^2 k\right)\frac{Q^2}{2} - \frac{1}{\Delta}\left(\beta\delta k + \frac{\alpha\gamma}{m}\right)QP$$

In quanto alla canonicità, l'unica condizione sui coefficienti è, naturalmente,

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

12.

Essendo $\quad \widehat{H} = -2\frac{\partial}{\partial p_y} - (p_x - p_y)\frac{\partial}{\partial x} - (2p_y - p_x)\frac{\partial}{\partial y},$

	$\widehat{H}$	$\widehat{H}^2$	$\widehat{H}^3$
x	$-(p_x - p_y)$	-2	0
y	$-(2p_y - p_x)$	4	0
p_x	0	0	0
p_y	-2	0	0

e, dunque,

$$\begin{aligned}x(t) &= x^0 + (p_x^0 - p_y^0)t - t^2 \\ y(t) &= y^0 + (2p_y^0 - p_x^0)t + 2t^2 \\ p_x(t) &= p_x^0 \\ p_y(t) &= p_y^0 + 2t\end{aligned}$$

La trasformazione è di punto e, come è noto dalla teoria, la funzione generatrice è della forma $F_2 = Q_k(q,t)P_k$, cioè

$$F_2(x,y,P_X,P_Y) = xP_X + \frac{1}{2}(x+y)P_Y \Longrightarrow \begin{cases} p_x = P_X + \dfrac{1}{2}P_Y \\ \\ p_y = \dfrac{1}{2}P_Y \end{cases}$$

Siccome $y = 2Y - X$, si ha che

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\left(P_X + \frac{1}{2}P_Y\right)^2 + \frac{1}{4}P_Y^2 - \frac{1}{2}P_Y\left(P_X + \frac{1}{2}P_Y\right) - 2(2Y - X) \\ &= \frac{P_X^2}{2} + \frac{P_Y^2}{8} - 4Y + 2X \end{aligned}$$

Conseguentemente,

$$[p_x, K] = -\frac{\partial K}{\partial X} - \frac{1}{2}\frac{\partial K}{\partial Y} = 0,$$

come c'era da aspettarsi, in quanto nella precedente descrizione hamiltoniana p_x era il momento coniugato a una variabile ciclica.

13. La condizione sulla parentesi fondamentale di Poisson

$$[Q,P] = -\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{q^2}{2}\frac{df}{dq} = 1,$$

impone che la trasformazione abbia la forma

$$Q = \frac{1}{2}q^2 p; \quad P = \frac{2}{q} \qquad \longleftrightarrow \qquad q = \frac{2}{P}; \quad p = \frac{QP^2}{2}$$

Se viene applicata alla particella (di massa unitaria) libera, otteniamo

$$H = \frac{p^2}{2} = K = \frac{Q^2P^4}{8}.$$

La funzione $p = \dfrac{QP^2}{2}$ genera la trasformazione infinitesima

$$\delta Q = \epsilon QP; \qquad \delta P = -\epsilon\frac{P^2}{2}$$

che comporta (essendo la trasformazione indipendente dal tempo) la seguente variazione in forma dell'hamiltoniana:

$$\delta K = \frac{\partial K}{\partial Q}\delta Q + \frac{\partial K}{\partial P}\delta P = \frac{QP^4}{4}\epsilon QP + \frac{Q^2P^3}{2}(-\epsilon)\frac{P^2}{2} = 0.$$

Questo risultato equivale a confermare che la quantità di moto di una particella libera è una costante del moto.

14. Per le trasformazioni di punto vale la regola

$$p_j = \frac{\partial Q_k}{\partial q_j} P_k$$

che diventa, nel caso delle coordinate polari

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial \rho}{\partial x} P_\rho + \frac{\partial \theta}{\partial x} P_\theta = \cos\theta P_\rho - \frac{\sin\theta}{\rho} P_\theta \\ p_y &= \frac{\partial \rho}{\partial y} P_\rho + \frac{\partial \theta}{\partial y} P_\theta = \sin\theta P_\rho + \frac{\cos\theta}{\rho} P_\theta \end{aligned}$$

Siccome

$$F = -\frac{dV}{dr} \Longrightarrow V = e^{-r} + r,$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_\rho^2 + \frac{P_\theta^2}{\rho^2}\right) + e^{-r} + r$$

e l'equazione di H-J è dunque, ià in forma separata,

$$\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 = r^2 \left[2m(\alpha_1 - e^{-r} - r) - \left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2\right] = \alpha_2$$

dove $\alpha_1 = E$.

15. La forza è derivabile da un potenziale, anche se il sistema non è conservativo,a causa della dipendenza esplicita di k dal tempo. Quindi, semplicemente,

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right).$$

Si noti che la funzione di hamilton è costituita da due hamiltoniane separate, ciascuna delle quali descrive il moto di un oscillatore con frequenza dipendente dal tempo e soggetto a una forza centrale.

La funzione G genera la trasformazione canonica infinitesima:

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta\lambda \frac{\partial G}{\partial p_x} = \delta\lambda 2y(yp_x - xp_y) \\ \delta y &= \delta\lambda \frac{\partial G}{\partial p_y} = -\delta\lambda 2x(yp_x - xp_y) \\ \delta p_x &= -\delta\lambda \frac{\partial G}{\partial x} = -\delta\lambda \left(\frac{2\alpha}{x^3 y^2}(x^4 - y^4) + 2p_y(xp_y - yp_x)\right) \\ \delta p_y &= -\delta\lambda \frac{\partial G}{\partial y} = -\delta\lambda \left(\frac{2\alpha}{x^3 y^2}(y^4 - x^4) - 2p_x(xp_y - yp_x)\right) \end{aligned}$$

La verifica dell'invarianza di H può essere fatta per sostituzione diretta o, facendo riferimento al teorema di Noether, mostrando che

$$[G, H] + \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

16. La trasformazione di Legendre, diretta e inversa, è data da:

$$p = \dot{x}e^{f(x)} \quad \longleftrightarrow \quad \dot{x} = pe^{-f(x)},$$

per cui

$$H = \frac{p^2}{2}e^{-f(x)} \Longrightarrow \widehat{H} = -\frac{df}{dx}\frac{p^2}{2}e^{-f(x)}\frac{\partial}{\partial p} - pe^{-f(x)}\frac{\partial}{\partial x}.$$

(a) Essendo $\widehat{G} = \dfrac{df}{dx}\dfrac{\partial}{\partial p} + \dfrac{2}{p}\dfrac{\partial}{\partial x}$, con pochi passaggi si mostra che per ogni funzione $F(x,p)$ definita sullo spazio delle fasi, si ha

$$[\widehat{H},\widehat{G}]F(x,p) = \widehat{H}\left(\frac{df}{dx}\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{2}{p}\frac{\partial F}{\partial x}\right) - \widehat{G}\left(-\frac{df}{dx}\frac{p^2}{2}e^{-f(x)}\frac{\partial F}{\partial p} - pe^{-f(x)}\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0.$$

Si poteva però osservare che

$$G = \ln\left(e^{f(x)}\right) - 2\ln p = -\ln\left(p^2 e^{-f(x)}\right) = -\ln 2H;$$

conseguentemente,

$$\widehat{G} = -\frac{1}{H}\widehat{H}$$

e la commutazione è subito evidente:

$$[\widehat{H},\widehat{G}]F(x,p) = \widehat{H}\left(-\frac{1}{H}\widehat{H}(F)\right) + \frac{1}{H}\widehat{H}(\widehat{H}(F)) = 0.$$

(b) Al primo ordine di approssimazione, essendo

$$\widehat{H} = -\frac{df}{dx}e^{-f}\frac{p^2}{2}\frac{\partial}{\partial p} - pe^{-f}\frac{\partial}{\partial x},$$

$$p(t) = e^{-t\widehat{H}}p_0 = p_0 - t\widehat{H}(p)\Big|_{t=0} = p_0 + \frac{df}{dx}e^{-f}\frac{p_0^2}{2}t$$

È evidente che scegliendo la funzione identità $f(x) = x$, si ottiene

$$\widehat{H}(p) = -\frac{p^2}{2}e^{-x} = -H;$$

dunque, il termine del second'ordine è identicamente nullo, cosí come tutti i termini di ordine superiore. Ciò comporta che l'evoluzione temporale del momento è completamente stabilita dalla legge

$$p(t) = p_0 + Ht$$

che mette in rilievo l'andamento lineare nel tempo.
Osservazione: quando f è la funzione identità, il moto è determinato separando le variabili in

$$\dot{x} = (p_0 + Ht)e^{-x}:$$

$$x(t) = \ln\left(p_o t + \frac{Ht^2}{2} + C\right).$$

17. La trasformazione è di punto, per cui

$$P_i = \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_i};$$

Equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

La funzione generatrice è dunque

$$F_2 = y_i P_i = (x_1\cos\omega t + x_2\sin\omega t)P_1 + (-x_1\sin\omega t + x_2\cos\omega t)P_2$$

e, inoltre,

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = \omega(-x_1\sin\omega t + x_2\cos\omega t)P_1 - \omega(x_1\cos\omega t + x_2\sin\omega t)P_2 = \omega(y_2P_1 - y_1P_2).$$

Nelle nuove coordinate, la funzione di Hamilton è

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{\mathbf{P}^2}{2} + V(\sqrt{y_1^2+y_2^2}) + \omega(y_2P_1 - y_1P_2),$$

in quanto

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2; \qquad x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2.$$

Evidentemente $\dfrac{\partial K}{\partial t} = 0$; se ne conclude che K si conserva durante il moto.

18. Le trasformazioni a coordinate polari sono di punto: per ogni funzione di Lagrange,

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \dot\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \dot\theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} = p_\rho\cos\theta - p_\theta\frac{\sin\theta}{\rho} \\ p_y &= \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \dot\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \dot\theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} = p_\rho\sin\theta + p_\theta\frac{\cos\theta}{\rho} \end{aligned}$$

Conseguentemente, essendo la trasformazione indipendente dal tempo, la nuova hamiltoniana è

$$K = \frac{p_\rho^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2\rho^2} + \frac{k^2}{2\rho^2} + \frac{kp_\theta}{\rho^2}$$

Indicando con α_1 il valore costante dell'hamiltoniana, l'equazione di H-J è

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{2\rho^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{k^2}{2\rho^2} + \frac{k}{\rho^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right) = \alpha_1$$

che è in linea di principio separabile, in quanto

$$\rho^2\left(\frac{\partial W_\rho}{\partial \rho}\right)^2 + k^2 - 2\alpha_1\rho^2 = \alpha_2 = -\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 - 2k\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right),$$

da cui

$$W_\rho = \int \sqrt{\frac{\alpha_2 - k^2}{\rho^2} + 2\alpha_1 d\rho}$$

$$W_\theta = \int (-k \pm \sqrt{k^2 - \alpha_2}) d\theta$$

19. La trasformazione di Legendre comporta in questo caso:

$$p = \dot{x} + \frac{df}{dx} \qquad \text{e} \qquad H = \frac{1}{2}\left(p - \frac{df}{dx}\right)^2 .$$

Le equazioni di Hamilton sono allora

$$\begin{cases} \dot{x} = p - \dfrac{df}{dx} \\ \\ \dot{p} = \left(p - \dfrac{df}{dx}\right)\dfrac{d^2 f}{dx^2} \end{cases}$$

(a) Prima questione.
Le equazioni differenziali nelle nuove variabili sono

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{\partial Q}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial Q}{\partial p}\dot{p} = 1 \cdot \dot{x} + 0 \cdot \dot{p} = p - \frac{df}{dx} = \sqrt{P} \\ \dot{P} &= \frac{d}{dt}(2H) = 0. \end{aligned}$$

Queste equazioni sono sicuramente canoniche, in quanto

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \sqrt{P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{2}{3}P^{\frac{3}{2}}\right) \\ \dot{P} &= 0 = -\frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{2}{3}P^{\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

La trasformazione è dunque canonoide rispetto a H.

(b) Seconda questione.
Poiché non c'è modo di rendere uguale a 1 la parentesi fondamentale di Poisson

$$[Q, P] = 2\left(p - \frac{df}{dx}\right),$$

possiamo affermare che sicuramente la trasformazione non è canonica.

20. (a) La condizione di integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial x}(Fp + (a-1)x) = -\frac{\partial}{\partial p}\left(-F\frac{dG}{dx}\right)$$

impone che

$$a = 1,$$

inoltre la funzione di Hamilton è evidentemente

$$H = F(t)\left(\frac{p^2}{2} + G(x)\right).$$

(b) Benché la funzione di Hamilton dipenda esplicitamente dal tempo, l'equazione di H-J

$$F\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + G\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

è a variabili separabili: infatti, indicando con $S(x,t,\alpha) = W_x(x,\alpha) + W_t(t,\alpha)$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_x}{\partial x}\right)^2 + G &= \alpha\\ -\frac{1}{F}\frac{\partial W_t}{\partial t} &= \alpha\end{aligned}$$

La soluzione sarà del tipo

$$S = \int\sqrt{2(\alpha - G(x))}dx - \alpha\int F(t)dt$$

e le equazioni della trasformazione canonica:

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = \sqrt{2(\alpha - G(x))}; \qquad \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int\frac{1}{\sqrt{2(\alpha - G(x))}}dx - \int F(t)dt.$$

21. Tenendo conto delle equazioni del moto, si ha

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= p = \sqrt{P + f(Q)} = \frac{\partial}{\partial P}\left[\frac{2}{3}(P + f(Q))^{3/2}\right]\\ \dot{P} &= -\frac{df}{dq}p = -\frac{df}{dQ}\sqrt{P + f(Q)} = -\frac{\partial}{\partial Q}\left[\frac{2}{3}(P + f(Q))^{3/2}\right]\end{aligned}$$

da cui si deduce

$$K = \frac{2}{3}(P + f(Q))^{3/2}$$

si noti che

$$[Q, P] = 2p \Longrightarrow \quad \text{trasf. non canonica.}$$

L'equazione (ridotta) di Hamilton-Jacobi è

$$\frac{2}{3}\left(\frac{\partial W}{\partial Q} + f(Q)\right)^{3/2} = \alpha.$$

Si deduce dunque che

$$\frac{\partial W}{\partial Q} = C - f(Q) \Longrightarrow W = \int (C - f(Q))dQ$$

essendo $C = \left(\frac{3}{2}\alpha\right)^{2/3}$ il nuovo momento costante. Dalla teoria,

$$S = W - \frac{2}{3}C^{3/2}t \Longrightarrow \beta = \frac{\partial S}{\partial C} = \int dQ - \sqrt{C}t$$

Imponendo le condizioni iniziali

$$Q(0) = q_0; \quad P(0) = p_0^2 - f(q_0),$$

si ottiene per le coordinate costanti

$$\beta = q_0 \qquad C = P(0) = p_0^2.$$

Il moto è dunque individuato da

$$Q(t) = q_0 + p_0 t.$$

22. Siccome la Lagrangiana del sistema è

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) - \dot{\theta}\rho,$$

la variabile θ è ciclica, e dalla teoria si ottiene che

$$P_\theta = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}} = \alpha = m\rho^2\dot{\theta} - \rho \Longrightarrow \dot{\theta} = \frac{\alpha}{m\rho^2} + \frac{1}{m\rho}$$

La funzione di Routh per questo sistema è

$$R = \mathscr{L} - \dot{\theta}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 - \frac{m}{2}\rho^2\left(\frac{\alpha}{m\rho^2} + \frac{1}{m\rho}\right)^2$$

La corrispondente funzione di hamilton è

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\alpha}{\rho} + 1\right)^2$$

da cui segue l'equazione di H-J

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{\alpha}{\rho} + 1\right)^2 = \beta$$

β essendo il valore costante della funzione di Hamilton. Il sistema è ridotto alle quadrature.

23. Come è noto, la funzione di Lagrange per questo sistema è, in coordinate cartesiane,

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e\frac{B}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y). \tag{2}$$

Dunque, in coordinate cilindriche si ha

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + e\frac{B}{2}\rho^2\dot{\theta} \tag{3}$$

La trasformazione di Legendre si effettua tramite

$$p_\rho = m\dot{\rho}, \quad p_\theta = m\rho^2\dot{\theta} + \frac{eB}{2}\rho^2, \quad p_z = m\dot{z}$$

Conseguentemente la funzione di Hamilton è

$$H = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m\rho^2} - \frac{eB}{2m}p_\theta + \frac{e^2B^2}{8m}\rho^2 + \frac{p_z^2}{2m}$$

Le funzioni generatrici delle rotazioni piane e delle traslazioni nella direzione del campo sono rispettivamente

$$\delta\theta = \delta\theta\frac{\partial L}{\partial p_\theta} \Longrightarrow L = p_\theta,$$

$$\delta z = \epsilon = \epsilon\frac{\partial P}{\partial p_z} \Longrightarrow P = p_z$$

Dunque, gli operatori richiesti sono

$$\begin{aligned}
\widehat{H} &= \left(\frac{e^2B^2}{4m}\rho - \frac{1}{m\rho^3}\right)\frac{\partial}{\partial p_\rho} - \frac{p_\rho}{m}\frac{\partial}{\partial\rho} - \left(\frac{p_\theta}{m\rho^2} - \frac{eB}{2m}\right)\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{p_z}{m}\frac{\partial}{\partial z} \\
\widehat{L} &= -\frac{\partial}{\partial\theta} \\
\widehat{P} &= -\frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

I commutatori si annullano tutti, perché l'effetto della commutazione degli operatori si riduce a invertire l'ordine di derivazione nelle derivate seconde; per i primi due casi ciò è dovuto al fatto che θ e z sono variabili cicliche. Infatti, per esempio, per ogni funzione $f(q,p)$ definita sullo spazio delle fasi,

$$\widehat{L}(\widehat{H}(f)) = -\left(\frac{e^2B^2}{4m}\rho - \frac{1}{m\rho^3}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial p_\rho} + \frac{p_\rho}{m}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\rho} + \left(\frac{p_\theta}{m\rho^2} - \frac{eB}{2m}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{p_z}{m}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial z}$$

ed è facile vedere che lo stesso risultato si ottiene a fattori invertiti. Piú semplice ancora è verificare che

$$\widehat{L}(\widehat{P}(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial z} = \widehat{P}(\widehat{L}(f))$$

24. La forza è conservativa, non sono presenti vincoli reonomi, e dunque si ha che

$$H = T - U = \frac{1}{2}\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}p_\theta^2\right) - \frac{\cos\theta}{\rho^2}.$$

(a) La trasformazione (1) è canonica, in quanto generata dalla funzione

$$G = \frac{1}{2}p_\theta^2 - \ cos\theta;$$

essa genera una simmetria di H:

$$\delta H = \frac{1}{\rho^2}p_\theta \delta p_\theta + \frac{1}{\rho^2}\sin\theta\delta\theta = 0.$$

Alla stessa conclusione si poteva pervenire, tenendo conto del teorema di Noether e osservando che

$$\frac{dG}{dt} = [G, H] = 0.$$

(b) dalla definizione di operatore hamiltoniano, si ha nei tre casi richiesti

$$\begin{aligned}
\widehat{G} &= \sin\theta\frac{\partial}{\partial p_\theta} - p_\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \\
\widehat{H} &= \frac{1}{\rho^3}(2\cos\theta - p_\theta^2)\frac{\partial}{\partial p_\rho} + \frac{\sin\theta}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial p_\theta} - p_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{p_\theta}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta} \\
\widehat{p_\rho} &= -\frac{\partial}{\partial\rho}
\end{aligned}$$

Mediante questi, si possono eseguire le verifiche richieste:

$$[\widehat{G}, \widehat{p_\rho}](f) = -\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial p_\theta} - p_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial p_\theta} - p_\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
[\widehat{H}, \widehat{p_\rho}](f) = -&\left(\frac{1}{\rho^3}(2\cos\theta - p_\theta^2)\frac{\partial}{\partial p_\rho} + \frac{\sin\theta}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial p_\theta} - p_\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{p_\theta}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\partial f}{\partial\rho} + \\
&+\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho^3}(2\cos\theta - p_\theta^2)\frac{\partial f}{\partial p_\rho} + \frac{\sin\theta}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial p_\theta} - p_\rho\frac{\partial f}{\partial\rho} - \frac{p_\theta}{\rho^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) \\
&= -\frac{3}{\rho^4}(2\cos\theta - p_\theta^2)\frac{\partial f}{\partial p_\rho} - \frac{2\sin\theta}{\rho^3}\frac{\partial f}{\partial p_\theta} + \frac{2p_\theta}{\rho^3}\frac{\partial f}{\partial\theta}
\end{aligned}$$

Quest'ultimo risultato è evidentemente diverso da zero per una generica funzione f.

25. La funzione generatrice deve essere evidentemente di tipo F_2 o F_3, in quanto deve necessariamente essere variabile indipendente o il vecchio momento o il nuovo. Abbiamo dunque che

$$P = -\frac{\partial F_3}{\partial X} = \frac{1}{p} \Longrightarrow F_3 = -\frac{X}{p} + \lambda(p)$$

con λ funzione arbitraria. Siccome deve essere soddisfatta anche la

$$x = -\frac{\partial F_3}{\partial p} = -\frac{X}{p^2} - \frac{d\lambda}{dp},$$

la nuova Hamiltoniana è della forma

$$K = H(x(X,P), p(X,P)) = \frac{1}{2P^2} + XP^2 + \frac{d\lambda}{dp}.$$

Dunque, per i requisiti richiesti deve essere

$$\frac{d\lambda}{dp} = -\frac{1}{2}p^2 \Longrightarrow \lambda = -\frac{p^3}{6},$$

per cui la funzione cercata è

$$F_3 = -\frac{X}{p} - \frac{p^3}{6}.$$

✯ ✯

Se si fosse scelto lo schema 2, i conti erano analoghi:

$$F_2 = \frac{x}{P} + \mu(P); \qquad X = -\frac{x}{P^2} + \frac{d\mu}{dP}$$

$$K = \frac{1}{2P^2} + P^2\left(X - \frac{d\mu}{dP}\right) \Longrightarrow \mu = -\frac{1}{6}\frac{1}{P^3}$$

e, infine,

$$F_2(x,P) = \frac{x}{P} - \frac{1}{6}\frac{1}{P^3}$$

26. La trasformazione è canonica in quanto generata dalla funzione

$$G = \frac{p_\theta^2}{2} + f(\theta) + tp_z - z$$

Conseguentemente, si ha per la variazione in forma di

$$H = \frac{1}{2}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} + p_z^2\right) + \frac{f(\theta)}{\rho^2} - g(z),$$

$$\Delta H = \epsilon\left([G,H] + \frac{\partial G}{\partial t}\right) = \epsilon t \frac{dg}{dz}$$

dove abbiamo fatto uso del teorema di Noether. Allora abbiamo che

$$\Delta H = 0 \Longleftrightarrow g(z) = \text{ costante}$$

Naturalmente si poteva ottenere lo stesso risultato con un calcolo diretto della variazione in forma:

$$\Delta H = K(\mathbf{Z}) - H(\mathbf{Z}) = H(\mathbf{z}) + \epsilon\frac{\partial G}{\partial t} - H(\mathbf{Z}) =$$

$$\frac{1}{2}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} + p_z^2\right) + \frac{f(\theta)}{\rho^2} - g(z) + \epsilon p_z - \frac{1}{2}\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(p_\theta - \epsilon\frac{df}{d\theta}\right)^2 + (p_z+\epsilon)^2\right) - \frac{f(\theta+\epsilon p_\theta)}{\rho^2} + g(z+\epsilon t)$$

Dunque, al primo ordine di approssimazione, dove

$$f(\theta + \epsilon p_\theta) = f(\theta) + \epsilon p_\theta \frac{df}{d\theta} \qquad \text{e} \qquad g(z+\epsilon t) = g(z) + \epsilon t \frac{dg}{dz},$$

$$\Delta H = \epsilon t \frac{dg}{dz}$$

27. La trasformazione è canonica in quanto generata dalla funzione

$$F_2 = tqP$$

Dalla teoria delle trasformazioni canoniche, abbiamo che

$$K(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = t^2\frac{P^2}{2} - \frac{1}{t}QP + \frac{Q}{t}P$$

La corrispondente equazione di Hamilton Jacobi è

$$t^2\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

In questo caso, il tempo non è una variabile ciclica, ma lo è Q. Dunque, la separazione delle variabili porta a

$$\left(\frac{\partial W_Q}{\partial Q}\right)^2 = \alpha^2 = -\frac{1}{t^2}\frac{\partial W_t}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow W_Q = \alpha Q; W_t = -\alpha^2\frac{t^3{}'}{3}$$

28. La trasformazione è di punto e, dunque generata dalla funzione

$$F_2 = Q(q,t)P = \frac{q^2}{2at}P$$

Come sappiamo, la trasformazione dei momenti è indotta da quella delle coordinate. Infatti,

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{qP}{at} = \frac{\sqrt{2atQ}}{at}P.$$

Dalla teoria delle trasformazioni canoniche, abbiamo che

$$K(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{P^2}{2} - atQ,$$

essendo

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = -\frac{q^2}{2at^2}P = \frac{QP}{t}.$$

La corrispondente equazione di Hamilton Jacobi è

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial Q}\right)^2 - atQ + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Sostituendo l'espressione proposta, si ottiene

$$\frac{1}{2}(\alpha + bt^2)^2 - atQ - 2btQ + \frac{d\lambda}{dt} = 0$$

Dunque, prima di tutto deve essere

$$b = \frac{1}{2}a$$

Infine, si ottiene, come condizione su λ

$$-\lambda = \frac{1}{2}\alpha^2 t + \frac{1}{6}a\alpha t^3 + \frac{1}{40}a^2 t^5.$$

Dalle equazioni di trasformazione, si ha

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{\partial S}{\partial \alpha} = Q - \alpha t - \dfrac{1}{6}at^3 \\[2ex] P = \dfrac{\partial S}{\partial Q} = \dfrac{1}{2}at^2 + \alpha \end{cases}$$

Indicando con Q_0 e P_0 le condizioni iniziali, si ha conseguentemente che $\beta = Q_0$, $\alpha = P_0$,

$$\Longrightarrow \begin{cases} Q = Q_0 + P_0 t + \dfrac{1}{6}at^3 \\[2ex] P = P_0 + \dfrac{\partial S}{\partial Q} = \dfrac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

che rappresentano la soluzione del problema meccanico.

29. L'equivalenza delle due lagrangiane è dovuta al fatto che

$$\nabla \times \left[\frac{qB}{2}(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1)\right] = \nabla \times [q(f(x_1)\mathbf{e}_1 + Bx_1\mathbf{e}_2)]$$

cioè che il rotore dei due potenziali vettori dà lo stesso campo magnetico $\mathbf{B}$.

Le trasformazioni di Legendre sono, rispettivamente,

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial \mathscr{L}_1}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 - \dfrac{qB}{2}x_2; \\[2ex] p_2 = \dfrac{\partial \mathscr{L}_1}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 + \dfrac{qB}{2}x_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} P_1 = \dfrac{\partial \mathscr{L}_2}{\partial \dot{x}_1} = m\dot{x}_1 + qf(x_1); \\[2ex] P_2 = \dfrac{\partial \mathscr{L}_2}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 + qBx_1; \end{cases}$$

Usando queste relazioni si può prima di tutto verificare che le equazioni di Lagrange portano alle medesime equazioni differenziali

$$\ddot{x}_1 = \frac{qB}{m}\dot{x}_2; \qquad \ddot{x}_2 = -\frac{qB}{m}\dot{x}_1$$

da cui è evidente che G è una costante del moto indipendentemente dalla scelta della lagrangiana:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial G}{\partial \dot{x}_i}\ddot{x}_i = (m\dot{x}_2 + qBx_1)\dot{x}_1 - (m\dot{x}_1 - qBx_2)\dot{x}_2 - mx_2\ddot{x}_1 + mx_1\ddot{x}_2 = 0.$$

Passando alla descrizione hamiltoniana mediante le trasformazioni di Legendre inverse

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{p_1}{m} + \dfrac{qB}{2m}x_2; \\ \\ \dot{x}_2 = \dfrac{p_2}{m} - \dfrac{qB}{2m}x_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{P_1}{m} - \dfrac{q}{m}f(x_1); \\ \\ \dot{x}_2 = \dfrac{P_2}{m} - \dfrac{qB}{m}x_1; \end{cases}$$

otteniamo le due corrispondenti hamiltoniane:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{2m}\left[p_1^2 + p_2^2 + \frac{q^2B^2}{4}(x_1^2 + x_2^2) + qB(p_1x_2 - x_1p_2)\right] \\ H_2 &= \frac{1}{2m}[P_1^2 + P_2^2 + q^2(f^2 + B^2x_1^2) - 2q(fP_1 + Bx_1P_2)] \end{aligned}$$

Inoltre, le due trasformazioni di Legendre, si riflettono in modo diverso sulla funzione G:

$$\begin{aligned} G_1(x,p) &= x_1p_2 - x_2p_1 \\ G_2(x,P) &= x_1P_2 - x_2P_1 + \frac{qB}{2}(x_2^2 - x_1^2) + qf(x_1)x_2 \end{aligned}$$

Per rispondere alla domanda, richiamiamo il teorema di Noether: G_i generano simmetrie se sono costanti del moto. È noto dalle lezioni del corso che

$$[G_1, H_1] = 0.$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} m[G_2, H_2] &= (P_2 - qBx_1 + qf'x_2)(P_1 - qf) + (-P_1 + qBx_2 + qf)(P_2 - qBx_1) \\ &\quad -(-x_2)(q^2B^2x - 1 + q^2ff' - qf'P_1 - qBP_2) = 0 \end{aligned}$$

30. La trasformazione dalle coordinate cilindriche a quelle ellissoidali

$$\rho = a\sinh v \sin u \qquad \phi = \phi \qquad z = a\cosh v \cos u$$

trasforma l'energia cinetica nel seguente modo:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) =$$

$$\frac{ma^2}{2}[(\dot{v}\cosh v \sin u + \dot{u}\sinh v \cos u)^2 + \sinh^2 v \sin^2 u \dot{\phi}^2 + (\dot{v}\sinh v \cos u - \dot{u}\cosh v \sin u)^2] =$$

$$\frac{ma^2}{2}[(\sinh^2 v + \sin^2 u)(\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + \sinh^2 v \sin^2 u \dot{\phi}^2].$$

L'energia cinetica è quadratica e omogenea nelle velocità generalizzate, dunque si ha immediatamente

$$H = \frac{1}{2ma^2(\sinh^2 v + \sin^2 u)}\left[p_v^2 + p_u^2 + \left(\frac{1}{\sinh^2 v} + \frac{1}{\sin^2 u}\right)p_\phi^2\right] + V(u, v, \phi).$$

Se scegliamo come energia potenziale

$$V(u, v) = \frac{f(v) + g(u)}{\sinh^2 v + \sin^2 u}, \qquad f, g \text{ funzioni arbitrarie}$$

l'equazione di Hamilton-Jacobi per l'hamiltoniana sopra ricavata, diviene

$$\frac{1}{2ma^2(\sinh^2 v + \sin^2 u)}\left[\left(\frac{\partial W_v}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_u}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sinh^2 v} + \frac{1}{\sin^2 u}\right)\left(\frac{\partial W_\phi}{\partial \phi}\right)^2\right] + \frac{f(v) + g(u)}{\sinh^2 v + \sin^2 u} = E$$

ϕ è evidentemente una variabile ciclica, per cui $W_\phi = \beta_1\phi$, e l'equazione di H-J si separa nelle v, u come segue:

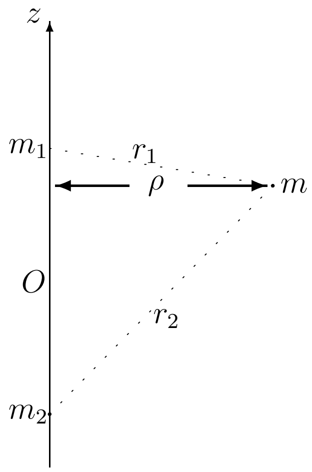
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2ma^2}\left[\left(\frac{\partial W_v}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{\sinh^2 v}\beta_1^2\right] + f(v) - E\sinh^2 v &= \beta_2 \\
-\frac{1}{2ma^2}\left[\left(\frac{\partial W_u}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 u}\beta_1^2\right] - g(u) + E\sin^2 u &= \beta_2
\end{aligned}$$

Infine, la soluzione dell'equazione di H-J si può scrivere come:

$$S = -Et + \beta_1\phi + \int dv\sqrt{2ma^2(\beta_2 + E\sinh^2 v - f(v)) - \frac{\beta_1^2}{\sinh^2 v}} +$$

$$\int du\sqrt{2ma^2(-\beta_2 + E\sin^2 u - g(u)) - \frac{\beta_1^2}{\sin^2 u}}$$

Venendo alla seconda domanda, dette m_1 e m_2 le masse fisse sull'asse z,



Siano, rispettivamente, a e $-a$ le quote di m_1 e m_2, si ha che

$$r_1^2 = (a-z)^2 + \rho^2, \qquad r_2^2 = (z+a)^2 + \rho^2$$

Se G è la costante gravitazionale, si ha allora che l'energia potenziale del sistema è

$$V = -Gm\left(\frac{m_1}{\sqrt{(a-z)^2+\rho^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{(a+z)^2+\rho^2}}\right).$$

Nelle coordinate ellissoidali, tale funzione si esprime come:

$$V(u,v) = -\frac{Gm}{a}\left(\frac{m_1}{\cosh v - \cos u} + \frac{m_2}{\cosh v + \cos u}\right) = -\frac{Gm}{a}\frac{m_1(\cosh v + \cos u) + m_2(\cosh v - \cos}{\cosh^2 v - \cos^2 u}$$

vale a dire,

$$V = -\frac{Gm}{a}\left[\frac{(m_1+m_2)\cosh v + (m_1-m_2)\cos u}{\sinh^2 v + \sin^2 u}\right].$$

È allora facile ridurre alle quadrature questo problema, sfruttando la separazione di variabili precedente, scegliendo

$$f(v) = -\frac{Gm}{a}(m_1+m_2)\cosh v \quad \text{e} \quad g(u) = -\frac{Gm}{a}(m_1-m_2)\cos u.$$