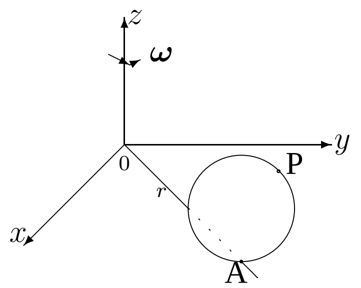
I

Una guida circolare di massa m e raggio R è saldata alla retta orizzontale $0r$ nel punto A. La guida può ruotare liberamente in un piano verticale passante per A e perpendicolare alla retta $0r$. Un punto P di massa m si muove liberamente e senza attrito sulla guida. Sapendo che la retta $0r$ ruota con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$ attorno all'asse verticale $0z$, si ricavi la funzione di Lagrange del sistema.

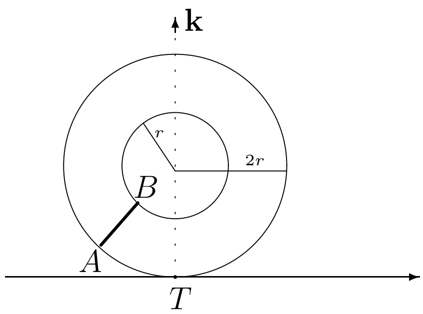


II

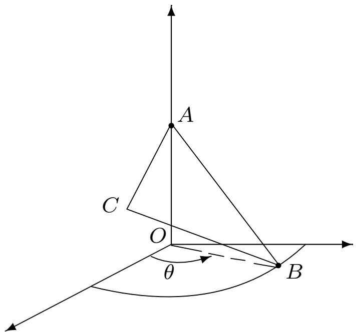
Un'asta omogenea, lunga $2L$ e di massa m, è vincolata a ruotare attorno all'asse orizzontale OX, restando parallela a esso e orizzontale, in modo che tutti i punti dell'asta siano a distanza L da tale asse; l'asse OX, a sua volta può ruotare nel piano orizzontale Oxy attorno all'asse verticale Oz. Si scriva la funzione di Lagrange per il sistema.

III

Un disco di massa m e di raggio $2r$ è cavo e, come illustrato in figura, la porzione mancante è un disco concentrico di raggio r. Il centro di massa del disco è vincolato a restare fisso nello spazio, cosí come il punto di tangenza T: l'unico movimento possibile del disco è quello di rotazione attorno all'asse verticale $\mathbf{k}$. Gli estremi A e B di un'asta lunga r e di massa m sono vincolati a muoversi sui bordi (rispettivamente esterno e interno) del disco cavo. Si trovi la funzione di Lagrange del sistema.



IV



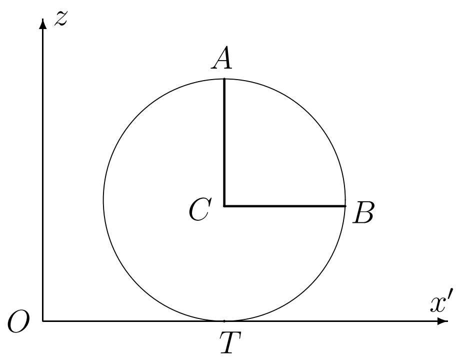
Una lamina omogenea e pesante, ha la forma di un triangolo rettangolo isoscele, i cui cateti misurano a. Nella figura, l'ipotenusa è il lato $\overline{AB}$. La lamina si muove soggetta ai seguenti vincoli:

① *Il vertice A è fisso sull'asse verticale;*

② *il vertice B descrive, nel piano orizzontale, una circonferenza con centro nell'origine e raggio a.*

Sapendo che la lamina ha massa m, si scriva la funzione di Lagrange del sistema.

V



Un anello omogeneo di massa m e raggio r può ruotare attorno a un asse orizzontale Ox' mantenendo fisso su tale asse il punto di tangenza T. Due aste AC e CB, di massa m e lunghe r sono saldate all'anello nei punti A e B e tra loro nel punto C in modo da formare un angolo retto. Sapendo che la retta Ox' si muove con velocità angolare costante attorno all'asse verticale Oz, si scriva la funzione di Lagrange del sistema.

VI

Sulla superficie di un piano inclinato si può muovere senza attrito un disco omogeneo di raggio R e massa m. Al centro di massa del disco è applicata una molla di costante elastica k, il cui altro estremo è in un punto fisso A del piano, posto sul bordo superiore. Sapendo che il piano è lungo $L >> R$ e che l'angolo che il piano inclinato forma con la direzione orizzontale cresce linearmente nel tempo, si determini la funzione di Lagrange del sistema.

Commenti. Non si attribuiscano vincoli non specificati dal problema: la forza elastica è forza attiva e non produce vincoli al moto generico del disco sul piano; la funzione di Lagrange deve essere valutata da un osservatore inerziale; si assuma che all'istante iniziale il piano dove giace il disco sia orizzontale, che il punto A coincida inizialmente con l'origine e che poi rimanga nel piano Oyz.

VII

Due particelle di massa m sono vincolate a muoversi di moto uniforme l'una lungo il diametro AB, l'altra lungo la circonferenza, di un anello di raggio R e di massa trascurabile. Sapendo che l'anello rotola senza strisciare lungo una retta orizzontale Ox', che l'anello rimane verticale nel piano $Ox'z'$ e che la retta Ox' può ruotare attorno all'asse verticale Oz', si individuino le coordinate generalizzate e si scriva la funzione di Lagrange del sistema. Si assuma che all'istante iniziale ($t = 0$) le due particelle si trovino nell'origine O.

VIII

Un triangolo rettangolo omogeneo di massa M è fisso in un piano verticale Oxy in modo che:

- il cateto OA, di lunghezza l, giace sull'asse verticale Oy, mentre il cateto OB resta orizzontale, sull'asse Ox;
- l'ipotenusa AB forma un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con l'asse orizzontale e la sua lunghezza misura dunque $2l$.

Inoltre, un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sull'ipotenusa, soggetto alla forza elastica esercitata da una molla applicata in A e diretta come l'ipotenusa.

Sapendo che il piano verticale Oxy può ruotare senza attriti attorno a Oy,

1. si dica quanti gradi di libertà ha il sistema e si scelgano le opportune coordinate lagrangiane;
2. si ricavi la funzione di Lagrange per il sistema.

IX

Il moto di un'asta omogenea AB (di lunghezza $2l$ e massa m) è soggetto ai seguenti vincoli: il suo punto C, distante $\frac{l}{2}$ da A, è fisso nell'origine O di un piano verticale Oxy; inoltre l'asta può ruotare in un piano perpendicolare a Oxy e che con questo forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$. Infine, una particella P di massa m è vincolata a muoversi sull'asta sotto l'azione di una forza elastica

$$\mathbf{F} = -k(P - B).$$

Si scriva la funzione di Lagrange per il sistema.

X

Un'asta AB, rigida, omogenea, lunga $2l$ e di massa m, si muove soggetta ai seguenti vincoli:

- deve giacere nel piano verticale Oxy, che, a sua volta, ruota con velocità angolare costante attorno all'asse verticale Oy;
- il suo estremo A, inizialmente ($t = 0$) nell'origine O, si muove uniformemente lungo la bisettrice del primo quadrante del piano Oxy.

Si determini il numero di gradi di libertà del sistema e si scriva per esso la funzione di Lagrange.

XI

Il centro C di un disco omogeneo, di massa m e raggio R, è vincolato a muoversi lungo la guida parabolica di equazione

$$y = -x^2 + 16R^2$$

nel semipiano $x \geq 0$ del piano verticale Oxy. Il disco, nel suo moto, è altresí soggetto ai seguenti vincoli:

- deve giacere nel piano verticale Oxy che, a sua volta, è libero di ruotare attorno all'asse verticale Oy;
- è libero di ruotare attorno al proprio centro C.

Si determini il numero di gradi di libertà del sistema e si scriva per esso la funzione di Lagrange.

XII

Un corpo rigido omogeneo è costituito da un'asta AB (di massa m e lunghezza $2L$) e da un anello (di centro C, di massa m e diametro L) saldato all'asta in B, in modo che A, B e C siano allineati. Il sistema è inoltre soggetto ai seguenti vincoli:

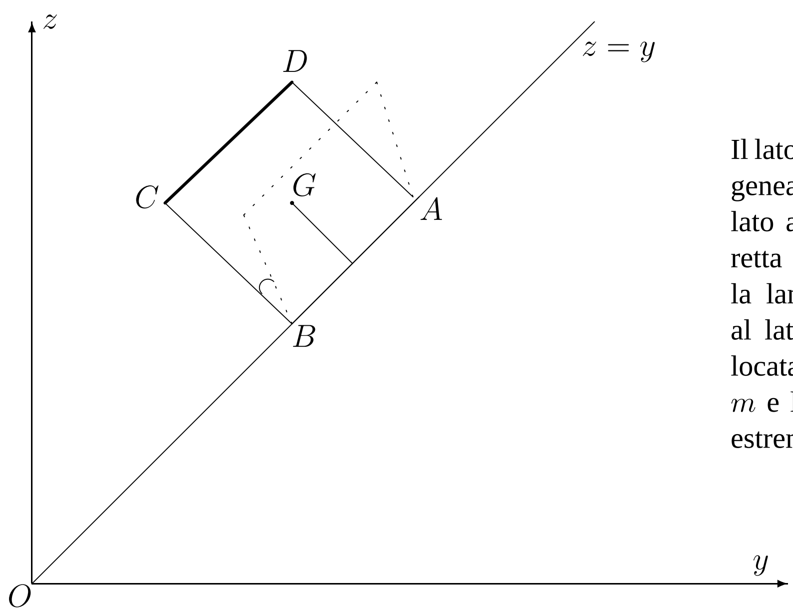
1. l'estremo A può muoversi senza attrito su una retta, inizialmente orizzontale,

   $$y = x \tan \omega t$$

   che ruota con velocità angolare costante attorno all'origine del piano verticale Oxy;
2. l'asta AB rimane sempre nel piano Oxy ed è sempre perpendicolare in A a tale retta;
3. il corpo rigido può ruotare attorno all'asse AB.

Si determini la funzione di Lagrange del sistema.

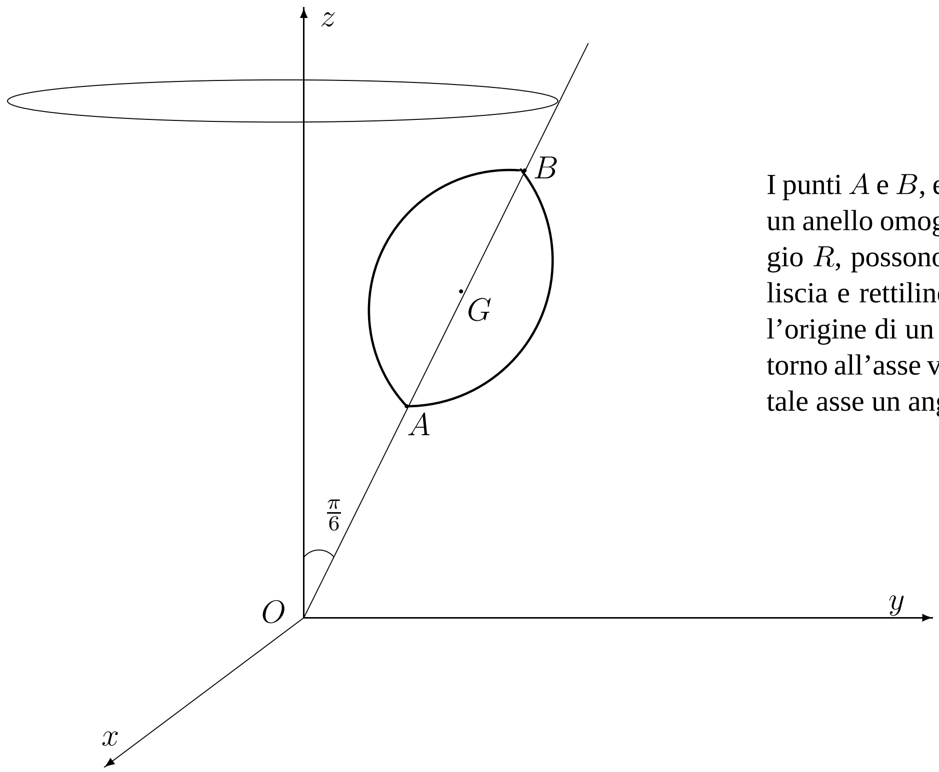
XIII



Il lato AB di una lamina quadrata omogenea, di lato L e massa m, è vincolato a muoversi senza attrito lungo la retta $z = y$ del piano verticale Oyz; la lamina è libera di ruotare attorno al lato AB. Sul lato opposto è collocata una sbarra omogenea di massa m e lunghezza L che mantiene i suoi estremi nei vertici C e D della lamina.

2. si scriva la funzione di Lagrange del sistema.

XIV



I punti A e B, estremi di un diametro di un anello omogeneo, di massa m e raggio R, possono muoversi su una guida liscia e rettilinea. Tale guida interseca l'origine di un sistema $Oxyz$, ruota attorno all'asse verticale Oz, e forma con tale asse un angolo di $\frac{\pi}{6}$.

Il moto di un anello è soggetto ai vincoli descritti nella figura. Si determini il numero di gradi di libertà del sistema e si scriva per esso la funzione di Lagrange.

Note e suggerimenti: nel testo non si parla di rotazioni con velocità angolare costante, le velocità angolari della guida e dell'anello sono variabili; la guida ha massa trascurabile; l'anello è un corpo pesante nel campo gravitazionale.

XV

Una guida circolare di raggio R e massa trascurabile ha centro nell'origine di un sistema di riferimento $Oxyz$, due punti fissi sull'asse verticale Oz, $z = R$ e $z = -R$, e attorno a tale asse è libera di ruotare. Il centro di massa G di un'asta OA, di lunghezza $2R$ e massa m, è vincolato a muoversi di moto uniforme sulla guida. Si scriva la funzione di Lagrange per il moto dell'asta e si mostri che l'energia potenziale non incide sulle equazioni del moto.

$\boxed{\text{XVI}}$

Una guida circolare di raggio R e massa trascurabile ha il proprio centro coincidente con l'origine di un sistema di riferimento inerziale $Oxyz$ e ruota con velocità angolare costante attorno al proprio diametro AB, fisso sull'asse verticale Oz. I vertici opposti di una lamina quadrata omogenea di massa m sono vincolati a muoversi sulla guida circolare, mentre la lamina è libera di ruotare attorno alla diagonale che congiunge i due vertici. Si scriva la funzione di Lagrange del sistema.

$\boxed{\text{XVII}}$

In un piano verticale Oxy una guida rettilinea priva di attriti e di massa trascurabile, passante per l'origine O, ruota in senso antiorario con velocità angolare costante. Sulla guida sono vincolati a muoversi il centro G di un disco omogeneo (di massa m e raggio r) e il suo diametro AB. Sapendo che

1. il disco è libero di ruotare attorno al proprio diametro AB;
2. su G agisce una forza elastica diretta come $(O - G)$ e di modulo

$$\| \mathbf{F} \| = -k \| (G - O) \|,$$

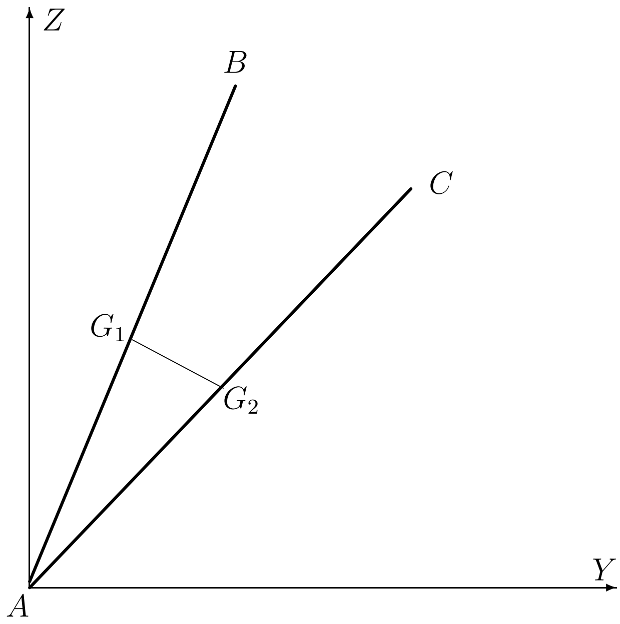
si scriva la funzione di Lagrange del sistema.

$\boxed{\text{XVIII}}$

Un corpo rigido è costituito da un'asta omogenea AB lunga $4L$ e di massa m e da una lamina quadrata omogenea $BCDE$ di lato L e massa M saldata all'asta per il lato EB. L'asta è vincolata a rimanere nel piano verticale Oxy e il suo punto medio G è fisso e di coordinate $(0, 2L)$.

Sapendo che il corpo rigido può ruotare attorno alla direzione individuata dall'asta AB, si determini il numero di gradi di libertà del sistema e si scriva per esso la funzione di Lagrange.

$\boxed{\text{XIX}}$



L'estremo A di un'asta AB, omogenea, di massa m e lunghezza $L\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, coincide con l'origine di un sistema di assi cartesiani $OXYZ$, giace nel piano verticale OYZ e forma un angolo pari a $\dfrac{\pi}{6}$ con l'asse verticale OZ. In A è saldata una seconda asta AC, omogenea, di massa m e lunghezza L, che può muoversi nel piano OYZ.

Sapendo che tra i due centri di massa delle aste, G_1 e G_2 si esercita una forza di potenziale

$$U = -\frac{k}{2}||G_2 - G_1||^2,$$

e che il piano OYZ può ruotare attorno all'asse OZ, si ricavi la funzione di Lagrange del sistema.

$\boxed{\text{XX}}$

Il centro di massa G di un'asta omogenea AB, di massa m e lunghezza $2L$,è vincolato a muoversi sulla retta orizzontale OX, soggetto alla forza elastica

$$\mathbf{F} = -k(G - O).$$

L'asta può ruotare attorno al proprio centro di massa, mantenendo un angolo fisso di $\dfrac{\pi}{4}$ con l'asse OX. Sapendo che l'asse OX può ruotare nel piano orizzontale Oxy attorno all'asse Oz, si ricavi la funzione di Lagrange del sistema.

$\boxed{\text{XXI}}$

L'estremo A di un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2L$ è vincolato a muoversi di moto uniforme su una circonferenza di raggio L e di massa trascurabile. Sapendo che:

- la circonferenza e l'asta sono vincolate a permanere nel piano verticale OXZ, nella cui origine è collocato il centro della circonferenza;

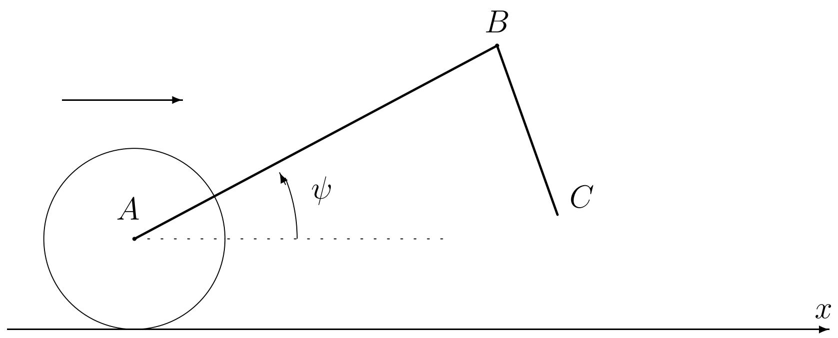
- i punti O, A e B restano allineati durante il moto;
- il piano OXZ è libero di ruotare attorno all'asse verticale OZ,

si scriva la funzione di Lagrange del sistema.

XXII

L'estremo A di un'asta omogenea AB, di massa m e lunghezza $2L$ è vincolato a muoversi di moto uniforme su una circonferenza orizzontale di raggio L e di massa trascurabile, il cui centro si trova nell'origine di un sistema di assi cartesiani Oxy. Sapendo che l'asta può ruotare in un piano verticale tangente in A alla circonferenza, si scriva la funzione di Lagrange del sistema.

XXIII



Il sistema è composto da tre corpi rigidi omogenei: un anello di massa m e raggio R, l'asta AB lunga $2L$ di massa M, l'asta BC di massa m e lunghezza $2R$.

L'anello di figura rotola senza strisciare sull'asse orizzontale Ox. L'asta AB è imperniata in A nel centro dell'anello e può ruotare attorno a tale punto, restando, come l'anello, nel piano verticale Oxy. L'asta BC è incernierata in B ed è vincolata a restare ortogonale a AB, ma può liberamente ruotare in un piano ortogonale a quest'ultima. Si supponga, come è illustrato in figura, che sia inizialmente impressa una rotazione ψ ad AB in senso antiorario. Si determini la funzione di Lagrange del sistema.

XXIV

Una lamina omogenea di massa m ha la forma di un triangolo rettangolo isoscele, la cui ipotenusa ha lunghezza $2a$. Il moto della lamina è soggetto ai seguenti vincoli:

- l'ipotenusa AB cade liberamente lungo la retta verticale $X = a$ nel piano verticale OXZ;
- il piano OXZ ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse verticale OZ;
- la lamina è libera di ruotare attorno all'ipotenusa AB.

Si ricavi la funzione di Lagrange del sistema.

SOLUZIONI

I

Il sistema ha due gradi di libertà: la rotazione della guida attorno al punto A e la rotazione del punto P sulla circonferenza di centro G (centro di massa della guida); indichiamo con θ e φ le coordinate lagrangiane che descrivono tali rotazioni.

Per applicare il teorema di König e valutare la Lagrangiana del sistema, scriviamo di seguito le equazioni che esprimono le coordinate cartesiane di G e P mediante le coordinate lagrangiane: indicando con L la distanza $||A - O||$, si ha

$$\begin{aligned} x_G &= L\cos\omega t + R\sin\theta\sin\omega t \qquad & x_P &= L\cos\omega t + R(\sin\theta + \sin\varphi)\sin\omega t \\ y_G &= L\sin\omega t - R\sin\theta\cos\omega t \qquad & y_P &= L\sin\omega t - R(\sin\theta + \sin\varphi)\cos\omega t \\ z_G &= R\cos\theta \qquad & z_P &= R(\cos\theta + \cos\varphi) \end{aligned}$$

Le corrispondenti derivate temporali sono date da:

$$\begin{aligned} \dot{x}_G &= -\omega L\sin\omega t + R\dot{\theta}\cos\theta\sin\omega t + \omega R\sin\theta\cos\omega t \\ \dot{y}_G &= \omega L\cos\omega t - R\dot{\theta}\cos\theta\cos\omega t + \omega R\sin\theta\sin\omega t \\ \dot{z}_G &= -R\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_P &= -\omega L\sin\omega t + R(\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\varphi}\cos\varphi)\sin\omega t + \omega R(\sin\theta + \sin\varphi)\cos\omega t \\ \dot{y}_P &= \omega L\cos\omega t - R(\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\varphi}\cos\varphi) cos\omega t + \omega R(\sin\theta + \sin\varphi)\sin\omega t \\ \dot{z}_P &= -R(\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\varphi}\sin\varphi) \end{aligned}$$

Cosicchè la somma delle energie cinetiche relative a G e P è data da

$$T_G + T_P = \frac{m}{2}(\dot{\mathbf{x}}_G^2 + \dot{\mathbf{x}}_P^2) = \frac{m}{2}\{[(\omega^2 L^2 + R^2\dot{\theta}^2 + \omega^2 R^2\sin^2\theta - 2\omega RL\dot{\theta}\cos\theta] +$$

$$[\omega^2 L^2 + R^2(\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + \omega^2 R^2(\sin\theta + \sin\varphi)^2 + R^2(\dot{\theta}\sin\theta + \dot{\varphi}\sin\varphi)^2 - 2\omega L + R(\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\varphi}\cos\varphi]\}$$

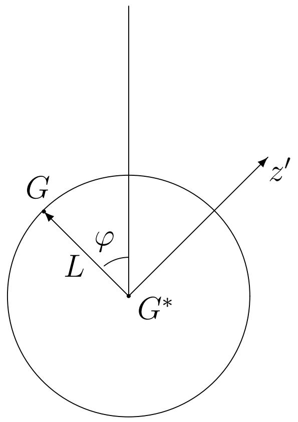
Infine, l'energia cinetica relativa al centro di massa dell'anello è, se si scelgono gli assi principali d'inerzia x', y' nel piano dell'anello e z' diretto come la retta Or,

$$T' = \frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{2}(\omega\cos\theta)^2 + \frac{mR^2}{2}(\omega\sin\theta)^2 + mR^2(\dot{\varphi})^2\right) = \frac{mR^2}{2}(2\omega^2 + \dot{\varphi}^2)$$

Infine, per il calcolo della funzione di Lagrange, manca solo l'energia potenziale, che è dovuta alla sola forza peso applicata su P e G:

$$V = mg(z_P + z_G) = mgR(2\cos\theta + \cos\varphi)$$

$\boxed{\mathrm{II}}$



L'asta è vincolata a ruotare sulla superficie di un cilindro che ha OX come asse: in figura ne vediamo una sezione nel punto di mezzo

Sia G il centro di massa dell'asta e G^* la sua proiezione su OX. L'asse OX è solidale al sistema, perché la distanza dell'asta da esso resta costante durante il moto. Si noti che il moto dell'asta attorno a tale asse è in realtà un moto di traslazione: infatti, tutti i punti dell'asta hanno, rispetto a esso, la medesima velocità. Per questo moto, sarà dunque sufficiente valutare l'energia cinetica della massa dell'asta collocata nel suo centro di massa. Detto altrimenti: si consideri il solo moto di rotazione dell'asta attorno OX coincidente per esempio con Ox e si scelga un sistema di coordinate con origine in G e in traslazione rispetto al sistema fisso $Oxyz$: per esempio con assi $G\tilde{x}$ diretto come l'asta, $G\tilde{y}$ e $G\tilde{z}$ paralleli, rispettivamente, a Oy e Oz. Questo sistema di riferimento è necessario per applicare il teorema di König. Ma la questione è: qual'è l'energia cinetica del corpo rispetto a tale sistema? La risposta è che la direzione dell'asta coincide, durante il moto, con quella dell'asse $G\tilde{x}$, dunque $T' = 0$. E questo risultato equivale a dire che non ci sono moti rotatori dell'asta attorno al sistema in traslazione.

Il sistema ha due gradi di libertà; per descriverli, scegliamo i due angoli di rotazione φ e θ, il primo per descrivere l'angolo tra $(G - G^*)$ e la verticale, il secondo descrive la rotazione attorno all'asse Oz del sistema inerziale. Per ricavare l'energia cinetica (totale), applichiamo al sistema il teorema di König:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 + \dot{z}_G^2) + \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

che risulta facilmente calcolata tenendo conto che:

$$\begin{array}{lcl} x_G = L\cos\theta + L\sin\varphi\sin\theta & & \dot{x}_G = -L\dot{\theta}\sin\theta + L\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\theta + L\dot{\theta}\sin\varphi\cos\theta \\ y_G = L\sin\theta - L\sin\varphi\cos\theta & \Longrightarrow & \dot{y}_G = L\dot{\theta}\cos\theta - L\dot{\varphi}\cos\varphi\cos\theta + L\dot{\theta}\sin\varphi\sin\theta \\ z_G = L\cos\varphi & & \dot{z}_G = -L\dot{\varphi}\sin\varphi \end{array}$$

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\theta}\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta}\cos\varphi \\ \dot{\theta}\sin\varphi \end{pmatrix}$$

(l'annullarsi della componente lungo Gx' è dovuto al precedente ragionamento)

$$\mathbb{I}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{mL^2}{3} \end{pmatrix}$$

dove, in quest'ultima, si è scelto l'asse principale x' diretto come l'asta. Conseguentemente,

$$T = \frac{m}{2}L^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi - 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\varphi) + \frac{m}{6}L^2\dot{\theta}^2.$$

L'energia potenziale è semplicemente

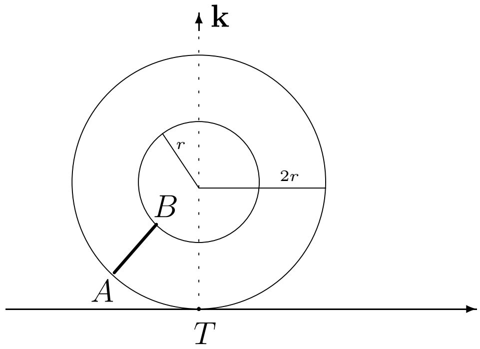
$$V = mgL\cos\varphi$$

<u>Osservazione</u>: l'aver considerato in rotazione gli assi Gy' e Gz' attorno a Gx' è del tutto superfluo, ma porta a un risultato corretto, lo stesso che avremmo ottenuto considerando come assi principali d'inerzia Gz' sempre parallelo a Oz e Gy' orientato di conseguenza. In tale sistema, le componenti della velocità angolare sono ovviamente

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\theta}\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

e il calcolo dell'energia cinetica non subisce modifiche.

III



Il sistema ha due gradi di libertà: infatti, il disco puo ruotare attorno alla verticale e il centro di massa G dell'asta può ruotare su una circonferenza di raggio $\frac{3}{2}r$ concentrica al disco cavo; il moto dell'asta è completamente determinato dal moto di G. Due opportune variabili lagrangiane sono:

- l'angolo ϕ di rotazione del disco attorno all'asse verticale;
- l'angolo θ che l'asta, come in figura, forma con la verticale ascendente;

scegliamo come origine di un sistema cartesiano inerziale proprio il punto T. Conseguentemente, posizione e velocità del centro di massa saranno dati da:

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{3}{2}r\sin(-\theta)\cos\phi & \qquad \dot{x}_G &= \frac{3}{2}r(-\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\phi) \\
y_G &= \frac{3}{2}r\sin(-\theta)\sin\phi & \qquad \dot{y}_G &= \frac{3}{2}r(-\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi - \dot{\phi}\sin\theta\cos\phi) \\
z_G &= \frac{3}{2}r\cos(-\theta) & \qquad \dot{z}_G &= \frac{3}{2}r(-\dot{\theta}\sin\theta)
\end{aligned}$$

Gli assi principali d'inerzia dell'asta siano x' lungo l'asta y' perpendicolare a x' e complanare al disco; z' perpendicolare ai due assi e dunque parallelo alla velocità angolare $\dot{\theta}\mathbf{k}'$. Il teorema di König applicato all'asta fornisce dunque:

$$T_{\text{asta}} = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{1}{2}(I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \frac{m}{2}\frac{9}{4}r^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}m\frac{r^2}{12}(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2)$$

Poiché il momento d'inerzia rispetto a un asse perpendicolare a un disco cavo (di raggio interno R_1 e esterno R_2 e densità costante σ) è dato da

$$\int\int(x^2+y^2)\sigma dxdy = \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\rho^2\rho d\rho d\theta = \frac{2\pi m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}\left|\frac{\rho^4}{4}\right|_{R_1}^{R_2} = \frac{m}{2}(R_2^2+R_1^2)$$

cosicché nel nostro caso si ha $\qquad I_3 = \dfrac{m}{2}(4r^2 + r^2);$

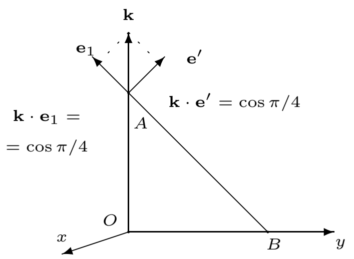
come nel caso del disco pieno, sfruttando la simmetria e il fatto che la distribuzione è piana, si trova per i momenti rispetto agli assi perpendicolari che: $I_1 = I_2 = \dfrac{I_3}{2}$. Allora, facilmente si ha che

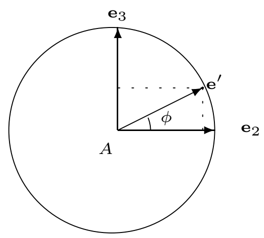
$$T_{\text{disco}} = \frac{1}{2}\frac{5}{4}mr^2\dot{\phi}^2$$

La funzione di Lagrange si ottiene sommando le due energie cinetiche ricavate e sottraendo l'energia potenziale gravitazionale $V = mgz_G = \dfrac{3}{2}rmg\cos\theta$.

IV

Il sistema ha due gradi di libertà. Scegliamo quali coordinate lagrangiane gli angoli θ e ϕ indicati in figura: il primo descrive la rotazione attorno all'asse verticale, il secondo la rotazione della lamina rispetto al piano verticale Π individuato dai punti A, B, O.





Nella figura di sinistra si deve immaginare che C ruoti attorno a AB e che la lamina stia formando un angolo ϕ con il triangolo AOB; nella figura di destra si schematizza come sono dirette: la normale alla lamina ($\mathbf{e}_3$) e l'altezza CH ($\mathbf{e}_2$).

1. Scelta della terna solidale con la lamina e con origine in A:

   (a) l'asse x_1 è diretto come l'ipotenusa e ha il verso di $(A - B)$;

   (b) l'asse x_2 è diretto come l'altezza relativa all'ipotenusa $\overline{CH}$ e il suo versore $\mathbf{e}_2$ ha il verso di $(H - C)$;

   (c) l'asse x_3, perpendicolare alla lamina è scelto in modo che $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$.

   Si noti dalla figura che l'ipotenusa forma sempre un angolo di $\dfrac{\pi}{4}$ con l'asse verticale.

2. Sia $\mathbf{k}$ il versore dell'asse verticale. Dunque la velocità angolare totale è data da:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{e}_1 + \dot{\theta}\mathbf{k}.$$

Poiché la proiezione di $\mathbf{k}$ (di modulo $\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}' = \sqrt{2}/2$) sul piano individuato da $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ forma con questi versori, rispettivamente, angoli ϕ e $(\phi + \frac{\pi}{2})$, la velocità angolare rispetto alla terna solidale è, infine,

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \left(\dot{\phi} + \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{\theta}\cos\phi\,\mathbf{e}_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{\theta}\sin\phi\,\mathbf{e}_3.}$$

3. Tenuto conto che le componenti del tensore d'inerzia rispetto a una terna con origine in A e assi paralleli ai cateti, diretti come $\mathbf{k}$ e $\mathbf{j}$ di figura, si calcolano facilmente tramite integrali del tipo

$$I_{11} = \frac{2m}{a^2}\int_0^a \int_{-a}^{-x} y^2\,dx\,dy\,, \text{etc.},$$

si trova che tale tensore è:

$$\mathbf{I}' = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Per trovare l'espressione del tensore rispetto alla terna solidale prescelta, è sufficiente applicare la trasformazione di similitudine $\mathbf{I}' \longrightarrow \mathbf{I} : \mathbf{I}' = \mathbf{A}\mathbf{I}\mathbf{A}^T$, $\mathbf{A}$ essendo la matrice che ruota i cateti di $\pi/4$:

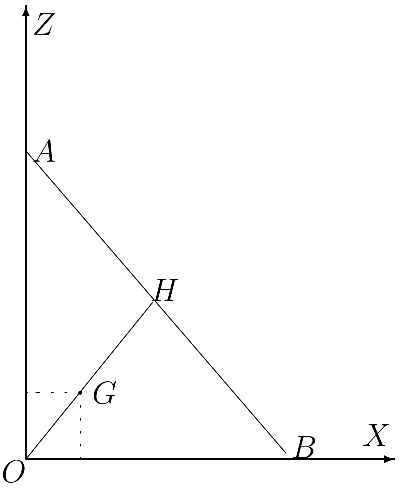
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per cui, infine,

$$\mathbf{I} = \frac{ma^2}{3}\begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4. L'energia cinetica risulta dunque:

$$T = \frac{1}{2}\frac{ma^2}{3}\left[\frac{7}{4}\left(\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \sqrt{2}\dot{\phi}\dot{\theta}\right) + \frac{1}{8}\dot{\theta}^2\cos^2\phi + \dot{\theta}^2\sin^2\phi - \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{\theta}\cos\phi\left(\dot{\phi} + \frac{\sqrt{2}}{2}\dot{\theta}\right)\right].$$



Le coordinate del centro di massa si trovano facilmente valutando

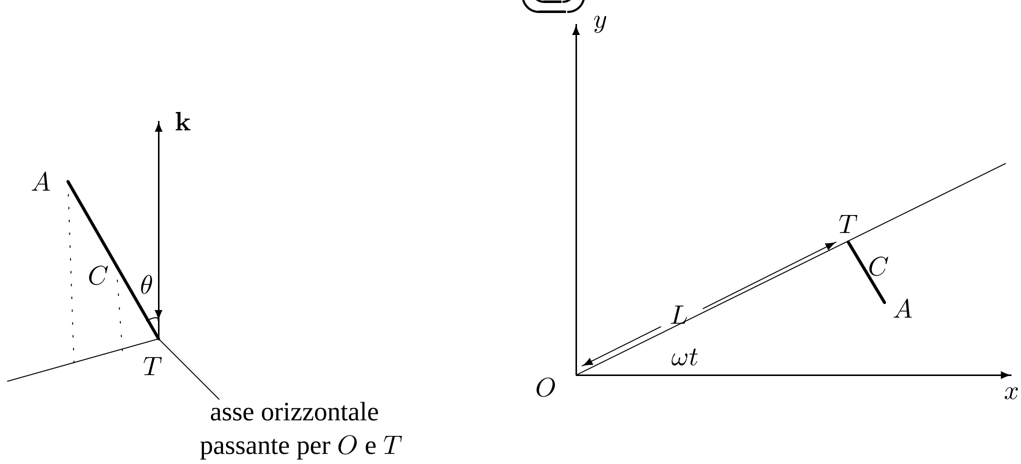
$$X_G = \frac{2}{a^2}\int_0^a \int_0^{a-X} X dZ dX = \frac{a}{3}$$

Il segmento GH è evidentemente lungo $\frac{a}{6}\sqrt{2}$.

Allora, la quota del baricentro (notando che H ha quota fissa pari a $fraca2$), è data da $\frac{a}{2} - \frac{a}{6}\sqrt{2}\cos\phi$. La funzione di Lagrange del sistema è dunque

$$\boxed{\mathscr{L} = \frac{ma^2}{24}\left[\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(9 - \cos^2\phi - 4\cos\phi)\dot{\theta}^2 + \sqrt{2}(1 - 2\cos\phi)\dot{\theta}\dot{\phi}\right] + mg\frac{a}{6}\cos\phi.}$$

V



(a) preliminari sulle coordinate lagrangiane

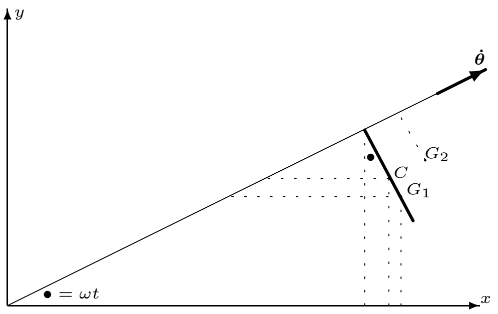
Il sistema ha un solo grado di libertà, corrispondente alla libera rotazione attorno alla retta Ox'. Dunque conviene scegliere di descrivere tale rotazione con la variabile angolare θ: nelle figure è descritta, da diverse prospettive la generica rotazione θ del diametro TA rispetto alla verticale; dunque

$$r\sin\theta \quad \text{e} \quad r\cos\theta$$

sono, rispettivamente, le proiezioni di $(C - T)$ lungo la <u>normale</u> all'asse orizzontale e lungo la verticale Oz. Allora, dalla figura, si ottiene che:

$$\begin{aligned} x_C &= L\cos\omega t + (r\sin\theta)\sin\omega t \\ y_C &= L\sin\omega t - (r\sin\theta)\cos\omega t \\ z_C &= r\cos\theta \end{aligned} \implies \begin{aligned} \dot{x}_C &= -\omega L\sin\omega t + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\omega t + r\omega\sin\theta\cos\omega t \\ \dot{y}_C &= \omega L\cos\omega t - r\dot{\theta}\cos\theta\cos\omega t + r\omega\sin\theta\sin\omega t \\ \dot{z}_C &= -r\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \dot{\mathbf{x}}_C^2 = \omega^2 L^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\omega^2\sin^2\theta - 2r\omega L\dot\theta\cos\theta$$



G_2, come C, dista r da Ox'; G_1 dista $3/2r$;
la proiezione di G_2 su Ox' dista $L + 3/2r$ da O.

Analogamente, le posizioni dei baricentri delle aste, G_1 dell'asta AC e G_2 dell'asta CB, sono date da (vedi figura):

$$\begin{cases} x_{G_1} = L\cos\omega t + \left(\frac{3}{2}r\sin\theta\right)\sin\omega t \\ y_{G_1} = L\sin\omega t - \left(\frac{3}{2}r\sin\theta\right)\cos\omega t \\ z_{G_1} = \frac{3}{2}r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{G_2} = \left(L + \frac{r}{2}\right)\cos\omega t + (r\sin\theta)\sin\omega t \\ y_{G_2} = \left(L + \frac{r}{2}\right)\sin\omega t - (r\sin\theta)\cos\omega t \\ z_{G_2} = r\cos\theta \end{cases}$$

che, derivate rispetto al tempo, forniscono

$$\begin{cases} \dot x_{G_1} = -\omega L\sin\omega t + \frac{3}{2}r\dot\theta\cos\theta\sin\omega t + \frac{3}{2}r\omega\sin\theta\cos\omega t \\ \dot y_{G_1} = \omega L\cos\omega t - \frac{3}{2}r\dot\theta\cos\theta\cos\omega t + \frac{3}{2}r\omega\sin\theta\sin\omega t \\ \dot z_{G_1} = -\frac{3}{2}r\dot\theta\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot x_{G_2} = -\omega\left(L + \frac{r}{2}\right)\sin\omega t + r\dot\theta\cos\theta\sin\omega t + r\omega\sin\theta\cos\omega t \\ \dot y_{G_2} = \omega\left(L + \frac{r}{2}\right)\cos\omega t - r\dot\theta\cos\theta\cos\omega t + r\omega\sin\theta\sin\omega t \\ \dot z_{G_2} = -r\dot\theta\sin\theta \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \dot{\mathbf{x}}_{G_1}^2 = \omega^2 L^2 + \frac{9}{4}r^2\dot\theta^2 + \frac{9}{4}r^2\omega^2\sin^2\theta - 3r\omega L\dot\theta\cos\theta;$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{G_2}^2 = \omega^2\left(L + \frac{r}{2}\right)^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\omega^2\sin^2\theta - 2r\omega\left(L + \frac{r}{2}\right)\dot\theta\cos\theta$$

(b) calcolo di T e V

La velocità angolare del sistema è data da $\qquad \boldsymbol{\Omega} = \omega\mathbf{k} + \dot\theta\mathbf{e}_1'$

dove $\mathbf{e}_1'$ è il versore dell'asse orizzontale Ox' e, anche, di un asse principale d'inerzia di ciascuna componente del corpo rigido: conviene infatti applicare il teorema di König separatamente all'anello e a ciascuna delle due sbarre:

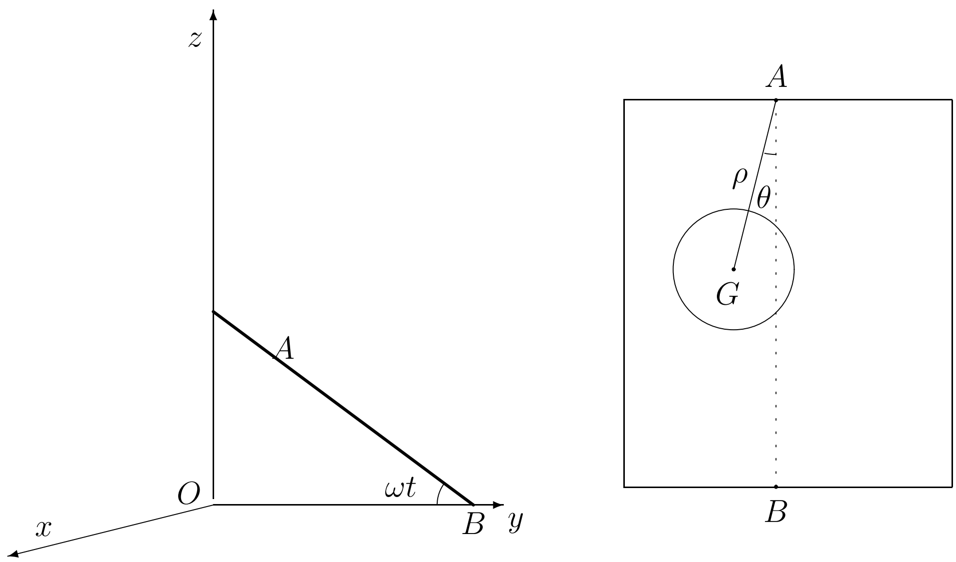
$$\begin{aligned} T_{\text{anello}} &= \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}_C^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{2}\dot\theta^2 + \frac{mr^2}{2}(\omega\cos\theta)^2 + mr^2(\omega\sin\theta)^2\right) \\ T_{AC} &= \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}_{G_1}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mr^2}{12}\dot\theta^2 + 0\cdot(\omega\cos\theta)^2 + \frac{mr^2}{12}(\omega\sin\theta)^2\right) \\ T_{CB} &= \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}_{G_2}^2 + \frac{1}{2}\left(0\cdot\dot\theta^2 + \frac{mr^2}{12}(\omega\cos\theta)^2 + \frac{mr^2}{12}(\omega\sin\theta)^2\right) \end{aligned}$$

Nell'anello gli assi principali d'inerzia sono stati scelti, nell'ordine, nelle direzioni di (B-C), (A-C) e di $\mathbf{e}_3'$, perpendicolare al piano dell'anello. Lo stesso per le due sbarre, a parte una traslazione dell'origine.

Sommando tutti i contributi, con un po' di pazienza si perviene all'energia cinetica totale; per quel che concerne l'energia potenziale, si ha semplicemente che

$$V = mg(z_C + z_{G_1} + z_{G_2}) = \frac{7}{2} r \cos\theta$$

VI



Il sistema ha evidentemente 3 gradi di libertà, necessari a descrivere il moto piano del centro di massa (2) e la rotazione piana del disco (1); la rotazione del piano inclinato traduce un vincolo reonomo. Le coordinate lagrangiane possono essere scelte, seguendo le notazioni in figura, come $\rho = ||G-A||$, θ l'angolo che $(G-A)$ forma con $(B-A)$ e, infine φ è l'angolo di rotazione del disco attorno al proprio asse. Se inizialmente A coincide con l'origine e $||B-O|| = L$,

$$x_A = 0; \qquad y_A = L - L\cos\omega t: \qquad z_A = L\sin\omega t$$

Dunque, rispetto all'osservatore inerziale,

$$\mathbf{x}_G = \begin{pmatrix} \rho\sin\theta \\ y_A + \rho\cos\theta\cos\omega t \\ z_A - \rho\cos\theta\sin\omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\sin\theta \\ L - (L-\rho\cos\theta)\cos\omega t \\ (L-\rho\cos\theta)\sin\omega t \end{pmatrix};$$

$$\dot{\mathbf{x}}_G = \begin{pmatrix} \dot\rho\sin\theta + \rho\dot\theta\cos\theta \\ \omega(L-\rho\cos\theta)\sin\omega t + (\dot\rho\cos\theta - \rho\dot\theta\sin\theta)\cos\omega t \\ \omega(L-\rho\cos\theta)\cos\omega t - (\dot\rho\cos\theta - \rho\dot\theta\sin\theta)\sin\omega t \end{pmatrix} \Longrightarrow \dot{\mathbf{x}}_G^2 = \dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2 + \omega^2(L-\rho\cos\theta)^2$$

mentre la velocità angolare totale è data da

$$\mathbf{\Omega} = -\omega\mathbf{e}_1 + \dot\varphi\mathbf{E}_3$$

dove $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ sono i versori degli assi principali d'inerzia, diretti, rispettivamente, come 2 qualsiasi direzioni tra loro ortogonali e complanari al disco e come l'asse del disco, passante per il suo centro.

Detto ϕ l'angolo che l'asse principale del disco forma con $\mathbf{e}_1$, la decomposizione della velocità angolare lungo la terna principale d'inerzia è data da

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega\cos\phi \\ -\omega\sin\phi \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

Alla fine, raccogliendo i calcoli eseguiti,

$$T = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}_G^2 + \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2) =$$

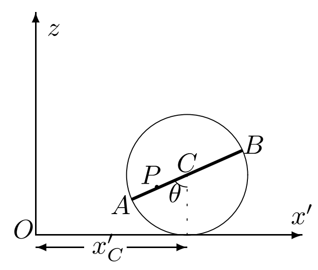
$$= \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \omega^2(L - \rho\cos\theta)^2 + \frac{mR^2}{4}\left(\frac{1}{2}\omega^2\cos^2\phi + \frac{1}{2}\omega^2\sin^2\phi + \dot{\phi}^2\right)$$

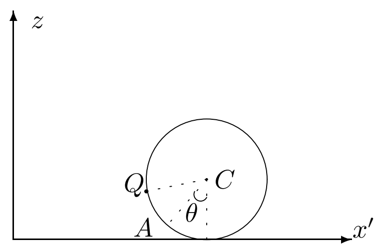
$$V = mgz_G = mg(L - \rho\cos\theta)\sin\omega t$$

da cui è immediato calcolare $\mathscr{L} = T - V$.

Si noti che l'energia potenziale dipende esplicitamente dal tempo (ma l'energia cinetica no): ciò è dovuto al fatto che la quota del centro di massa viene modificata con una spesa di energia, quella necessaria alla rotazione del piano.

VII





I gradi di libertà sono 2: la rotazione rigida dell'anello (se P e Q fossero fissi sull'anello, ciò non inciderebbe sui numero di gradi di libertà), e quella del piano attorno alla verticale. Indicando con θ la coordinata lagrangiana corrispondente alla prima rotazione e con ϕ quella della seconda, e tenendo conto che il vincolo sulle velocità si traduce in

$$x'_C = R\theta,$$

esprimiamo le coordinate cartesiane delle due particelle mediante quelle lagrangiane.

Con le condizioni iniziali scelte, dalla figura,

$$\begin{cases} x'_P = x'_C - (R - vt)\sin\theta \\ z'_P = R - (R - vt)\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_Q = x'_C - R\sin(\theta + \omega t) \\ z'_Q = R - R\cos(\theta + \omega t) \end{cases}$$

Allora, rispetto al riferimento inerziale $Oxyz$ dove $z = z'$,

$$\begin{cases} x_P = (R\theta - (R-vt)\sin\theta)\cos\phi \\ y_P = (R\theta - (R-vt)\sin\theta)\sin\phi \\ z_P = R - (R-vt)\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} x_Q = (R\theta - R\sin(\theta+\omega t))\cos\phi \\ y_Q = (R\theta - R\sin(\theta+\omega t))\sin\phi \\ z_Q = R - R\cos(\theta+\omega t) \end{cases}$$

Di qui è immediato calcolare le componenti della velocità:

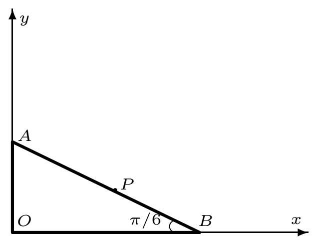
$$\begin{aligned} \dot{x}_P &= (R\dot\theta + v\sin\theta - \dot\theta(R-vt)\cos\theta)\cos\phi - \dot\phi(R\theta - (R-vt)\sin\theta)\sin\phi \\ \dot{y}_P &= (R\dot\theta + v\sin\theta - \dot\theta(R-vt)\cos\theta)\sin\phi + \dot\phi(R\theta - (R-vt)\sin\theta)\cos\phi \\ \dot{z}_P &= v\cos\theta + \dot\theta(R-vt)\sin\theta \\ \dot{x}_Q &= (R\dot\theta - R(\dot\theta+\omega)\cos(\theta+\omega t))\cos\phi - \dot\phi(R\theta - R\sin(\theta+\omega t))\sin\phi \\ \dot{y}_Q &= (R\dot\theta - R(\dot\theta+\omega)\cos(\theta+\omega t))\sin\phi + \dot\phi(R\theta - R\sin(\theta+\omega t))\cos\phi \\ \dot{z}_Q &= R(\dot\theta+\omega)\sin(\theta+\omega t) \end{aligned}$$

e, alla fine,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_P^2 &= R^2\dot\theta^2 + v^2 + \dot\theta^2(R-vt)^2 + 2Rv\dot\theta\sin\theta - 2R\dot\theta^2(R-vt)\cos\theta \\ &\quad + R^2\theta^2\dot\phi^2 + \dot\phi^2(R-vt)^2\sin^2\theta - 2R(R-vt)\theta\dot\phi^2\sin\theta \\ \dot{\mathbf{x}}_Q^2 &= R^2\dot\theta^2 + R^2(\dot\theta+\omega)^2 + -2R^2\dot\theta(\dot\theta+\omega)\cos(\theta+\omega t) + R^2\theta^2\dot\phi^2 \\ &\quad + R^2\dot\phi^2\sin^2(\theta+\omega t) - 2R^2\theta\dot\phi^2\sin(\theta+\omega t) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathscr{L} = \frac{m}{2}(\dot{\mathbf{x}}_P^2 + \dot{\mathbf{x}}_Q^2) - mg(z_P + z_Q)$$

VIII



L'ipotenusa AB giace sulla retta

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + l$$

L'ascissa di B è $l\sqrt{3}$

Il sistema ha due gradi di libertà: la rotazione del piano verticale e il movimento rettilineo del punto P. Siano θ (angolo di rotazione attorno a Oy) e ρ (distanza di P da A, e, anche, lunghezza della molla) le variabili lagrangiane. Per scrivere la funzione di Lagrange del sistema, dobbiamo prima di tutto valutare separatamente le energie cinetiche della lamina e del punto materiale. Essendo O un punto fisso della lamina, calcoliamo il tensore d'inerzia relativamente al sistema Oxy. Si tratta di valutare, essendo il sistema piano, gli elementi di matrice

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{2M}{l^2\sqrt{3}} \int_0^{l\sqrt{3}} \int_0^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x+l} y^2 dy dx \\ I_{yy} &= \frac{2M}{l^2\sqrt{3}} \int_0^{l\sqrt{3}} \int_0^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x+l} x^2 dy dx \\ I_{xy} &= -\frac{2M}{l^2\sqrt{3}} \int_0^{l\sqrt{3}} \int_0^{-\frac{\sqrt{3}}{3}x+l} xy dy dx \end{aligned}$$

Vale la pena però sottolineare che in questo problema la lamina ha velocità angolare con direzione e verso costanti:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\vartheta}\mathbf{j};$$

in tal caso, l'energia cinetica della lamina si riduce a

$$T = \frac{1}{2} I_{yy}\dot{\vartheta}^2 = \frac{\dot{\vartheta}^2 M}{l^2\sqrt{3}} \int_0^{l\sqrt{3}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}x^3 + lx^2 \right) dx = \frac{1}{4}Ml^2\dot{\vartheta}^2$$

essendo nulle le proiezioni di $\boldsymbol{\omega}$ sugli altri assi d'inerzia.

Il punto P è individuato, rispetto a un sistema di riferimento inerziale $OXYZ$, con asse verticale OY coincidente con Oy, dalle coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} X &= \rho \cos\frac{\pi}{6} \sin\vartheta \\ Y &= l - \rho \sin\frac{\pi}{6} \\ Z &= \rho \cos\frac{\pi}{6} \cos\vartheta, \end{aligned}$$

e, poiché

$$\dot{X} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\dot{\rho}\sin\vartheta + \rho\dot{\vartheta}\cos\vartheta); \qquad \dot{Y} = -\frac{1}{2}\dot{\rho}; \qquad \dot{Z} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\dot{\rho}\cos\vartheta - \rho\dot{\vartheta}\sin\vartheta),$$

l'energia cinetica del punto è

$$T_P = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \frac{3}{4}\rho^2\dot{\vartheta}^2 \right).$$

Per cui, alla fine si ha

$$\mathscr{L} = \frac{1}{4}Ml^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \frac{3}{4}\rho^2\dot{\vartheta}^2 \right) - \frac{k}{2}\rho^2 - mg\left(l - \frac{1}{2}\rho \right)$$

(k è la costante della molla). Le equazioni di Lagrange sono dunque:

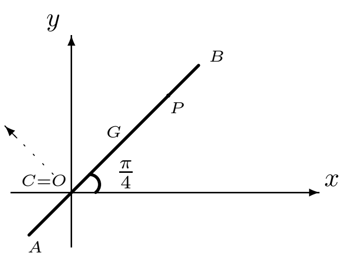
$$\frac{d}{dt}\left[\left(Ml^2 + \frac{3}{2}m\rho^2 \right)\dot{\vartheta} \right] = 0$$

$$m\ddot{\rho} - \frac{3}{4}m\rho\dot{\vartheta}^2 + k\rho - \frac{mg}{2} = 0.$$

Si noti che la prima equazione fornisce una legge di conservazione. Nell'ottica del teorema di Noether, ciò è conseguenza del fatto che $\mathscr{L}$ è manifestamente invariante per la rotazione ϑ:

$\boxed{\text{IX}}$

Il sistema ha due gradi di libertà: la rotazione della sbarra attorno all'asse perpendicolare in C (descritta dall'angolo θ) e il movimento del punto lungo la sbarra, descritto da $\rho = ||P - O||$.



La sbarra ha un punto fisso (C) e conviene calcolare l'energia cinetica di rotazione attorno a esso; in figura è segnato con linea tratteggiata l'asse di rotazione passante per C. La figura si riferisce alle configurazioni istantanee in cui A raggiunge la quota piú bassa: per queste scegliamo $\theta = 0$.

Prima di tutto determiniamo la posizione del centro di massa G della sbarra, quella del punto mobile P e la velocità di quest'ultimo:

$$\mathbf{x}_G = \begin{pmatrix} \frac{l}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta \\ \frac{l}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta \\ \frac{l}{2}\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}_P = \begin{pmatrix} \rho\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta \\ \rho\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \dot{\mathbf{x}}_P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(\dot\rho\cos\theta - \rho\dot\theta\sin\theta) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(\dot\rho\cos\theta - \rho\dot\theta\sin\theta) \\ \dot\rho\sin\theta + \rho\dot\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

Valutiamo ora l'energia cinetica del sistema:

$$T = \frac{1}{2}I_C\dot\theta^2 + \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}_P^2$$

dove

$$I_C = I_G + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = m\frac{l^2}{3} + m\frac{l^2}{4} = \frac{7}{12}ml^2$$

è il momento d'inerzia della sbarra rispetto all'asse di rotazione passante per C.

$$\text{Dunque,} \qquad T = \frac{7}{24}ml^2\dot\theta^2 + \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2)$$

La funzione di Lagrange si ottiene sottraendo a T l'energia potenziale

$$V = mgy_G + mgy_P + \frac{k}{2}||P-B||^2 = mg\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\left(\rho + \frac{l}{2}\right) + \frac{k}{2}\left(\frac{3}{2}l - \rho\right)^2$$

$\boxed{\text{X}}$

Il sistema ha un grado di libertà; si scelga come coordinata lagrangiana l'angolo θ che l'asta forma con la verticale; vt e ωt siano, rispettivamente, la distanza coperta da A sulla bisettrice e l'angolo di rotazione del piano Oxy attorno a Oy. Introduciamo un sistema di riferimento inerziale $OZYX$ con $Y = y$ e OZ e OX orizzontali. Rispetto a esso, le coordinate del baricentro G dell'asta sono

$$\begin{cases} Z_G = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}vt + l\sin\theta\right)\cos\omega t \\ \\ X_G = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}vt + l\sin\theta\right)\sin\omega t \\ \\ Y_G = l\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}vt \end{cases}$$

Derivando rispetto al tempo e sommando i quadrati delle componenti, si ha:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_G &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}v + l\dot\theta\cos\theta\right)\cos\omega t - \omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}vt + l\sin\theta\right)\sin\omega t \\ \dot{X}_G &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}v + l\dot\theta\cos\theta\right)\sin\omega t + \omega\left(\frac{\sqrt{2}}{2}vt + l\sin\theta\right)\cos\omega t \\ \dot{Y}_G &= -l\dot\theta\sin\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}v \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \dot{\mathbf{X}}_G^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}v + l\dot{\theta}\cos\theta\right)^2 + \omega^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}vt + l\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}v + l\dot{\theta}\sin\theta\right)^2 \\
&= l^2\dot{\theta}^2 + \sqrt{2}lv(\sin\theta + \cos\theta)\dot{\theta} + \omega^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}vt + l\sin\theta\right)^2 + v^2
\end{aligned}
$$

Se adesso scegliamo per l'asta una terna principale d'inerzia con origine in G, l'asse y' diretto come $(A - G)$, l'asse x' nello stesso piano Oxy e ruotato di $\pi/2$ in senso orario rispetto a y'; infine l'asse z' ortogonale ai due assi e uscente dal loro piano, abbiamo che la velocità angolare del corpo rigido è

$$
\begin{pmatrix} \Omega_{x'} \\ \Omega_{y'} \\ \Omega_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega\sin\theta \\ \omega\cos\theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}
$$

mentre il tensore d'inerzia riferito a tale sistema è

$$
\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \frac{ml^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{3} \end{pmatrix}
$$

Tenendo conto di questi risultati e applicando il teorema di König, possiamo facilmente scrivere la funzione di Lagrange per il sistema:

$$
\mathscr{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{X}}_G^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3}\omega^2\sin^2\theta + \frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2\right) - mg\left(l\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}vt\right).
$$

XI

Il sistema ha tre gradi di libertà: il moto del centro di massa lungo una curva piana, la rotazione e attorno al proprio asse ortogonale in C, la rotazione attorno all'asse verticale. Scegliendo, corrispondentemente, le coordinate lagrangiane x, θ e φ. In un sistema inerziale ortogonale $OZYX$, dove OY coincide con Oy, le coordinate del punto C sono

$$
X = x\sin\varphi; \qquad Y = -x^2 + 16R^2; \qquad Z = x\cos\varphi
$$

Si ha quindi:

$$
\begin{cases} \dot{X} = \dot{x}\sin\varphi + x\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{Y} = -2x\dot{x} \\ \dot{Z} = \dot{x}\cos\varphi - x\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases} \Longrightarrow \dot{\mathbf{X}}^2 = (4x^2 + 1)\dot{x}^2 + x^2\dot{\varphi}^2
$$

Un sistema di assi principali d'inerzia con origine in C è individuato da due qualsiasi assi Cx' e Cy' complanari al disco, a esso solidali, e ortogonali tra di loro. Il terzo asse Cz' è perpendicolare al piano del disco.

La velocità angolare totale di questo sistema di riferimento rispetto a quello inerziale prescelto è data da

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\varphi}\cos\theta\mathbf{i}' + \dot{\varphi}\sin\theta\mathbf{j}' + \dot{\theta}\mathbf{k}'$$

Poiché gli autovalori del tensore d'inerzia sono

$$I_1 = \frac{mR^2}{4}; \qquad I_2 = \frac{mR^2}{4}; \qquad I_3 = \frac{mR^2}{2},$$

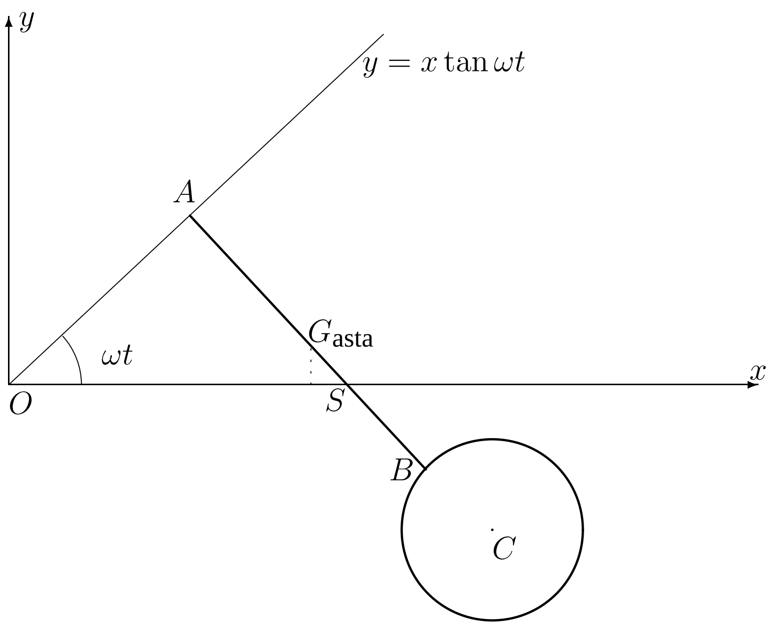
ricaviamo infine, ricorrendo al teorema di König, l'energia cinetica del sistema:

$$T = \frac{m}{2}[(4x^2+1)\dot{x}^2 + x^2\dot{\varphi}^2] + \frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{4}\dot{\varphi}^2\cos^2\theta + \frac{mR^2}{4}\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2\right)$$

Per scrivere la funzione di Lagrange sarà sufficiente sottrarre all'energia cinetica l'energia potenziale data da

$$V = mg(-x^2 + 16R^2).$$

XII



Il sistema ha due gradi di libertà: noto il moto di A sulla retta, resta individuato ogni punto dell'asta. Poi c'è la rotazione piana attorno all'asta. Supponiamo che il sistema abbia la configurazione mostrata in figura per un intervallo di tempo di sufficiente durata. Scegliamo come variabili lagrangiane l'angolo θ della rotazione attorno all'asta, e la distanza $\rho = ||A - O||$ del punto A dall'origine. Dalla figura si deduce immediatamente che

$$\begin{aligned} x_G &= x_A + ||G - A||\sin\omega t = \rho\cos\omega t + L\sin\omega t \\ y_G &= y_A - ||G - A||\cos\omega t = \rho\sin\omega t - L\cos\omega t \end{aligned}$$

Conseguentemente, il centro di massa C dell'anello è situato nel punto di coordinate

$$x_C = x_G + \frac{3}{2}L\sin\omega t; \qquad y_C = y_G - \frac{3}{2}L\cos\omega t$$

Le velocità dei due centri di massa sono allora

$$\dot{\mathbf{x}}_G = \begin{pmatrix} \dot\rho\cos\omega t - \omega\rho\sin\omega t + L\omega\cos\omega t \\ \dot\rho\sin\omega t + \omega\rho\cos\omega t + L\omega\sin\omega t \end{pmatrix} \qquad \dot{\mathbf{x}}_C = \begin{pmatrix} \dot\rho\cos\omega t - \omega\rho\sin\omega t + \frac{5}{2}L\omega\cos\omega t \\ \dot\rho\sin\omega t + \omega\rho\cos\omega t + \frac{5}{2}L\omega\sin\omega t \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \dot{\mathbf{x}}_G^2 = \dot\rho^2 + \omega^2\rho^2 + 2L\omega\dot\rho + L^2\omega^2; \qquad \dot{\mathbf{x}}_C^2 = \dot{\mathbf{x}}_G^2 + 3L\omega\dot\rho + \frac{21}{4}L^2\omega^2$$

Scegliamo gli assi principali d'inerzia: per l'asta, Gx' diretto come l'asta, Gz' perpendicolare al piano Oxy, il terzo perpendicolare ai primi due. Per l'anello, CX diretto come $(B-C)$, CY come il diametro perpendicolare a $(B-C)$, CZ come l'asse di simmetria passante per C. Notiamo inoltre che la velocità angolare dell'asta è $\boldsymbol{\omega}$, sempre diretto come Gz', mentre quella dell'anello è

$$\omega\mathbf{k} + \dot\theta\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} \dot\theta \\ \omega\sin\theta \\ \omega\cos\theta \end{pmatrix}$$

Il teorema di König comporta che

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\mathbf{x}}_G^2 + \dot{\mathbf{x}}_C^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{3}\omega^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{2}\dot\theta^2 + \frac{mL^2}{2}\omega^2\sin^2\theta + mL^2\omega^2\cos^2\theta\right)$$

Siccome l'energia potenziale è

$$V = mg(y_G + y_C),$$

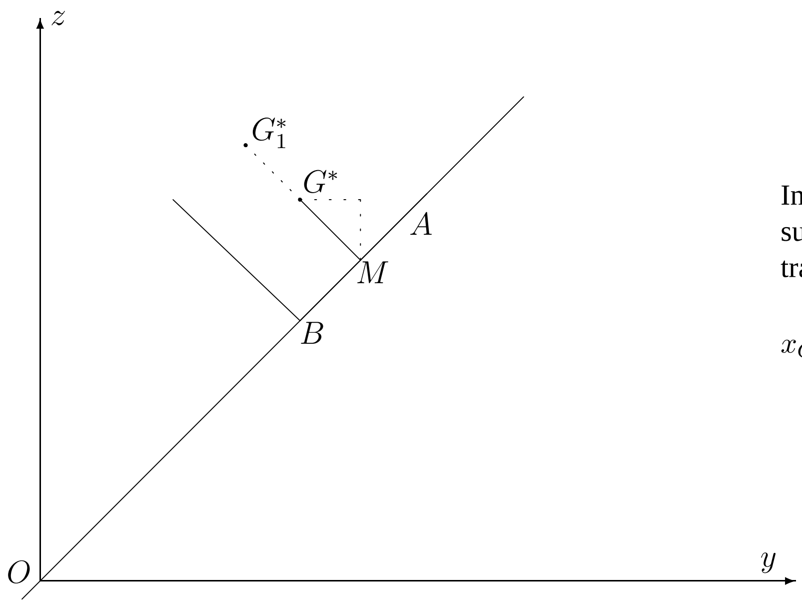
$$\mathscr{L} = m(\dot\rho^2 + \omega^2\rho^2) + \frac{mL^2}{4}(\dot\theta^2 + \omega^2\sin^2\theta + 2\omega^2\cos^2\theta) - 2mg\rho\sin\omega t + \frac{df(\rho,t)}{dt}$$

dove l'ultimo termine può essere trascurato, senza modificare le equazioni del moto.

XIII

Il sistema ha due gradi di libertà: la traslazione del lato AB lungo la retta e la rotazione attorno a essa. Indichiamo con ρ e θ, rispettivamente, la distanza $||B-O||$ e l'angolo formato dalla lamina con il piano verticale.

Prima di tutto descriviamo la posizione del centro di massa G della lamina e G_1 della sbarra CD.



Indichiamo con G^* la proiezione di G sul piano Oyz e con M il punto medio tra B e A: evidentemente, si ha che

$$x_G = \frac{L}{2}\sin\theta; \quad ||G^* - M|| = \frac{L}{2}\cos\theta.$$

Dalla figura si deduce che

$$\begin{aligned}
y_G &= \left(\rho+\frac{L}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{L}{2}\cos\theta\frac{\sqrt{2}}{2}\\
z_G &= \left(\rho+\frac{L}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{L}{2}\cos\theta\frac{\sqrt{2}}{2}\\
y_{G_1} &= \left(\rho+\frac{L}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}-L\cos\theta\frac{\sqrt{2}}{2}\\
z_{G_1} &= \left(\rho+\frac{L}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}+L\cos\theta\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Dunque,

$$\dot{\mathbf{x}}_G=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} L\dot\theta\cos\theta \\ \sqrt{2}\left(\dot\rho+\frac{L}{2}\dot\theta\sin\theta\right) \\ \sqrt{2}\left(\dot\rho-\frac{L}{2}\dot\theta\sin\theta\right)\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}_G^2=\dot\rho^2+\dfrac{L^2}{4}\dot\theta^2\\[2ex] \dot{\mathbf{x}}_{G_1}^2=\dot\rho^2+L^2\dot\theta^2\end{cases}$$

Per determinare l'energia cinetica della lamina, scegliamo gli assi principali d'inerzia rispetto a G: GX diretto come $(A-B)$, GY diretto come $(G-M)$, GZ, uscente dal piano della lamina e perpendicolare a essa. Il tensore d'inerzia della lamina è:

$$\mathbb{I}_G=\begin{pmatrix}\frac{mL^2}{12} & 0 & 0\\ 0 & \frac{mL^2}{12} & 0\\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{6}\end{pmatrix}$$

in quanto, ad es.,

$$I_1=\frac{m}{L^2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}Y^2dXdY$$

La velocità angolare è data da $\dot\theta\mathbf{e}_1$. Allora,

$$T_{\text{lamina}}=\frac{m}{2}\left(\dot\rho^2+\frac{L^2}{4}\dot\theta^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{12}\dot\theta+\frac{mL^2}{12}\cdot 0+\frac{mL^2}{6}\cdot 0\right)=\frac{m}{2}\left(\dot\rho^2+\frac{L^2}{3}\dot\theta^2\right)$$

La sbarra CD ruota attorno alla retta $z=y$ in modo tale che tutti i suoi punti hanno la stessa velocità, che è quella di G_1. Pertanto,

$$T_{\text{asta}}=\frac{m}{2}(\dot\rho^2+L^2\dot\theta^2)$$

Il sistema è soggetto alla forza peso. Dunque, infine,

$$V=mg(z_G+z_{G_1})=mg\sqrt{2}\left(\rho+\frac{3}{2}L\cos\theta\right)+\text{cost.}$$

$$\mathscr{L}=m\left[\dot\rho^2+\frac{2}{3}L^2\dot\theta^2+g\sqrt{2}\left(\rho+\frac{2}{3}L\cos\theta\right)\right]$$

XIV

Il sistema ha tre gradi di libertà: la traslazione lungo la guida rettilinea e le due rotazioni piane, una attorno alla guida stessa, l'altra attorno all'asse verticale Oz. Indichiamo con

$$\rho = ||G - O||, \quad \theta, \quad \phi$$

le variabili lagrangiane che descrivono il moto del sistema. Per determinare l'energia cinetica faremo uso del teorema di König e a tal fine valutiamo preliminarmente la posizione e la velocità del centro di massa. Come si deduce facilmente dalla figura,

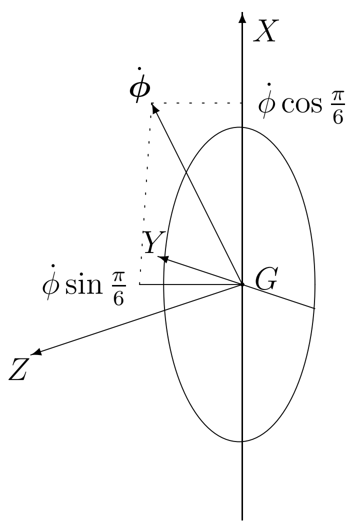
$$\mathbf{x}_G = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \rho\cos\phi \\ \rho\sin\phi \\ \sqrt{3}\rho \end{pmatrix} \qquad \dot{\mathbf{x}}_G = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot\rho\cos\phi - \rho\dot\phi\sin\phi \\ \dot\rho\sin\phi + \rho\dot\phi\cos\phi \\ \sqrt{3}\dot\rho \end{pmatrix} \Longrightarrow \dot{\mathbf{x}}_G^2 = \frac{1}{4}(4\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2)$$

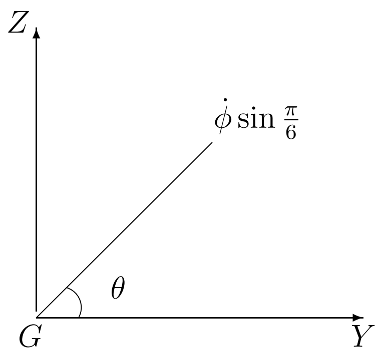
Calcoliamo ora il contributo rotazionale

$$T' = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

dopo aver scelto quali assi principali d'inerzia dell'anello: GX diretto come $B - G$, GY diretto come il diametro perpendicolare a AB e GZ come la perpendicolare al piano dell'anello passante per G. Evidentemente si ha $I_3 = mR^2 = 2I_1 = 2I_2$ e, inoltre, rispetto agli assi principali d'inerzia, la velocità angolare ha componenti

$$\omega_X = \dot\theta + \dot\phi\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \omega_Y = \frac{1}{2}\dot\phi\cos\theta, \qquad \omega_Z = \frac{1}{2}\dot\phi\sin\theta$$





Infine, tenendo conto dei calcoli eseguiti,

$$T = \frac{m}{8}(4\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2) + \frac{mR^2}{4}\left(\dot\theta^2 + 3\frac{\dot\phi^2}{4} + \sqrt{3}\dot\theta\dot\phi + \frac{\dot\phi^2}{4}\cos^2\theta + \frac{\dot\phi^2}{2}\sin^2\theta\right); \qquad V = \frac{1}{2}mg\rho$$

XV

Il sistema ha un solo grado di libertà: la rotazione attorno all'asse Oz. Supponiamo che all'istante iniziale G si trovi sul piano Oxy, dunque che l'arco di circonferenza percorso a ogni istante sia $\dot{s}t$, con angolo al centro $\theta = \frac{\dot{s}}{R}t$. Inoltre,

$$\dot{s} = \text{costante} \Longrightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{s}}{R}$$

Le coordinate del baricentro sono allora

$$x_G = R\cos\theta\cos\phi; \qquad y_G = R\cos\theta\sin\phi; \qquad z_G = R\sin\theta,$$

dove ϕ è la coordinata lagrangiana che descrive la rotazione attorno all'asse verticale.

Se scegliamo la terna principale d'inerzia $GXYZ$ in modo che l'asse GX sia diretto come la sbarra, l'asse GY come la tangente in G alla guida e GZ perpendicolare a entrambi, la velocità angolare nel moto della sbarra si decompone come

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_3 + \dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_1 + \dot{\phi}\cos\theta\mathbf{e}_2$$

A questo punto è sufficiente applicare il teorema di König per valutare l'energia cinetica e notare che l'energia potenziale vale

$$V = mgR\sin\theta$$

Dunque,

$$T = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{1}{2}(I_X\omega_X^2 + I_Y\omega_Y^2 + I_Z\omega_Z^2) =$$

$$\frac{m}{2}(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\phi}^2\cos^2\theta) + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{3}(\dot{\phi}^2\cos^2\theta + \dot{\theta}^2).$$

Allo stesso risultato si poteva ovviamente pervenire calcolando la sola energia cinetica di rotazione attorno al punto fisso O.

Scrivendo la lagrangiana come differenza delle espressioni trovate per T e V, si può osservare che c'è un termine costante in T e che l'energia potenziale dipende esplicitamente dal tempo, ma non dalla variabile lagrangiana. È allora immediato verificare che

$$\mathscr{L} = \frac{2}{3}mR^2\dot{\phi}^2\cos^2\theta + \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3}m\dot{s}^2t + \frac{mgR^2}{\dot{s}}\cos\theta\right)$$

Pertanto, la lagrangiana equivalente

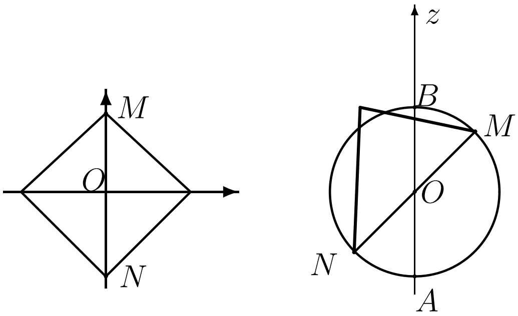
$$\mathscr{L}' = \frac{2}{3}mR^2\dot{\phi}^2\cos^2\theta$$

porta all'equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\cos^2\theta) = 0$$

che non dipende dal contributo della forza peso.

XVI



Il sistema ha due gradi di libertà: la rotazione della diagonale MN e quella della lamina attorno alla diagonale stessa. Siano ϕ e θ le corrispondenti coordinate lagrangiane. Notiamo inoltre che il centro di massa del sistema è fisso nell'origine, per cui la funzione di Lagrange si riduce alla

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}\mathbb{I}\mathbf{\Omega}$$

Valutiamo il tensore d'inerzia rispetto a un sistema con centro in O ma con assi <u>paralleli</u> ai lati del quadrato; successivamente, per ottenere quello relativo agli assi di figura, applichiamo una trasformazione di similitudine. Le componenti del tensore sono (essendo $R\sqrt{2}$ la lunghezza del lato del quadrato)

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}I_{zz} = \frac{m}{2R^2}\int_{-R\frac{\sqrt{2}}{2}}^{R\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{-R\frac{\sqrt{2}}{2}}^{R\frac{\sqrt{2}}{2}} y^2 dxdy = \frac{m}{2R^2}\cdot R\sqrt{2}\cdot 2\frac{1}{3}\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}mR^2$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\frac{1}{2}I_{zz} = \frac{m}{2R^2}\int_{-R\frac{\sqrt{2}}{2}}^{R\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{-R\frac{\sqrt{2}}{2}}^{R\frac{\sqrt{2}}{2}} xydxdy = -\frac{m}{2R^2}\left(\frac{x^2}{2}\right)_{-R\frac{\sqrt{2}}{2}}^{R\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{y^2}{2}\right)_{-R\frac{\sqrt{2}}{2}}^{R\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0$$

Conseguentemente, la rotazione di $\frac{\pi}{4}$ trasforma il tensore in

$$\mathbb{I}_O = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{6}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}mR^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}mR^2 \end{pmatrix}$$

<u>Commento</u>: anche le diagonali sono assi principali d'inerzia, in quanto sono assi di simmetria.

La velocità angolare totale si ottiene sommando i seguenti contributi

$$\mathbf{\Omega} = \omega\mathbf{k} + \dot{\theta}\mathbf{j}' + \dot{\phi}\mathbf{u}$$

dove $\mathbf{u}$ è un versore normale al piano della circonferenza. Ciò significa che $\dot{\phi}\mathbf{u}$ ha componente nulla sull'asse principale Oy' ma ha componenti

$$\dot{\phi}\cos\theta \quad \text{e} \quad \dot{\phi}\sin\theta$$

rispettivamente lungo Ox' eOz'. Infine, $\omega\mathbf{k}$ ha componente $\omega\cos\phi$ rispetto a Oy'. La componente $\omega\sin\phi$ a essa ortogonale, va a sua volta proiettata sui due rimanenti assi principali d'inerzia. In conclusione:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega\sin\phi\cos\theta \\ \omega\cos\phi \\ \omega\sin\phi\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\phi}\cos\theta \\ 0 \\ \dot{\phi}\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{L} = \frac{1}{12} mR^2 [\cos^2\theta(\omega\sin\phi + \dot\phi)^2 + (\omega\cos\phi + \dot\theta)^2 + 2\sin^2\theta(\omega\sin\phi + \dot\phi)^2]$$

XVII

Il sistema ha due gradi di libertà; il moto del centro di massa sulla guida e la rotazione del disco. Indichiamo con $\rho = \parallel (G-O) \parallel$ e θ le variabili lagrangiane che corrispondono a tali gradi di libertà, con Ω la velocità angolare costante della guida. Il calcolo dell'energia cinetica si basa sul teorema di König:

$$T = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}_G^2 + \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

con le usuali notazioni. Il calcolo è completato tenendo conto che

$$\dot x_G = \begin{pmatrix} \dot\rho\cos\Omega t - \rho\Omega\sin\Omega t \\ \dot\rho\sin\Omega t + \rho\Omega\cos\Omega t \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mr^2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \dot\theta \\ \Omega\sin\theta \\ \Omega\cos\theta \end{pmatrix}$$

Dunque, l'energia cinetica è

$$T = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\Omega^2) + \frac{mr^2}{4}\left(\frac{\dot\theta^2}{2} + \frac{1}{2}\Omega^2\sin^2\theta + \Omega^2\cos^2\theta\right).$$

L'energia potenziale è d'altra parte

$$V = k\frac{\rho^2}{2} + mg\rho\sin\Omega t.$$

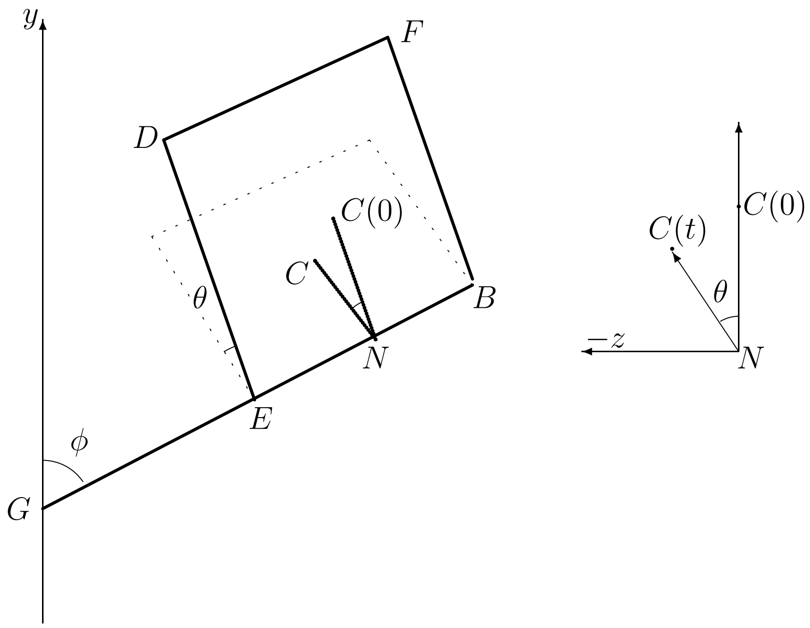
XVIII

Il sistema ha due gradi di libertà: la rotazione (piana) del corpo rigido attorno al punto G e la rotazione (piana) attorno ad AB, asse istantaneo di rotazione. Indichiamo con ϕ e θ, rispettivamente, i corrispondenti angoli di rotazione.

Prima di tutto individuiamo la posizione del centro di massa C della lamina quadrata. Indicando con N il punto medio del lato EB, decomponiamo dapprima il vettore $C - N$ su due direzioni ortogonali (pensando che C ruoti attorno a N in senso antiorario su una circonferenza di raggio $\frac{L}{2}$). Per questo, supponiamo che inizialmente la lamina sia nel piano verticale e che in un istante generico sia ruotata di θ attorno AB: allora

$$(C-N) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{L}{2}\cos\theta \\ \frac{L}{2}\sin\theta \end{pmatrix}$$

dove le componenti sono, rispettivamente, lungo la direzione di $(B-N)$, $(C(0)-N)$ (perpendicolare all'asta in N e appartenente a Oxy) e $-\mathbf{k}$, direzione ortogonale al piano Oxy, con verso entrante nel piano di figura.



Ma la decomposizione va ora riferita al sistema con origine in N e parallelo a $Oxyz$, dunque è necessaria una rotazione piana di un angolo ϕ in senso orario:

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{L}{2}\cos\theta \\ -\frac{L}{2}\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{L}{2}\sin\phi\cos\theta \\ \frac{L}{2}\cos\phi\cos\theta \\ -\frac{L}{2}\sin\theta \end{pmatrix}$$

Infine, c'è da considerare la traslazione di N rispetto a O, per cui, rispetto al sistema inerziale $Oxyz$, si ha

$$\mathbf{x}_C = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}L\cos\phi - \frac{L}{2}\sin\phi\cos\theta \\ 2L + \frac{3}{2}L\sin\phi + \frac{L}{2}\cos\phi\cos\theta \\ -\frac{L}{2}\sin\theta \end{pmatrix}$$

Conseguentemente, la velocità del centro di massa è

$$\dot{\mathbf{x}}_C = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}L\dot{\phi}\sin\phi - \frac{L}{2}\dot{\phi}\cos\phi\cos\theta + \frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\phi\sin\theta \\ \frac{3}{2}L\dot{\phi}\cos\phi - \frac{L}{2}\dot{\phi}\sin\phi\cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\phi\sin\theta \\ -\frac{L}{2}\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix}$$

da cui, per il calcolo dell'energia cinetica, si ottiene anche che

$$\dot{\mathbf{x}}_C^2 = \frac{9}{4}L^2\dot{\phi}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\phi}^2\cos^2\theta + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 - \frac{3}{2}L^2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin\theta$$

etc.

Passiamo ora all'energia cinetica di rotazione. Per quel che riguarda il tensore d'inerzia della lamina rispetto al centro di massa, tenendo conto che gli integrali che lo compongono sono del tipo

$$\frac{M}{L^2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} F(x,y)dx\,dy,$$

avremo che

$$\mathbb{I}_C = \begin{pmatrix} \frac{ML^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ML^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ML^2}{6} \end{pmatrix}$$

dove si sono scelti gli assi principali d'inerzia Gx' diretto come $(B-N)$, Gy' come $(G-N)$ e Gz' tale da completare una terna destrorsa.

Inoltre, la velocità angolare del corpo rigido rispetto a tale terna si decompone come

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\phi}\sin\theta \\ \dot{\phi}\cos\theta \end{pmatrix}$$

da cui si può facilmente valutare

$$T'_{\text{lamina}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathbb{I}_C\boldsymbol{\omega}.$$

L'energia cinetica della sbarra, essendo il suo centro di massa fermo è semplicemente pari a

$$T_{\text{sbarra}} = \frac{1}{2}\frac{(4L)^2}{12}m\dot{\phi}^2.$$

L'ultimo passaggio per ottenere la funzione di Lagrange si esegue valutando l'energia potenziale gravitazionale

$$V = g(my_G + My_C) = Mg\left(\frac{3}{2}L\sin\phi + \frac{L}{2}\cos\phi\cos\theta\right) + \text{ costante}$$

XIX

Il sistema ha due gradi di libertà, corrispondenti alle due rotazioni piane, dell'intero sistema attorno all'asse verticale e di AC nel piano OYZ. Indichiamo con θ e φ le coordinate lagrangiane che descrivono tali rotazioni e con $Oxyz$ un sistema di riferimento inerziale tale che Oz=OZ. È conveniente ricavare separatamente le energie cinetiche e potenziali di ciascuna asta. Infatti, per quel che riguarda AB il calcolo è molto semplice, in quanto

$$T_{AB} = \frac{1}{2}(\dot{\theta}\mathbf{k})\mathbb{I}_A(\dot{\theta}\mathbf{k})$$

dove $\mathbb{I}_A$ è il tensore d'inerzia valutato rispetto a un sistema di assi principali d'inerzia, diretti come $G_1 - O$, come un asse perpendicolare a quest'ultimo, complananare a esso e a Oz. Il terzo asse risulta dunque ortogonale a Oz, per cui le proiezioni di $\dot{\theta}\mathbf{k}$ su tali assi sono

$$\dot{\theta}\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\dfrac{\pi}{6} \\ \\ \dot{\theta}\sin\dfrac{\pi}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siccome nel calcolo del tensore si esegue solo l'integrale

$$\frac{2}{L\sqrt{3}}m\int_0^{L\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 dx,$$

si ha infine che

$$T_{AB} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\dfrac{\pi}{6} \\ \\ \dot{\theta}\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \\ 0 & \dfrac{mL^2}{4} & 0 \\ \\ 0 & 0 & \dfrac{mL^2}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\dfrac{\pi}{6} \\ \\ \dot{\theta}\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{32}mL^2\dot{\theta}^2$$

L'energia potenziale gravitazionale è costante e vale

$$V_{AB} = mg\frac{\sqrt{3}}{4}L\cos\frac{\pi}{6} = mg\frac{3}{8}L.$$

Anche per la seconda sbarra non è conveniente usare il teorema di König, ma piuttosto sfruttare il fatto che essa ha un punto fisso. Scegliamo gli assi principali: il primo diretto come $G_2 - A$, il secondo ortogonale all'asta in A e complanare con le due aste, il terzo tale da formare una terna destrorsa. Conseguentemente, rispetto a tale sistema di assi, se φ indica l'angolo tra AC e Oz,

$$\dot{\theta}\mathbf{k} + \dot{\varphi}\mathbf{k}' = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\varphi \\ \dot{\theta}\sin\varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

per cui l'energia cinetica della seconda sbarra è

$$T_{AC} = \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2\sin^2\varphi + \frac{mL^2}{3}\dot{\varphi}^2\right)$$

L'energia potenziale gravitazionale relativa alla seconda sbarra è

$$V_{AC} = mg\frac{L}{2}\cos\varphi.$$

Infine valutiamo l'energia potenziale di accoppiamento tra i due centri di massa. Notiamo che la distanza tra i due centri di massa non dipende dal moto di rotazione del piano verticale.

È dunque sufficiente valutare $G_2 - G_1$ in tale piano:

$$G_2 - G_1 = \begin{pmatrix} \frac{L}{2}\sin\varphi \\ \\ \frac{L}{2}\cos\varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{L\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{6} \\ \\ \frac{1}{2}\frac{L\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L}{2}\left(\sin\varphi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \\ \\ \frac{L}{2}\left(\cos\varphi - \frac{3}{4}\right) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow ||G_2 - G_1||^2 = \frac{L^2}{8}\left(\frac{7}{2} - \sqrt{3}\sin\varphi - 3\cos\varphi\right).$$

Lo stesso risultato si poteva ottenere mediante il teorema di Carnot:

$$||G_2 - G_1||^2 = ||G_2 - A||^2 + ||G_1 - A||^2 - 2||G_2 - A||\,||G_1 - A||\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

Tenendo conto dei calcoli fatti, e a meno di costanti additive,

$$\mathscr{L} = \frac{1}{32}mL^2\dot\theta^2 + \frac{mL^2}{6}(\dot\theta^2\sin^2\varphi + \dot\varphi^2) - mg\frac{L}{2}\cos\varphi + \frac{kL^2}{16}(\sqrt{3}\sin\varphi + 3\cos\varphi)$$

Si noti che l'equazione di Lagrange per la variabile θ si traduce nella legge di conservazione

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{3}\sin^2\varphi\right)\dot\theta\right] = 0.$$

XX

Il sistema ha tre gradi di libertà, corrispondenti alle due rotazioni piane, dell'asta nel piano inclinato di $\frac{\pi}{4}$ rispetto a OX e quella dell'asta attorno all'asse oz, e al moto del centro di massa sulla retta OX. Indichiamo con

$$\rho = ||G - O||, \theta, \phi$$

le coordinate lagrangiane relative a detti gradi di libertà. Applicando il teorema di König, si ottiene l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2) + \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

dove

$$I_1 = 0, \quad I_2 = \frac{mL^2}{3} = I_3,$$

e la velocità angolare si decompone lungo gli assi principali d'inerzia secondo

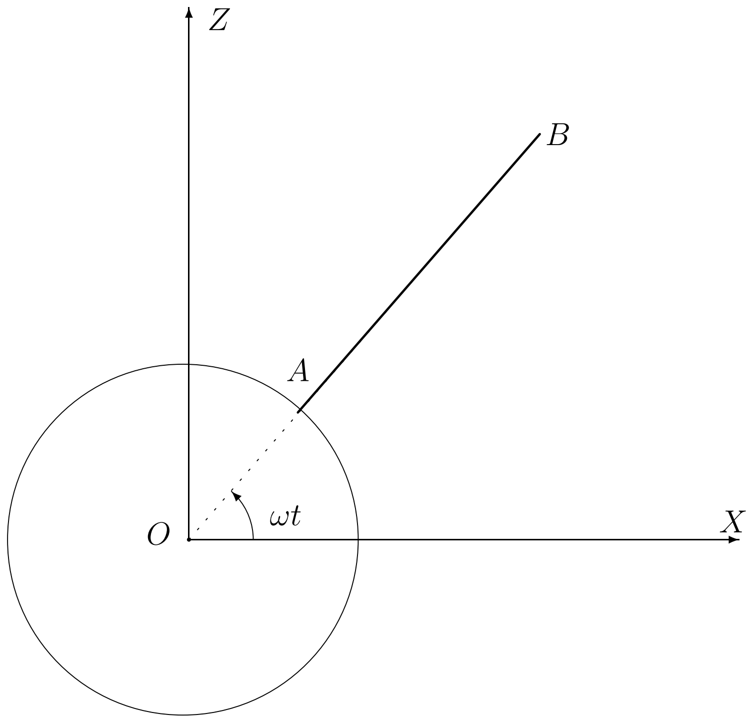
$$\boldsymbol{\omega} = \dot\phi\mathbf{k} + \dot\theta\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \dot\phi\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta \\ \dot\phi\cos\frac{\pi}{4} + \dot\theta \\ \dot\phi\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta \end{pmatrix}$$

Siccome

$$V = \frac{k}{2}\rho^2,$$

la funzione di Lagrange è ricavata.

$\boxed{\text{XXI}}$



Per determinare l'energia cinetica della sbarra, facciamo uso del teorema di König. Determiniamo prima di tutto la posizione del baricentro G rispetto a un sistema di riferimento inerziale $Oxyz$, per il quale $Oz = OZ$ e l'asse OX forma un angolo $\theta(t)$ con l'asse Ox. Questo angolo è anche l'unica coordinata lagrangiana necessaria a descrivere il moto del sistema.

$$\mathbf{x}_G = \begin{pmatrix} 2L\cos\omega t\cos\theta \\ 2L\cos\omega t\sin\theta \\ 2L\sin\omega t \end{pmatrix} \qquad \dot{\mathbf{x}}_G = \begin{pmatrix} -2L(\omega\sin\omega t\cos\theta + \dot\theta\cos\omega t\sin\theta) \\ 2L(-\omega\sin\omega t\sin\theta + \dot\theta\cos\omega t\cos\theta) \\ 2L\omega\cos\omega t \end{pmatrix}$$

da cui

$$T_G = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}_G^2 = 2mL^2(\omega^2 + \dot\theta^2\cos^2\omega t)$$

L'energia cinetica di rotazione va calcolata rispetto a un sistema di assi principali d'inerzia in cui Gx' è diretto come $(B-G)$ e Gz' come $\boldsymbol{\omega}$. Avremo dunque

$$T' = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) = \frac{1}{2}\left(0\cdot\dot\theta^2\cos^2\omega t + \frac{mL^2}{3}\dot\theta^2\sin^2\omega t + \frac{mL^2}{3}\omega^2\right)$$

$$\Longrightarrow \mathscr{L} = T_G + T' - mgz_G = \frac{mL^2\dot\theta^2}{2}\left(4\cos^2\omega t + \frac{1}{3}\sin^2\omega t\right) + \frac{13}{6}mL^2\omega^2 - 2mgL\sin\omega t.$$

Si noti che l'equazione dl moto si riduce facilmente a

$$\frac{mL^2}{2}\dot\theta\left(4\cos^2\omega t + \frac{1}{3}\sin^2\omega t\right) = \text{costante}$$

trascurando i termini che si possono scrivere come derivata totale rispetto al tempo di funzioni di θ e notando che

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \theta} = 0.$$

$$\boxed{\boxed{\text{XXII}}}$$

L'asta non ha punti fissi. Applichiamo il teorema di König.

Prima di tutto determiniamo la posizione del centro di massa G: detto θ l'angolo che l'asta forma con la verticale passante per A, e ω la velocità angolare di A attorno all'origine,

$$\mathbf{x}_G = \begin{pmatrix} L\cos\omega t + L\sin\theta\sin\omega t \\ L\sin\omega t - L\sin\theta\cos\omega t \\ L\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \dot{\mathbf{x}}_G = \begin{pmatrix} -\omega L\sin\omega t + L\dot\theta\cos\theta\sin\omega t + L\omega\sin\theta\cos\omega t \\ L\omega\cos\omega t - L\dot\theta\cos\theta\cos\omega t + L\omega\sin\theta\sin\omega t \\ -L\dot\theta\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Conseguentemente,

$$\dot{\mathbf{x}}_G^2 = L^2(\omega^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) + \omega L^2(\omega + 2\dot\theta\cos\theta)$$

Scegliendo come assi principali di inerzia: Gx' diretto come $B-G$, Gy' ortogonale a quest'ultimo e appartenente al piano tangente in A, Gz' diretto come $A-O$, la velocità angolare totale,

$$\mathbf{\Omega} = \omega\mathbf{k} + \dot\theta\mathbf{k}',$$

si decompone in

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \omega\cos\theta \\ \Omega_2 &= \omega\sin\theta \\ \Omega_3 &= \dot\theta \end{aligned}$$

L'energia cinetica relativa al sistema di riferimento in traslazione col baricentro è allora

$$T' = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}(\omega^2\sin^2\theta + \dot\theta^2)$$

in quanto le uniche componenti non nulle del tensore d'inerzia $\mathbb{I}_G$ sono

$$I_2 = I_3 = \frac{m}{12}(2L)^2.$$

Infine, la funzione di Lagrange è, semplicemente,

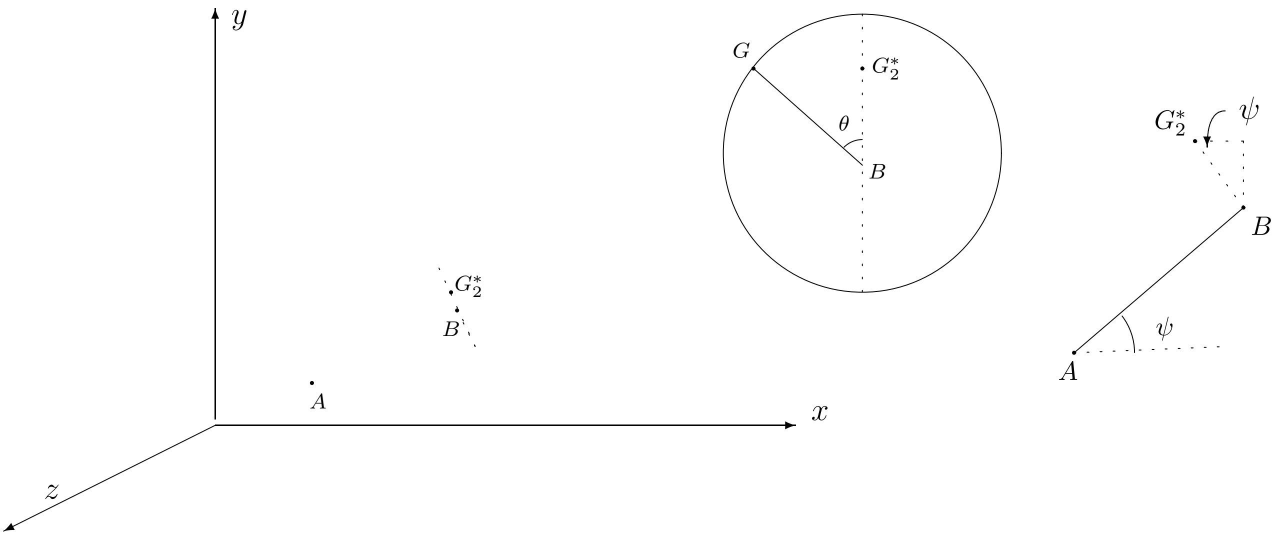
$$\mathscr{L} = \frac{2}{3}mL^2(\omega^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) + mgL\cos\theta + \frac{m\omega L^2}{2}\frac{d}{dt}(\omega t + 2\sin\theta)$$

dove si è messo in evidenza il termine di gauge (l'ultimo), che non influenza le equazioni del moto.

XXIII

Il sistema ha tre gradi di libertà:

1. la traslazione del centro di massa A dell'anello (descritta dalla coordinata x);
2. la rotazione piana dell'asta AB (descritta dall'angolo ψ che AB forma con l'asse orizzontale;
3. la rotazione piana dell'asta BC attorno a un asse diretto come AB (descritta dall'angolo θ).



Per valutare la funzione di Lagrange, dobbiamo prima di tutto individuare posizioni e velocità dei centri di massa dei tre corpi rigidi. Indichiamo con G_1 e G_2 i centri di massa di AB e BC e osserviamo che solo G_2 si muove fuori dal piano Oxy: ruota su una circonferenza di raggio R, centro B, e perpendicolare a AB. Abbiamo dunque,

$$\mathbf{x}_A = \begin{pmatrix} x \\ R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{G_1} = \begin{pmatrix} x + L\cos\psi \\ R + L\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{G_2} = \begin{pmatrix} x + 2L\cos\psi - R\cos\theta\sin\psi \\ R + 2L\sin\psi + R\cos\theta\cos\psi \\ R\sin\theta \end{pmatrix},$$

Conseguentemente,

$$\dot{\mathbf{x}}_A = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{x}}_{G_1} = \begin{pmatrix} \dot{x} - L\dot{\psi}\sin\psi \\ L\dot{\psi}\cos\psi \\ 0 \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{x}}_{G_2} = \begin{pmatrix} \dot{x} - 2L\dot{\psi}\sin\psi + R\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi - R\dot{\psi}\cos\theta\cos\psi \\ 2L\dot{\psi}\cos\psi - R\dot{\theta}\sin\theta\cos\psi - R\dot{\psi}\cos\theta\sin\psi \\ R\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix}$$

I moduli quadrati di questi vettori forniscono

$$\begin{aligned}
\dot{x}_A^2 &= \dot{x}^2 \\
\dot{x}_{G_1}^2 &= \dot{x}^2 + L^2\dot{\psi}^2 - 2L\dot{x}\dot{\psi}\sin\psi \\
\dot{x}_{G_2}^2 &= \dot{x}^2 + 4L^2\dot{\psi}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\psi}^2\cos^2\theta \\
&\quad +2\dot{x}(-2L\dot{\psi}\sin\psi + R\dot{\theta}\sin\theta\sin\psi - R\dot{\psi}\cos\theta\cos\psi) - 4LR\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta
\end{aligned}$$

e, conseguentemente, l'energia cinetica relativa ai centri di massa:

$$T_{cm} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{x}_{G_2}^2) + \frac{M}{2}\dot{x}_{G_1}^2$$

Siccome l'energia di rotazione rispetto ai centri di massa è data da

$$\begin{aligned} T'_{\text{anello}} &= \frac{m}{2}\dot{x}^2, \text{ (a causa del rotolamento)} \\ T'_{AB} &= \frac{1}{2}M\frac{L^2}{3}\dot{\psi}^2 \\ T'_{BC} &= \frac{m}{2}\left(0 \cdot \dot{\psi}^2\cos^2\theta + \frac{mR^2}{3}\dot{\psi}^2\sin^2\psi + \frac{mR^2}{3}\dot{\theta}^2\right) \end{aligned}$$

possiamo sommare tutti i contributi calcolati in (teorema di König)

$$T = T_{cm} + T'_{\text{anello}} + T'_{AB} + T'_{BC}$$

Trascurando termini costanti, abbiamo inoltre che l'energia potenziale è data da

$$V = Mgy_{G_1} + mgy_{G_2} = g[ML\sin\psi + m(2L\sin\psi + R\cos\theta\cos\psi)]$$

Si noti che, una volta scritta

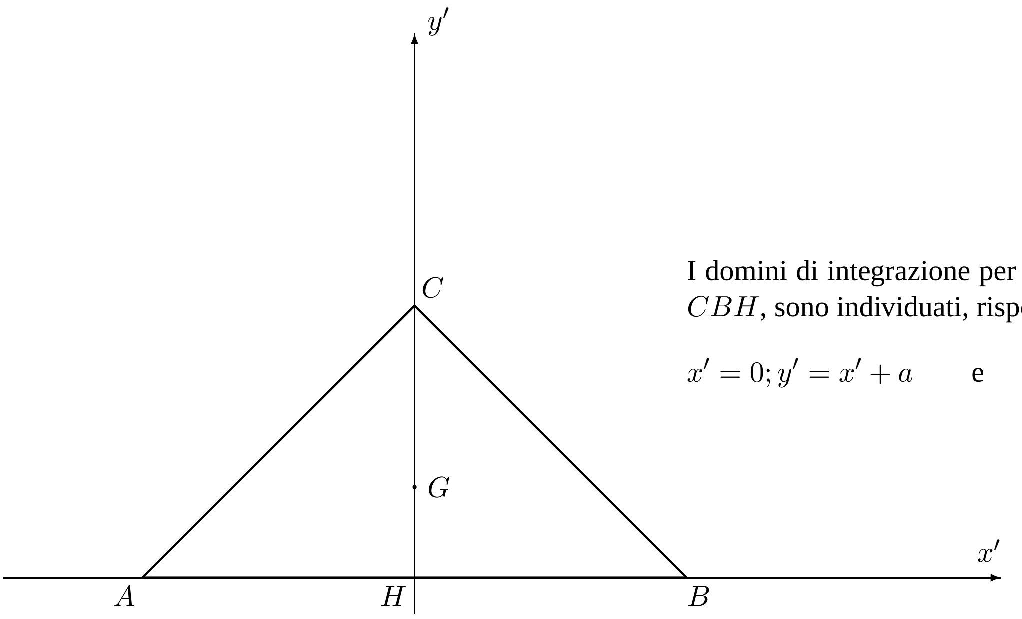
$$\mathscr{L} = T - V$$

si osserva che la variabile x non vi appare esplicitamente e che quindi un'equazione di Lagrange si riduce a

$$\ddot{x} = 0.$$

$\boxed{\text{XXIV}}$

I gradi di libertà sono due, il moto del centro di massa su una retta e la rotazione piana della lamina. Indichiamo con z e θ le corrispondenti variabili lagrangiane. Per quello che riguarda la geometria delle masse, notiamo dapprima che;



I domini di integrazione per i due triangoli CHA e CBH, sono individuati, rispettivamente, dalle rette

$x' = 0; y' = x' + a$ e $x' = 0; y' = -x' + a$

Il centro di massa, punto d'intersezione delle mediane, giace ad altezza $\dfrac{a}{3}$ sull'asse Hy'. Infatti, essendo a^2 l'area del triangolo, e, dunque, $\dfrac{m}{a^2}$ la densità, si ha

$$my'_G = \frac{m}{a^2}\int_{-a}^{0}\int_{0}^{x+a} y\,dydx + \frac{m}{a^2}\int_{0}^{a}\int_{0}^{-x+a} y\,dydx = \frac{1}{3}ma.$$

Per quel che riguarda il tensore d'inerzia rispetto al sistema solidale di figura, avremo che:

$$I_{x'x'} = \frac{m}{a^2}\int_{-a}^{0}\int_{0}^{x+a} y^2\,dydx + \frac{m}{a^2}\int_{0}^{a}\int_{0}^{-x+a} y^2\,dydx = \frac{ma^2}{6}$$

$$I_{y'y'} = \frac{m}{a^2}\int_{-a}^{0}\int_{0}^{x+a} x^2\,dydx + \frac{m}{a^2}\int_{0}^{a}\int_{0}^{-x+a} x^2\,dydx = \frac{ma^2}{6}$$

$$I_{x'y'} = -\frac{m}{a^2}\int_{-a}^{0}\int_{0}^{x+a} xy\,dydx - \frac{m}{a^2}\int_{0}^{a}\int_{0}^{-x+a} xy\,dydx = 0$$

(in quest' ultimo calcolo entrambi gli integrali si annullano). Conseguentemente, il tensore d'inerzia rispetto ad H è dato da:

$$\mathbb{I}_H = \begin{pmatrix} \dfrac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{ma^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{ma^2}{3} \end{pmatrix}$$

Il tensore d'inerzia rispetto al centro di massa è allora dato

$$\mathbb{I}_G = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{3} \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \frac{a^2}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{18} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2ma^2}{9} \end{pmatrix}$$

Con questi calcoli preliminari, abbiamo, relativamente al piano OXZ che:

$$\mathbf{x_G} = \frac{a}{3}\cos\theta\mathbf{I} + z\mathbf{K}$$

Rispetto a un sistema inerziale $Oxyz$,

$$\mathbf{x}_G = \begin{pmatrix} \left(a + \dfrac{a}{2}\cos\theta\right)\cos\omega t \\ \left(a + \dfrac{a}{2}\cos\theta\right)\sin\omega t \\ z \end{pmatrix} \qquad \dot{\mathbf{x}}_G = \begin{pmatrix} -\dfrac{a}{2}\dot\theta\sin\theta\cos\omega t - \omega\left(a + \dfrac{a}{2}\cos\theta\right)\sin\omega t \\ -\dfrac{a}{2}\dot\theta\sin\theta\sin\omega t + \omega\left(a + \dfrac{a}{2}\cos\theta\right)\cos\omega t \\ \dot z \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \dot{\mathbf{x}}_G^2 = \frac{a^2}{4}\dot\theta^2\sin^2\theta + \omega^2\left(a + \frac{a}{2}\cos\theta\right)^2 + \dot z^2.$$

La velocità angolare è sempre diretta come l'ipotenusa AB e, rispetto al sistema di assi principali d'inerzia scelto, si decompone come segue

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot\theta + \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'energia cinetica del corpo è allora, in base al teorema di König,

$$T = \frac{m}{2}\left[\frac{a^2}{4}\dot\theta^2\sin^2\theta + \omega^2\left(a + \frac{a}{2}\cos\theta\right)^2 + \dot z^2\right] + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{18}(\dot\theta + \omega)^2$$

Siccome l'energia potenziale è semplicemente $V = mgz$, si ha infine

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}\left[\frac{a^2}{4}\dot\theta^2\sin^2\theta + \frac{a^2}{4}\omega^2\cos^2\theta + \dot z^2\right] + \frac{ma^2}{36}\dot\theta^2 - mgz$$

dove si sono omessi i termini costanti e quelli lineari in $\dot\theta$.