NOTE SULLA FORMULAZIONE LAGRANGIANA DELLA MECCANICA
Corso di Meccanica Analitica - a.a. 2009/2010

1 Le trasformazioni di punto.

Un sistema di N punti materiali soggetto a r vincoli olonomi indipendenti ha $n = 3N - r$ gradi di libertà se le equazioni di trasformazione

$$\begin{cases} x_\alpha = x_\alpha(q_1, q_2, ..., q_n) \\ y_\alpha = y_\alpha(q_1, q_2, ..., q_n) \\ z_\alpha = z_\alpha(q_1, q_2, ..., q_n) \end{cases} \qquad \alpha = \overline{1, N} \tag{1.1}$$

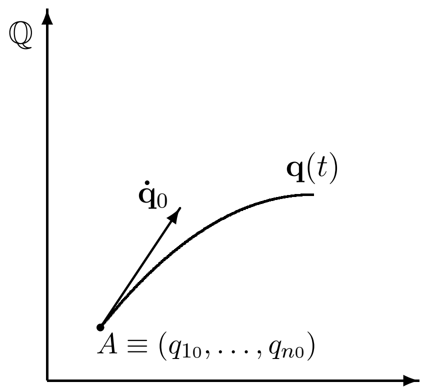
sono risolubili rispetto alle n variabili lagrangiane q. Dal *Teorema della funzione implicita* sappiamo che ciò è garantito, almeno localmente, se la matrice jacobiana

$$\left\| \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial y_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial z_\alpha}{\partial q_i} \right\|$$

ha caratteristica n (cioè rango massimo). Tramite il principio di D'Alembert le (1.1) permettono di ridurre anche il numero delle equazioni differenziali che descrivono il moto del sistema meccanico; se queste ultime possono essere poste in forma normale, tale riduzione porta al sistema di rango $2n$:[1]

$$\ddot{q}_i = F_i(q, \dot{q}) \qquad i = \overline{1, n}. \tag{1.2}$$

Il moto del sistema è rappresentato da una singola curva in uno spazio n-dimensionale (che indicheremo con la lettera $\mathbb{Q}$), detto lo *spazio delle configurazioni* in quanto ogni suo punto rappresenta una *configurazione* di un sistema meccanico ad un dato istante di tempo.



La soluzione del sistema (1.2) dipende dai valori iniziali di q_i e $\dot{q}_i$ $(i = \overline{1, n})$: ciò implica che per ogni punto di $\mathbb{Q}$ c'è una differente curva (parametrizzata dal tempo) per ogni scelta delle velocità $\dot{q}_i$. Se, per es., un punto A di $\mathbb{Q}$ rappresenta la configurazione iniziale del sistema all'istante t_0, l' evoluzione temporale del punto rappresentativo, descritta dalle $q_i = q_i(t)$ $(i = \overline{1, n})$, sarà univocamente determinata, una volta assegnate le ulteriori n condizioni iniziali: $\dot{q}_{i0} = \dot{q}_i(t_0)$ $(i = \overline{1, n})$.

Le velocità generalizzate, calcolate al tempo t_0, fissano una direzione a cui la curva deve essere tangente e selezionano la traiettoria reale. Se si vuole avere quindi una rappresentazione univoca del moto, è sufficiente raddoppiare il numero di variabili indipendenti: nello spazio coordinatizzato dalle variabili $(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ per ogni punto passa una e una sola curva, e le n equazioni del secondo ordine sono sostituite dalle $2n$ del primo:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{dq_i}{dt} \\ \\ \dfrac{d\dot{q}_i}{dt} = F_i(q, \dot{q}) \end{cases} \qquad (i = \overline{1, n}). \tag{1.3}$$

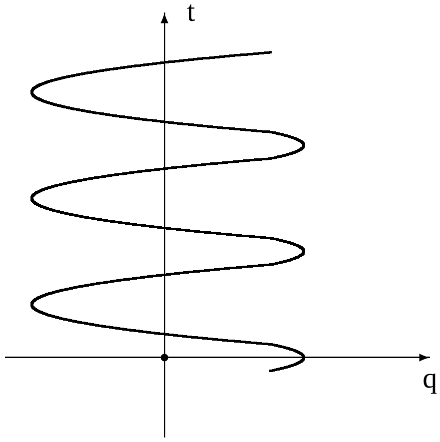
[1] si è qui supposto che le forze attive siano indipendenti dal tempo.

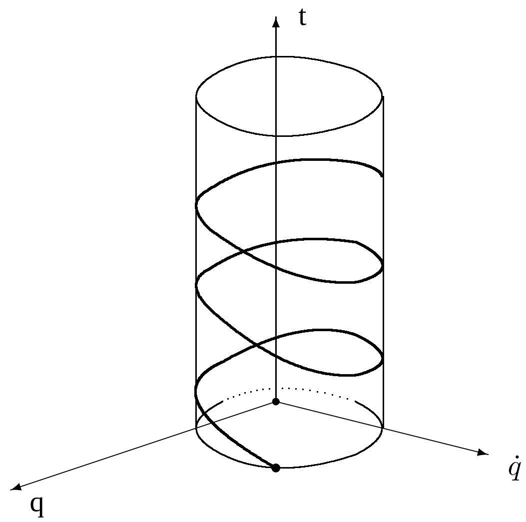
Le velocità generalizzate sono n ulteriori variabili indipendenti: infatti, non essendo nota la legge del moto (almeno in sede di formulazione delle equazioni differenziali), non è possibile stabilire una corrispondenza tra le q e le $\dot{q}$ mediante una derivata temporale.

La curva $c : t \longrightarrow (q(t), \dot{q}(t))$, descritta dal punto rappresentativo in questo spazio $2n$-dimensionale, è detta *estensione* della curva $q_i = q_i(t)$.

Se le forze dipendono esplicitamente dal tempo sarà necessario descrivere il moto in uno spazio con coordinate $(q_i, \dot{q}_i, t)$ affinché per ogni suo punto passi una ed una sola curva.

Esempio 1.1: $q = \cos t$; $\dot{q} = -\sin t$. *In figura: a sinistra è tracciata la curva* $q = \cos t$ *nello spazio* $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$*; a destra la sua estensione.*





Negli sviluppi formali della meccanica analitica un ruolo centrale è giocato da quelle trasformazioni (finite ed infinitesime) che portano le equazioni del moto ad una forma più idonea per l'integrazione; inoltre, come vedremo, saranno altrettanto importanti le trasformazioni che lasciano invariate certe funzioni significative. Una teoria delle trasformazioni è il primo passo per lo sviluppo del formalismo lagrangiano: indichiamo dunque, nel caso più generale, la trasformazione $(q, \dot{q}) \rightarrow (Q, \dot{Q})$ a nuove coordinate e velocità mediante la relazione funzionale

$$\begin{cases} Q_k = Q_k(q, \dot{q}, t) \\ \dot{Q}_k = \dot{Q}_k(q, \dot{q}, t) \qquad (k = \overline{1, n}). \end{cases} \tag{1.4}$$

Un ruolo centrale nella meccanica lagrangiana è giocato dalla seguente sottoclasse delle (1.4):

$$Q_i = Q_i(q, t) \qquad (i = \overline{1, n}). \tag{1.5}$$

Queste trasformazioni si dicono *di punto* in quanto c'è una corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio in cui le coordinate sono le $\{q_i\}$, e quelli dello spazio in cui le coordinate sono le $\{Q_i\}$. La caratteristica essenziale delle (1.5) è di indurre la seguente trasformazione sulle velocità generalizzate:

$$\dot{Q}_i = \frac{dQ_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial Q_i}{\partial t} \qquad (i = \overline{1, n}) : \tag{1.6}$$

le nuove $\{\dot{Q}_i\}$ rappresentano le velocità generalizzate coniugate alle nuove coordinate lagrangiane; in termini geometrici, il vettore tangente in $q(t)$ viene trasformato proprio nel vettore tangente in $Q(t)$.

Sarà d'ora in poi sottinteso che le trasformazioni (1.5) e le (1.6) siano dei diffeomorfismi, vale a dire funzioni invertibili e differenziabili assieme alle trasformazioni inverse.

Dalle precedenti relazioni otteniamo le seguenti proprietà:

$$\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}; \qquad \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \qquad (i, k = \overline{1, n}) \tag{1.7}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial q_k}; \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial q_k}{\partial Q_i} = \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_i} \qquad (i, k = \overline{1, n}). \tag{1.8}$$

Per ottenere la prima delle (1.7) è sufficiente derivare le (1.6) rispetto a $\dot{q}_k$. Le (1.8) seguono invece dal fatto che

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_k \partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_k \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{dQ_i}{dt}.$$

Esercizio: *si scrivano in coordinate cartesiane le equazioni di Newton per un punto materiale soggetto ad una forza centrale. Si trasformino le coordinate cartesiane in coordinate polari e, osservando che le componenti del gradiente si trasformano come:* $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial \rho} cos\theta,$ *si scrivano le equazioni di Newton nelle nuove coordinate.*

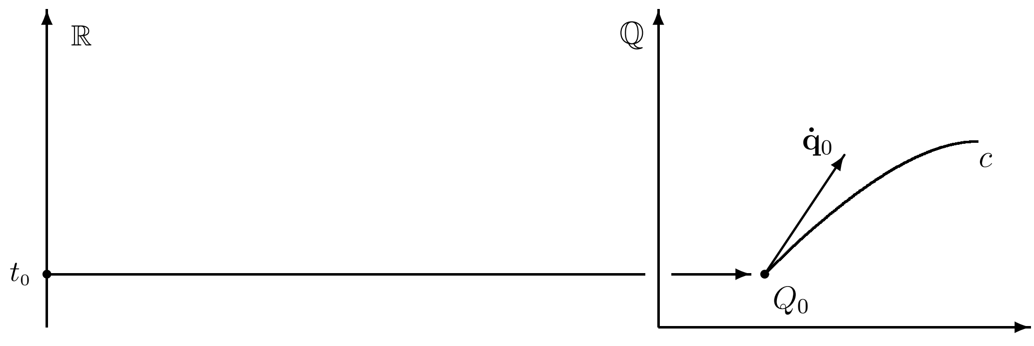
2 Il principio di Hamilton.

Fissate le $2n$ condizioni iniziali, la soluzione delle equazioni del moto individua la curva, parametrizzata dal tempo,

$$c : t \to q(t). \tag{2.1}$$

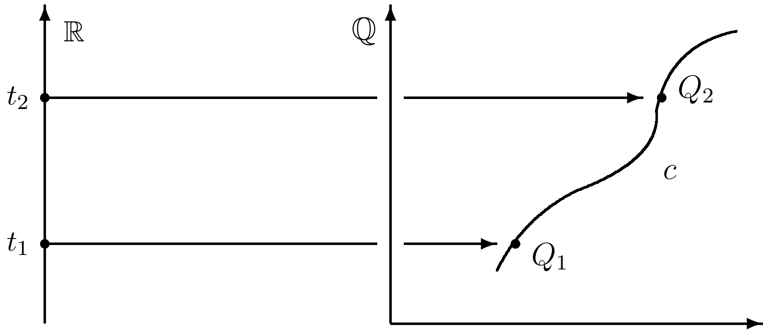
Ogni punto di c fornisce ad ogni istante le coordinate generalizzate e le corrispondenti velocità

$$\dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt}q_i(t) \qquad (i = \overline{1, n}).$$



La (2.1), in quanto individua una curva che fornisce la velocità in ogni punto, è detta *traiettoria*, in contrapposizione al termine *orbita*, usato per un insieme non parametrizzato di punti.

Seguiremo adesso un punto di vista alternativo a quello del problema di Cauchy: la traiettoria del punto rappresentativo su $\mathbb{Q}$ può anche essere completamente specificata fissando due punti Q_1 e Q_2 che corrispondono, rispettivamente alle configurazioni del sistema agli istanti t_1 e t_2 :



La traiettoria deve essere tale che il punto rappresentativo impieghi un tempo $t_2 - t_1$ per arrivare in Q_2; ciò equivale a fissarne la velocità iniziale.

Si ricordi che la soluzione generale di un sistema di equazioni differenziali contiene $2n$ costanti di integrazione arbitrarie; queste possono essere determinate tramite le $2n$ condizioni iniziali sulle q e sulle $\dot{q}$ o, alternativamente, con $2n$ condizioni al contorno; nel secondo caso, però, potrà anche succedere di non trovare soluzioni o di trovarne infinite. Sarà dunque sottintesa l'ipotesi che le condizioni al contorno di cui faremo uso siano scelte in modo che la traiettoria selezionata sia unica.

Esempio 2.1: *Si consideri l'oscillatore armonico unidimensionale con equazione del moto $\ddot{x} = -x$, la cui soluzione generale è:*

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Se scegliamo le seguenti condizioni al contorno: $x(0) = 0$; $x(t_1) = x_1$, *possiamo avere tre possibilità*:

① $t_1 \neq n\pi \Longrightarrow x(t) = \dfrac{x_1}{\sin t_1} \sin t$ *è l'unica soluzione;*

② $t_1 = n\pi$; $x_1 = 0 \Longrightarrow$ *esistono infinite soluzioni;*

③ $t_1 = n\pi$; $x_1 \neq 0 \Longrightarrow$ *non esistono soluzioni.* ✧✧✧

Lungo c la lagrangiana $\mathscr{L}(q(t), \dot{q}(t), t)$ è una funzione nota del tempo: tra gli istanti t_1 e t_2 sarà quindi possibile valutare l'integrale definito

$$\Phi[c] = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt. \tag{2.2}$$

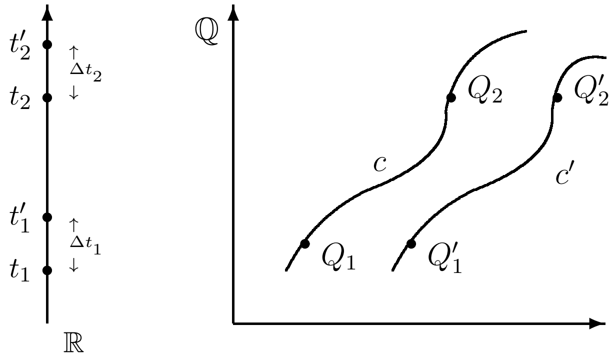
Analizziamo ora come si trasforma il funzionale (2.2) per variazioni infinitesime delle coordinate. Faremo l'unica ipotesi di poter trascurare, durante tutta la trattazione, quantità infinitesime di ordine superiore al primo.

Costruiamo una traiettoria *variata* c' a partire da c, in modo che le coordinate e le velocità dei punti di c' differiscano per quantità infinitesime da quelle dei punti di c:

$$\begin{cases} q_i'(t) = q_i(t) + \delta q_i(t) \\ \\ \dot{q}_i'(t) = \dot{q}_i(t) + \delta \dot{q}_i(t). \end{cases} \qquad (i = \overline{1, n}) \tag{2.3}$$

Si noti che dalle (2.3) otteniamo: $\dfrac{d}{dt}\delta q_i = \delta \dfrac{dq_i}{dt}$

(commutabilità dei procedimenti di derivazione temporale e variazione). Supporremo inoltre che gli istanti iniziale e finale del moto fittizio che avviene lungo c' differiscano di quantità infinitesime da quelli (corrispettivi) del moto lungo c.



$$Q'_1 \equiv (q'_1(t_1 + \Delta t_1), \ldots, q'_n(t_1 + \Delta t_1));$$

$$Q'_2 \equiv (q'_1(t_2 + \Delta t_2), \ldots, q'_n(t_2 + \Delta t_2));$$

δq_i rappresenta la differenza tra q'_i e q_i ad un medesimo istante di tempo.

Valutiamo quindi la variazione:

$$\Delta\Phi[c] = \Phi[c'] - \Phi[c] = \int_{t'_1}^{t'_2} \mathscr{L}(q'(t), \dot{q}'(t), t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt = \tag{2.4}$$

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(q'(t), \dot{q}'(t), t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt}_{\text{contributo dovuto a } \delta q} + \underbrace{\int_{t_2}^{t'_2} \mathscr{L}(q'(t), \dot{q}'(t), t)\, dt - \int_{t_1}^{t'_1} \mathscr{L}(q'(t), \dot{q}'(t), t)\, dt.}_{\text{contributo dovuto a } \Delta t}$$

dove questa espressione si ottiene suddividendo opportunamente gli intervalli di integrazione. Al primo ordine di approssimazione otteniamo per tali due contributi, rispettivamente,

$$\mathscr{L}(q', \dot{q}', t) - \mathscr{L}(q, \dot{q}, t) = \delta\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right),$$

$$\int_{t_\alpha}^{t_\alpha + \Delta t_\alpha} \mathscr{L} dt = \mathscr{L}(t_\alpha) \Delta t_\alpha \qquad\qquad \alpha = 1, 2.$$

Per ottenere quest'ultima approssimazione si è cosí sviluppata in serie, fermandosi al primo ordine, la primitiva $F = \int \mathscr{L} dt$:

$$\int_{t_\alpha}^{t_\alpha + \Delta t_\alpha} \mathscr{L}\, dt = F(t_\alpha + \Delta t_\alpha) - F(t_\alpha) = \left. \frac{d}{dt_\alpha} F(t_\alpha + \Delta t_\alpha) \right|_{\Delta t_\alpha = 0} \Delta t_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2).$$

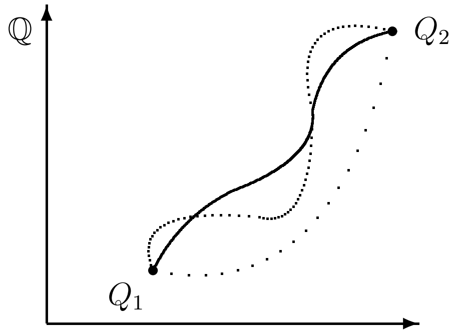
Siccome, integrando per parti, si ha

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i\, dt = \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i\, dt,$$

si ottiene infine, per la variazione cercata, l'espressione

$$\Delta\Phi = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i\, dt + \left[\sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + \mathscr{L} \Delta t \right]_{t_1}^{t_2}. \tag{2.5}$$

La (2.5) è assolutamente generale; dalla sua analisi e da scelte particolari sulle variazioni è possibile operare deduzioni di grande importanza nella meccanica analitica. Quale prima applicazione, facciamo uso della (2.5) per enunciare il principio di Hamilton e, seguendo Lagrange, restringiamo la definizione di variazione in modo da annullare i contributi agli estremi nella (2.5):



$\Delta t_1 = 0; \Delta t_2 = 0$

$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0, \ \ (i = \overline{1,n})$

le curve variate coincidono agli estremi; i moti iniziano e finiscono allo stesso istante.

Se a questo punto richiediamo che
$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}\, dt = 0 \tag{2.6}$$
(che coincide in questo caso con la richiesta $\Delta\Phi = 0$), otteniamo:
$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \, dt = 0;$$
essendo le quantità δq_i arbitrarie e tra di loro indipendenti, si può ad esempio scegliere
$$\delta q_i \begin{cases} \neq 0 & t \in (\xi - \varepsilon; \xi + \varepsilon) \\ = 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
ξ essendo un qualsiasi istante di tempo interno all'intervallo di integrazione; nell'intervallo infinitesimo di tempo in cui le δq_i sono diverse da zero, si possono ritenere costanti le funzioni
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i},$$
che quindi possono essere portate fuori dal segno di integrale. Applicando questo procedimento per ogni δq_i, e facendo in modo che gli integrali
$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \delta q_i \, dt$$
siano diversi da zero, ricaviamo come condizioni di stazionarietà del funzionale $\Phi[c]$ le seguenti equazioni:
$$\boxed{\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad (i = \overline{1,n}).} \tag{2.7}$$

Dunque la (2.6) è soddisfatta se lungo la traiettoria c valgono le equazioni di Lagrange del sistema. L'enunciato del principio di Hamilton (1834) è allora:

la traiettoria reale individuata dal moto del punto rappresentativo nello spazio delle configurazioni tra due punti $Q_1(t_1)$ e $Q_2(t_2)$ è una curva critica per il funzionale $\Phi = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L} dt$.

Si può mostrare che se l'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ è sufficientemente piccolo, tale traiettoria rende minimo il funzionale $\Phi[c]$. Più in generale, in analogia con quanto prevede il calcolo ordinario, per valutare la natura della curva critica si deve analizzare la seconda variazione e richiedere, per la condizione di minimo, che $\delta^2\Phi \geq 0$.

3 Covarianza delle equazioni di Lagrange.

Un'equazione è covariante rispetto a determinate trasformazioni se mantiene una sua struttura formale; piú precisamente, se tutti i suoi termini *co-variano*, cioè variano secondo le stesse leggi di trasformazione. Nel caso di equazioni di Lagrange, la loro covarianza significa che le nuove equazioni differenziali del moto, ottenute tramite una certa trasformazione, mantengono una struttura lagrangiana, vale a dire che sono ancora equazioni di Eulero-Lagrange per un problema variazionale.

Se trasformiamo le equazioni di Lagrange mediante le (generiche):

$$\begin{cases} Q_i = Q_i(q, \dot{q}, t) \\ \dot{Q}_i = \dfrac{dQ_i}{dt}. \end{cases} \qquad (i = \overline{1, n}) \tag{3.1}$$

non ci dobbiamo aspettare che le equazioni trasformate siano ancora equazioni di Eulero-Lagrange, cioè che discendano dal principio di Hamilton. Innanzitutto le nuove equazioni del moto potrebbero non essere neppure del secondo ordine; in ogni caso, ammesso che ciò si verifichi (ma ci vogliono opportune condizioni!), e che si possa scrivere:

$$\ddot{Q}_i = \Psi_i(Q, \dot{Q}, t) \qquad (i = \overline{1, n}),$$

bisogna risolvere un problema del tipo: esiste una funzione di Lagrange $\mathscr{L}(Q, \dot{Q}, t)$ tale che

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial Q_i} = \ddot{Q}_i - \psi_i \qquad (i = \overline{1, n}) \ ?$$

Questa domanda e la teoria che caratterizza le possibili risposte prende il nome di **problema inverso (del calcolo variazionale)**.

Nella generalità dei casi le (3.1) non mantengono la struttura lagrangiana delle equazioni del moto; per le equazioni trasformate non vale allora il formalismo lagrangiano che, da un lato fornisce (si veda p.es. il teorema di Noether nel §5) utili tecniche per risolvere, anche solo parzialmente, il problema del moto, dall'altro costituisce il punto di partenza per la quantizzazione dei sistemi classici (discreti e continui).

L'analisi del principio di Hamilton ci suggerisce, d'altra parte, che la proprietà della curva c di essere un estremale di $\Phi[c]$ non dipende dal sistema di coordinate: si noti che l'enunciato del principio di Hamilton riguarda curve di $\mathbb{Q}$, dunque una trasformazione di coordinate è in ogni caso da pensare come una trasformazione di punto. Poiché il funzionale da minimizzare è un integrale (definito) rispetto al tempo, l'integrale non dipenderà da un cambio di coordinate:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(q(t), \dot{q}(t), t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}'(Q(t), \dot{Q}(t), t)dt.$$

Ciascuno dei due funzionali avrà valore stazionario lungo la soluzione della rispettiva equazione di Eulero-Lagrange.

Inoltre le trasformazioni di punto conservano le condizioni agli estremi:

$$\delta Q_k = \sum_i \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\delta q_i \Longrightarrow \delta Q_k(t_1) = \delta Q_k(t_2) = 0.$$

Si pensi d'altra parte al seguente :

Esempio 3.1: *si trovi l'arco di lunghezza minima che congiunge due punti del piano.*

Bisogna minimizzare $\int_1^2 ds$. Esprimendo in forma parametrica la curva come $y = y(x)$ oppure $\rho = \rho(\theta)$, il funzionale si può scrivere in una delle due espressioni:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Tutti e due i funzionali portano ad eqq. di Eulero - Lagrange:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0; \qquad\qquad \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}} - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\frac{d\rho}{d\theta}}{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}}\right) = 0.$$

Gli estremali devono essere gli stessi: le rette nel piano

$$y = c_1 x + c_2 \qquad \text{oppure} \qquad \rho \sin\theta = c_1 \rho \cos\theta + c_2.$$

✧✧✧

Diamo comunque una dimostrazione diretta di tale proprietà di covarianza: consideriamo la trasformazione di punto $(q, \dot{q}) \longrightarrow (Q, \dot{Q})$ e indichiamo con

$$\mathscr{L}'(Q, \dot{Q}, t) \equiv \mathscr{L}(q, \dot{q}, t)$$

l'uguaglianza numerica tra le due funzioni di Lagrange scritte nei due sistemi di coordinate ($\mathscr{L}$ si comporta come un campo scalare: è numericamente invariante e varia in forma).

Tenendo conto delle (1.7), delle (1.8) e del fatto che lungo la traiettoria del moto valgono le equazioni

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad (i = \overline{1,n}),$$

seguono le seguenti uguaglianze:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial \dot{Q}_k} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = \sum_i \left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial Q_k}\right) = \frac{\partial \mathscr{L}'}{\partial Q_k} \qquad\qquad (k = \overline{1,n}).$$

Tale risultato equivale ad affermare che:

Le equazioni di Lagrange sono covarianti per trasformazioni di punto non singolari.

Concludiamo questo paragrafo con alcune osservazioni, propietà e definizioni relative alle equazioni di Lagrange.

Definizione. Una lagrangiana si dice regolare se è non singolare la matrice hessiana:

$$\left\| \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\|_{(i,j=\overline{1,n})}.$$

Tale proprietà è necessaria per affermare che le equazioni di Lagrange sono del secondo ordine e in forma normale. Infatti, sviluppando la derivata totale rispetto al tempo, si ha:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i \partial q_k}\dot{q}_k\right) + \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i \partial t} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} \tag{3.2}$$

e, dunque, solo nel caso di Lagrangiana regolare le accelerazioni generalizzate possono essere messe in forma normale.[1]

Definizione. Sono dette equivalenti due lagrangiane che risolvono lo stesso problema inverso (espresso dalle (3.4))

Esempio 3.2: *Si consideri l'equazione*: $\ddot{q} = k\dot{q}^2$; *il problema inverso ha soluzione in quanto:*

$$\ddot{q} - k\dot{q}^2 = \dot{q}^2\left(\frac{\ddot{q}}{\dot{q}^2} - k\right) = -\dot{q}^2\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\dot{q}}\right) + \frac{\partial}{\partial q}kq\right) = -\dot{q}^2\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\ln \dot{q}\right) + \frac{\partial}{\partial q}kq\right).$$

È dunque chiaro che il problema inverso è risolto dalla funzione $\mathscr{L} = \ln \dot{q} - kq$. *Si noti, d'altra parte, che anche*

$$\mathscr{L} = \frac{\dot{q}^2}{2}e^{-2kq}$$

risolve lo stesso problema. In tal caso, le equazioni di Lagrange conducono a:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} = e^{-2kq}(\ddot{q} - k\dot{q}^2).$$

Nei due esempi, le quantità $-\dot{q}^{-2}$ *e* e^{-2kq} *costituiscono i cosiddetti, rispettivi, fattori integranti.*
Esercizio: Si trovi Lagrangiana e fattore integrante per l'equazione

$$\ddot{q} + \gamma\dot{q} = 0.$$

Osservazioni.

- Una volta assegnata una lagrangiana $\mathscr{L}$, è sempre possibile costruire un'infinità di lagrangiane equivalenti in un senso banale: si mostri che ogni lagrangiana $\widetilde{\mathscr{L}}$ tale che

  $$\widetilde{\mathscr{L}} = \mathscr{L} + \frac{d}{dt}F(q,t)$$

  è equivalente a $\mathscr{L}$ per ogni scelta della funzione F (è sufficiente scrivere le equazioni di Lagrange per $\widetilde{\mathscr{L}}$ ...). Questo caso banale è detto di gauge-equivalenza.

- Nell'esempio (3.2) non solo si risolve il problema inverso, ma si determinano anche due lagrangiane equivalenti (in senso non banale).

[1] Si ricordi che il problema di Cauchy, i relativi teoremi di esistenza ed unicità, e il conseguente determinismo della meccanica si riferiscono a equazioni in forma normale.

4 Il gruppo di Galileo: covarianza ed invarianza delle equazioni del moto.

Cercheremo, di seguito, di chiarire la seguente affermazione: il principio di relatività di Galileo prevede che tutti gli osservatori inerziali (che attribuiscono proprietà identiche a spazio e tempo), descrivano il moto con le medesime leggi meccaniche; se, inoltre, un sistema è isolato, tutti gli osservatori inerziali traducono le loro descrizioni in equazioni differenziali identiche; in questo caso, la particolare struttura delle equazioni di Lagrange permette un'elegante deduzione delle fondamentali leggi di conservazione della meccanica classica.

(a) Trasformazioni di coordinate tra sistemi inerziali.

Consideriamo l'insieme degli osservatori inerziali che descrivono un assegnato sistema di N particelle, tra loro interagenti. Il passaggio da un osservatore inerziale all'altro avviene mediante trasformazioni di coordinate dette *trasformazioni di Galileo*; esse consistono in:

Rotazioni spaziali - Le rotazioni individuate da $A \in SO(3, \mathbb{R})$

$$\mathbf{x}'_i = A\mathbf{x}_i \qquad (t' = t) \qquad (i = \overline{1, N}) \tag{4.1}$$

ruotano i vettori posizione di tutti i punti materiali di un angolo fissato attorno a una direzione fissata.

Trascinamenti - Questo tipo di trasformazione connette due osservatori che si muovono di moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro:

$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{v}t \qquad (t' = t) \qquad (i = \overline{1, N}). \tag{4.2}$$

Traslazioni spaziali - Tutti i punti materiali vengono traslati di un medesimo vettore spostamento:

$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i + \mathbf{a} \qquad (t' = t) \qquad (i = \overline{1, N}). \tag{4.3}$$

Traslazioni temporali - Queste trasformazioni traducono semplicemente il fatto che due osservatori hanno orologi che non hanno iniziato a misurare contemporaneamente:

$$t' = t + t_0 \qquad (\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i, \quad i = \overline{1, N}). \tag{4.4}$$

Ciascuna di queste trasformazioni è caratterizzata dal valore numerico di determinate grandezze (per es. tre valori numerici degli angoli di Eulero descrivono univocamente una ben precisa rotazione). Al variare di tali grandezze si individua un'intera classe di osservatori inerziali: se, per esempio, facciamo variare da 0 a ∞ il modulo di $\mathbf{a}$ nella (4.3), otteniamo tutti i sistemi di riferimento che si differenziano l'uno dall'altro per una traslazione nella direzione di $\mathbf{a}$. Inoltre, tutte queste grandezze variano con continuità: si passa da un osservatore all'altro anche per valori infinitesimi dei parametri. Ricordiamo a questo proposito come in cinematica si sono parametrizzate le curve: il tempo (o un opportuno parametro) nel suo scorrere continuo individua le successive posizioni di un punto materiale sull'orbita del moto; in modo del tutto analogo, le trasformazioni (continue) di Galileo associano un particolare osservatore ad ogni scelta dei parametri che le caratterizzano.

Infine, c'è da notare che ciascuna classe di trasformazioni ha una legge di composizione interna caratteristica della struttura di gruppo: la composizione di due trascinamenti è un trascinamento, la trasformazione identità è individuata da $\mathbf{v} = 0$, la trasformazione inversa da $-\mathbf{v}$, etc. La composizione di due qualsiasi trasformazioni di Galileo è ancora una trasformazione di Galileo.

Le rotazioni, i trascinamenti, le traslazioni spaziali e quelle temporali sono i sottogruppi del cosiddetto ***gruppo di Galileo***. Il gruppo di Galileo è un ***gruppo a 10 parametri***.

(b) Covarianza delle leggi del moto.

Prima di studiare il gruppo di Galileo come gruppo di simmetria, caratterizzeremo, piú in generale, la sua azione sulle leggi del moto. A tale scopo consideriamo un osservatore inerziale che descrive il moto di un sistema meccanico costituito da N punti materiali in interazione tra di loro secondo i postulati della meccanica newtoniana, di modo che l'energia potenziale totale sia

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{N} V_{ik}(||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k||). \tag{4.5}$$

Notiamo innanzitutto che V è invariante per trasformazioni di Galileo, nel senso che è una funzione che mantiene la stessa forma funzionale e lo stesso valore numerico. Infatti, per effetto di un trascinamento si ha che

$$\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_k = (\mathbf{x}_i - \mathbf{v}t) - (\mathbf{x}_k - \mathbf{v}t) = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k;$$

lo stesso vale per le traslazioni; inoltre, la distanza tra due punti è invariante per trasformazioni ortogonali, per cui, infine: $V(||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k||) = V(||\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_k||)$.

D'altra parte, siccome la forza agente sulla i-esima particella è data da

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i},$$

si ha che i gradienti della parte di destra

- sono invarianti per trascinamenti e per traslazioni:

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}'_i} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i};$$

- variano per rotazioni secondo la relazione[1]

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{3} a_{jk} \frac{\partial V}{\partial x'_j}, \tag{4.6}$$

  in quanto, da un lato $\displaystyle \frac{\partial V}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial x'_j}\frac{\partial x'_j}{\partial x_k} \quad (k = \overline{1,3}),$ e, d'altro canto, $\displaystyle x'_j = \sum_{k=1}^{3} a_{jk} x_k$

  sono le equazioni di trasformazione delle coordinate per rotazione.

Siamo ora in grado di chiarire le proprietà di trasformazione delle equazioni del moto

$$\mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \qquad (i = \overline{1,N}). \tag{4.7}$$

Infatti, le accelerazioni $\ddot{\mathbf{x}}_i$:

- sono invarianti per trascinamenti e traslazioni;
- si trasformano, per rotazioni, secondo la $\ddot{\mathbf{x}}'_i = A\ddot{\mathbf{x}}_i$.

[1] eliminiamo temporaneamente, nelle prossime due righe, l'indice i che individua la i-esima particella; x_j e x_k indicano componenti cartesiane del vettore spostamento

In sintesi, abbiamo ricavato in modo diretto le leggi di trasformazione delle due espressioni alle quali è uguagliata la forza. In particolare, nel caso delle rotazioni osserviamo che la forza si trasforma in modo tale che il gradiente del potenziale e l'accelerazione sono ***covarianti***, cioè seguono entrambi la legge di trasformazione del vettore posizione:

$$\mathbf{x}_i \longrightarrow \mathbf{x}'_i = A\mathbf{x}_i; \quad \ddot{\mathbf{x}}_i \longrightarrow \ddot{\mathbf{x}}'_i = A\ddot{\mathbf{x}}_i; \quad \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} \longrightarrow \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}'_i} = A\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i};$$

quindi, le forze sono esse stesse vettori.

L'azione di una generica trasformazione può alterare la forma di una legge fisica; se però nell'equazione che rappresenta la legge tutti i termini variano allo stesso modo, l'equazione finale conserverà la forma di partenza. Nel nostro caso la teoria (newtoniana della meccanica classica) è espressa da una legge il cui contenuto è indipendente dall'osservatore inerziale che la enuncia. In particolare, la teoria newtoniana è invariante per rotazioni (perché espressa dalla relazione tra due grandezze che si trasformano allo stesso modo per rotazione).

Le equazioni di Newton sono ***covarianti*** per rotazioni [1]:

$$\mathbf{F}_i = m_i\ddot{\mathbf{x}}_i \longrightarrow \mathbf{F}'_i = m_i\ddot{\mathbf{x}}'_i :$$

entrambi i termini si trasformano nello stesso modo e le equazioni trasformate esprimono ancora la stessa legge; covarianza significa invarianza dell'espressione vettoriale (o tensoriale) della legge, nel passaggio da un sistema di riferimento all'altro.

(c) Invarianza delle leggi del moto.

Cerchiamo ora di integrare nel linguaggio della meccanica l'idea di **simmetria**, che, in senso lato, corrisponde a una trasformazione che lascia inalterata le caratteristiche (geometriche, fisiche, etc.) di un sistema. Per esempio, partiamo dalla considerazione che tutti i punti dello spazio euclideo vuoto sono equivalenti: una particella che si muove per inerzia su una retta è descritta allo stesso modo in ogni suo punto (e in ogni istante). La descrizione non dipende dalla scelta dell'origine delle coordinate. Questa invarianza per traslazioni è un esempio di simmetria. In particolare, assumere l'omogeneità dello spazio vuoto comporta, dunque, che tutti gli osservatori inerziali che si trovano sulla retta del moto fanno uso delle medesime equazioni differenziali del moto.

Torniamo al gruppo di Galileo, e analizziamo le equazioni differenziali del moto

$$m_i\ddot{\mathbf{x}}_i = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i}, \tag{4.8}$$

V essendo come in (4.5); se applichiamo una rotazione al nostro sistema di coordinate, per quanto detto, otteniamo che

$$m_i\ddot{\mathbf{x}}'_i = -A\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}'_i}, \tag{4.9}$$

dove si è tenuto conto dell'invarianza dell'energia potenziale e dell'ortogonalità della trasformazione ($A^{-1} = A^T$). Le (4.8) e le (4.9) sono, dal punto di vista matematico, equazioni differenziali assolutamente uguali che hanno le stesse soluzioni generali. Diremo che in questo caso le equazioni del moto, oltre a essere covarianti, sono ***invarianti***. Questa proprietà, è ovvio, vale per l'intero gruppo di Galileo e, si noti, dipende in modo essenziale dal fatto che abbiamo considerato un sistema di particelle con interazioni interne, ma isolato. Infatti, se un sistema non è isolato, l'energia potenziale non è piú, in generale,

[1] sono ovviamente covarianti anche per traslazioni e trascinamenti (in questo caso accelerazioni e gradienti sono invarianti).

una funzione delle sole distanze tra le particelle, dunque non è un invariante ma si trasforma secondo le leggi dei campi scalari:

$$V(\mathbf{x}) = V'(\mathbf{x}');$$

in tal caso abbiamo ancora covarianza (per tutti i vari osservatori inerziali continuano a valere le equazioni di Newton) ma non piú invarianza, in quanto le equazioni differenziali sono cambiate. Abbiamo, di fatto, già incontrato una tale distinzione: si pensi alle trasformazioni di punto nello spazio delle configurazioni: esse lasciano invariata la struttura lagrangiana delle equazioni del moto. Le equazioni trasformate sono ancora derivate dal principio di Hamilton (covarianza), ma a partire da una diversa funzione di Lagrange; dunque, nella generalità dei casi non ci dobbiamo aspettare che le corrispondenti equazioni differenziali siano invarianti: le trasformazioni di punto trasformano equazioni differenziali del secondo ordine in equazioni del secondo ordine, ma in generale ne cambiano la forma.

La descrizione di un sistema isolato da parte di un osservatore inerziale è dunque:

invariante per rotazioni spaziali $A \in SO(3, \mathbb{R})$.
Invarianza delle equazioni significa che se $\boldsymbol{\phi}_i(t)$ rappresenta la soluzione dell'equazione del moto

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i \tag{4.10}$$

anche $A\boldsymbol{\phi}_i$ è soluzione della (4.10); è una soluzione che corrisponde semplicemente a condizioni iniziali diverse da quelle che hanno permesso di determinare $\boldsymbol{\phi}_i$. Quindi la rotazione ha trasformato il sistema di equazioni di Newton (4.10), ma le soluzioni del sistema trasformato sono ancora soluzioni della (4.10). Questa invarianza traduce il fatto che (rispetto al sistema ed all'osservatore sopra specificati) lo spazio è isotropo: non esistono direzioni privilegiate; dunque, se l'osservatore ha cambiato la propria orientazione spaziale ma mantiene le medesime condizioni iniziali, l'esperimento fisico deve riprodursi in modo identico.

invariante per trascinamenti.

invariante per traslazioni spaziali. La traslazione (uguale per tutti i punti) è una trasformazione a tre parametri

$$\mathbf{x}_i' = \mathbf{x}_i + \mathbf{a} \qquad (t' = t) \qquad (i = \overline{1, N}). \tag{4.11}$$

Diciamo che lo spazio è omogeneo (ha le stesse proprietà in tutti i suoi punti) in quanto, detta $\boldsymbol{\phi}_i(t)$ la soluzione della (4.11), anche $\boldsymbol{\phi}_i(t) + \mathbf{a}$ è soluzione della medesima equazione.

invariante per traslazioni temporali. Le equazioni del moto non cambiano se operiamo la trasformazione $t' = t + a_0$. Vale a dire: $\boldsymbol{\phi}(t)$ e $\boldsymbol{\phi}(t + a_0)$ sono soluzioni della stessa equazione del moto; il fatto che i diversi istanti siano tra di loro equivalenti traduce l'omogeneità del tempo.

Dalla discussione precedente emerge una nozione particolarmente importante, quella di simmetria delle equazioni del moto. Con tale termine intenderemo ogni trasformazione (finita o infinitesima) che trasforma soluzioni del sistema delle equazioni differenziali del moto in soluzioni (corrispondenti a condizioni iniziali diverse) dello stesso sistema. Il gruppo di Galileo è un esempio di gruppo di simmetria; il principio di relatività di Galileo[1] può anche essere enunciato dicendo che: *ogni trasformazione galileiana è una simmetria per le equazioni del moto di un sistema meccanico isolato.*

Ma il gruppo di Galileo non costituisce il gruppo di invarianza di tutte le equazioni della fisica: le equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo sono covarianti per le trasformazioni del gruppo di

[1]Il motivo per cui si associa il nome di Galileo al gruppo studiato e a questo principio ha una precisa radice storica: in un celebre scritto, egli riporta le osservazioni svolte all'interno di una nave che si muove di moto rettilineo uniforme e sottolinea che i fenomeni fisici si manifestano nello stesso modo di quanto avviene sulla terraferma.

Poincaré, anch'esso a 10 parametri (i trascinamenti, che sono poi le trasformazioni di Lorentz, le rotazioni spaziali e le traslazioni spazio-temporali). Viceversa, se si richiede la covarianza delle equazioni della dinamica rispetto alle trasformazioni di Lorentz, bisogna modificare le equazioni di Newton.
Esempio 4.1: *per esemplificare l'idea di simmetria dinamica, consideriamo il sistema isolato costituito da due masse uguali collegate da una molla di costante k e verifichiamo l'invarianza delle equazioni del moto rispetto alle traslazioni*.

La funzione di Lagrange e le equazioni differenziali del moto sono, rispettivamente,

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1). \end{cases} \tag{4.12}$$

Imponiamo le condizioni iniziali $\quad x_1(0) = -x_2(0) = -x^0; \qquad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0;$

sommando le due equazioni e tenendo conto delle condizioni iniziali, si ha

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = 0 \Longrightarrow \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0 \Longrightarrow x_1(t) = -x_2(t).$$

Dunque (come ci si doveva aspettare dalla I equazione cardinale) il centro di massa, individuato da $2x_G = x_1 + x_2$, permarrà in quiete nell'origine del sistema di riferimento prescelto. La prima delle (4.12) diviene per conseguenza equivalente a

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \qquad \left(\text{essendo } \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}\right)$$

che ha come soluzione $x_1(t) = -x^0 \cos\omega t$; analogamente, $x_2(t) = x^0 \cos\omega t$.

Eseguiamo ora la seguente trasformazione di coordinate:

$$x_i \longrightarrow X_i = x_i + a \qquad \text{con} \quad i = 1,2 \quad \text{e} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo allora che $\ddot{X}_i = \ddot{x}_i$ e $X_2 - X_1 = x_2 - x_1$, e, conseguentemente, le (4.12) si trasformano nelle

$$\begin{cases} m\ddot{X}_1 = -k(X_1 - X_2) \\ m\ddot{X}_2 = -k(X_2 - X_1), \end{cases} \tag{4.13}$$

da cui si vede che le equazioni sono ***invarianti***. D'altra parte, poiché le (4.13) rappresentano lo stesso problema differenziale delle (4.12), le soluzioni sono formalmente le stesse; siccome le condizioni iniziali sono ora

$$X_1(0) = a - x^0, X_2(0) = a + x^0; \qquad \dot{X}_1(0) = \dot{X}_2(0) = 0,$$

$$\text{avremo che} \quad \dot{X}_1 + \dot{X}_2 = 0 \Longrightarrow X_1(t) = -X_2(t) + 2a \Longrightarrow \ddot{X}_1 + \omega^2 X_1 = \omega^2 a$$

$$\text{da cui} \qquad X_1(t) = a - x^0 \cos\omega t; \quad X_2(t) = a + x^0 \cos\omega t.$$

Per riassumere: (4.12) e (4.13) hanno le stesse soluzioni generali; una volta fissata una soluzione di (4.12) corrispondente ad una particolare condizione iniziale, dalla sua traslazione si ottiene la soluzione di (4.13) che, a sua volta, corrisponde alla condizione iniziale traslata. Se, nel sistema X_1, X_2 avessimo mantenuto le condizioni iniziali

$$X_1(0) = -x^0, X_2(0) = x^0; \qquad \dot{X}_1(0) = \dot{X}_2(0) = 0,$$

avremmo ottenuto lo stesso moto trovato nel sistema x_1, x_2 (omogeneità dello spazio).

d. Approccio lagrangiano all'invarianza galileiana.

Nell'ambito lagrangiano le proprietà di simmetria dello spazio euclideo e del tempo sopra illustrate danno luogo a leggi di conservazione. Per provarlo, prima di tutto, individuiamo la forma della funzione di Lagrange di un sistema di punti materiali isolato. Poiché il sistema è isolato, assumiamo che l'energia cinetica sia una forma quadratica e omogenea nelle $\dot{q}$ (i vincoli, al più, sono di rigidità, quindi scleronomi; vincoli reonomi richiederebbero un meccanismo esterno che li mantenesse in moto); l'energia potenziale dipende solo dalla distanza $||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k||$ tra i punti materiali, a causa delle usuali ipotesi sulle forze interne. Dunque,

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,k} V_{ik}(||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k||), \tag{4.14}$$

oppure, in presenza di vincoli olonomi e scleronomi,

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k - \frac{1}{2}\sum_{i,k} V_{ik}(||\mathbf{x}_i(q) - \mathbf{x}_k(q)||). \tag{4.15}$$

La funzione di Lagrange non dipende dunque esplicitamente dal tempo; è invariante per traslazioni e rotazioni spaziali, per trascinamenti[1]. Poiché essa contiene tutte le informazioni meccaniche del sistema, tali proprietà di invarianza rispecchiano il contenuto del principio di relatività di Galileo.

Nei successivi passaggi useremo il simbolo $\overset{\circ}{=}$ per indicare che l'uguaglianza è valida in quanto valgono le equazioni di Eulero-Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i} \overset{\circ}{=} 0; \tag{4.16}$$

Ovviamente sulle traiettorie variate ottenute per una trasformazione (infinitesima) di Galileo, valgono ancora le equazioni di Lagrange (le trasformazioni sono puntuali), le equazioni sono invariate (le trasformazioni sono simmetrie), la Lagrangiana è invariata: la (4.16) vale dunque anche su tali traiettorie.

① ***omogeneità del tempo*** $\longrightarrow$ ***conservazione dell'energia***

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \frac{d\mathscr{L}}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_k}\ddot{q}_k\right) \overset{\circ}{=} \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_k}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_k}\ddot{q}_k\right] = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_k}\dot{q}_k$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_k}\dot{q}_k - \mathscr{L}\right) \overset{\circ}{=} 0.$$

Quindi, durante il moto resta costante la funzione, detta ***energia lagrangiana***: $\boxed{E_{\mathscr{L}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_k}\dot{q}_k - \mathscr{L}}$

Osservazioni.

(i) Per il teorema di Eulero, dalla (4.15) segue che

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_k}\dot{q}_k = 2T.$$

[1] Due osservatori che differiscono per un trascinamento non usano esattamente la stessa lagrangiana, ma come vedremo oltre, è comunque legittimo parlare di invarianza (vds. es.1, pag.20)

Dunque $E_{\mathscr{L}} = 2T - (T - V)$ coincide con l'energia meccanica. Se un sistema non è isolato $E_{\mathscr{L}}$ può non coincidere con l'energia meccanica. Si noti, inoltre, che dalla definizione si ha:

$$\frac{dE_{\mathscr{L}}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t} \stackrel{\circ}{=} -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial t},$$

da cui segue che l'indipendenza esplicita dal tempo della funzione di Lagrange diviene condizione necessaria e sufficiente per la conservazione dell'energia lagrangiana.

(ii) Se il sistema non è isolato, ma in interazione con un campo conservativo stazionario, alla (4.15) aggiungiamo un potenziale esterno non dipendente dal tempo: ancora $\partial \mathscr{L}/\partial t = 0$ e $E_{\mathscr{L}}$ è costante.

(iii) Nella condizione $\partial \mathscr{L}/\partial t = 0$ è implicita anche l'*isotropia del tempo*: la descrizione del moto non cambia sostituendo t con $-t$. Ciò significa che tutti i moti sono reversibili: per ogni moto esiste un moto inverso che soddisfa le stese equazioni differenziali.

② ***omogeneità dello spazio*** $\longrightarrow$ ***conservazione della quantità di moto.***

Sia $\delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i' - \mathbf{x}_i = \mathbf{a}\ \ (i = \overline{1, N})$ una traslazione infinitesima arbitraria: la conseguente variazione della lagrangiana è (ovviamente, $\delta \dot{\mathbf{x}} = 0$)

$$\delta \mathscr{L} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{x}_k} \cdot \delta \mathbf{x}_k \stackrel{\circ}{=} \mathbf{a} \cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_k}, \qquad \text{con} \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathbf{x}_k} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x_k}\mathbf{i} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_k}\mathbf{j} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial z_k}\mathbf{k}.$$

Siccome la funzione di Lagrange in esame è tale che per una traslazione $\delta \mathscr{L} = 0$,

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_k} = m_k \dot{\mathbf{x}}_k \Longrightarrow \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{x}}_k = 0.$$

Osservazione. Se il sistema non è isolato si possono conservare una o più componenti della quantità di moto, come nel caso del moto di un proiettile:

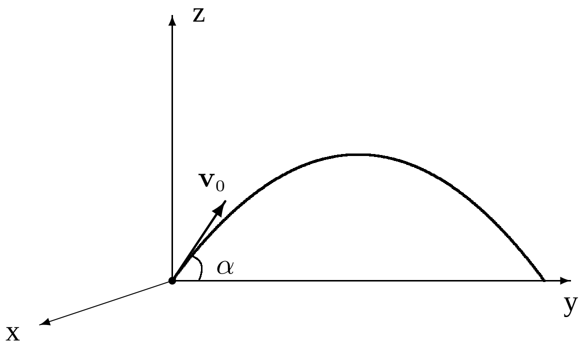
La lagrangiana del sistema è

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz;$$

essendo $\dot{y}(0) = v_0 \cos\alpha; \quad \dot{z}(0) = v_0 \sin\alpha$
le condizioni iniziali sulla velocità, si ha che:

$$p_x = 0; \ \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0 \Rightarrow p_y = cost.;$$

e, infine: $\quad \dfrac{dp_z}{dt} = -g.$



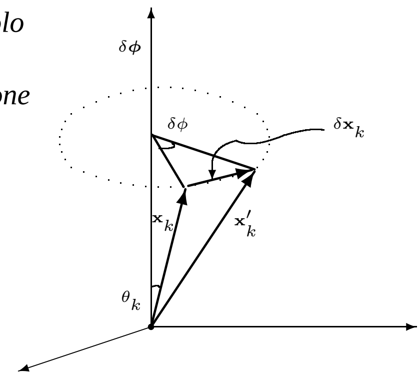
③ **_isotropia dello spazio_** $\longrightarrow$ **_conservazione del momento della quantità di moto._**

Tutti i vettori spostamento vengono ruotati di uno stesso angolo $\delta\boldsymbol{\phi} = \delta\phi\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ essendo il versore dell'asse di rotazione). Nella figura sono segnati i vettori che danno luogo alla trasformazione

$$\mathbf{x}'_k = \mathbf{x}_k + \delta\mathbf{x}_k \qquad (k = \overline{1,N})$$

Si noti che, al primo ordine, $\delta\mathbf{x}_k$ è perpendicolare a $\mathbf{x}_k$:

$$\mathbf{x}_k^2 = \mathbf{x'}_k^2 = \mathbf{x}_k^2 + 2\mathbf{x}_k \cdot \delta\mathbf{x}_k \Rightarrow \mathbf{x}_k \cdot \delta\mathbf{x}_k = 0$$



Come si vede in figura, $||\delta\mathbf{x}_k|| = ||\mathbf{x}_k|| \sin\theta_k ||\delta\boldsymbol{\phi}||$; inoltre $\delta\mathbf{x}_k$ è perpendicolare, oltre che a $\mathbf{x}_k$, anche a $\delta\boldsymbol{\phi}$. Perciò:

$$\delta\mathbf{x}_k = \delta\boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{x}_k \qquad (k = \overline{1,N}).$$

Inoltre, essendo $\delta\boldsymbol{\phi}$ costante, derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\delta\dot{\mathbf{x}}_k = \delta\boldsymbol{\phi} \wedge \dot{\mathbf{x}}_k \qquad (k = \overline{1,N}).$$

La (conseguente) variazione della lagrangiana è

$$\delta\mathscr{L} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\mathbf{x}_k} \cdot \delta\mathbf{x}_k + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\mathbf{x}}_k} \cdot \delta\dot{\mathbf{x}}_k \right) = \delta\boldsymbol{\phi} \cdot \sum_{k=1}^{N} \left(\mathbf{x}_k \wedge \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\mathbf{x}_k} + \dot{\mathbf{x}}_k \wedge \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\mathbf{x}}_k} \right) \stackrel{\circ}{=} \delta\boldsymbol{\phi} \cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{d}{dt} \left(\mathbf{x}_k \wedge \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\mathbf{x}}_k} \right).$$

Poiché l'espressione della funzione di Lagrange (4.14) di un sistema isolato è invariante ($\delta\mathscr{L} = 0$) per una rotazione infinitesima,

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\mathbf{x}}_k} = m_k\dot{\mathbf{x}}_k \Longrightarrow \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_k \wedge m_k\dot{\mathbf{x}}_k = 0.$$

<u>Esempio 4.2</u>. *Anche nel seguente caso trattiamo un sistema non isolato, ma in interazione con un campo di forze centrali*

In coordinate cilindriche ($x = \rho\cos\theta; \;\; y = \rho\sin\theta; \;\; z = z$),

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k(\dot{\rho}_k^2 + \rho_k^2\dot{\theta}_k^2 + \dot{z}_k^2) - V(\rho).$$

L'equazione di Lagrange per la variabile θ_k fornisce: $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\theta}_k} = \dfrac{\partial\mathscr{L}}{\partial\theta_k} = 0.$

Ma $\sum_k \partial\mathscr{L}/\partial\dot{\theta}_k = L_z$, in quanto

$$L_z = \sum_{k=1}^{N} m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k) = \sum_{k=1}^{N} m_k\rho_k^2\dot{\theta}_k;$$

dunque L_z è una costante del moto. Si noti che, a parte fattori costanti, questa legge di conservazione coincide con quella della velocità areolare.

<u>Osservazione</u>: in base a questi risultati, ogni sistema isolato possiede (almeno) sette costanti del moto, che hanno la caratteristica di essere additive, nel senso che $E, p_x, p_y, p_z, L_x, L_y, L_z$ sono dovute ai contributi dei singoli punti materiali.

5 Il teorema di Noether.

Nel paragrafo precedente le leggi di conservazione della quantità di moto e del momento angolare sono state collegate a *proprietà di invarianza della funzione di Lagrange*: i (sotto-)gruppi delle traslazioni e delle rotazioni rappresentano in tali casi ***simmetrie per la funzione di Lagrange.*** Le stesse trasformazioni hanno, in una discussione ancora precedente, rivestito il ruolo di ***simmetrie delle equazioni del moto***. Dalla discussione del paragrafo precedente appare chiaro che questi due concetti di simmetria non vanno sovrapposti. Per simmetria (infinitesima) della lagrangiana intendiamo ogni trasformazione (infinitesima)

$$q_i' = q_i + \delta q_i = q_i + \epsilon f_i(q,t) \qquad (i = \overline{1,n}) \tag{5.1}$$

che lascia invariata la lagrangiana:

$$0 = \delta\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial \dot q_i}\delta\dot q_i\right). \tag{5.2}$$

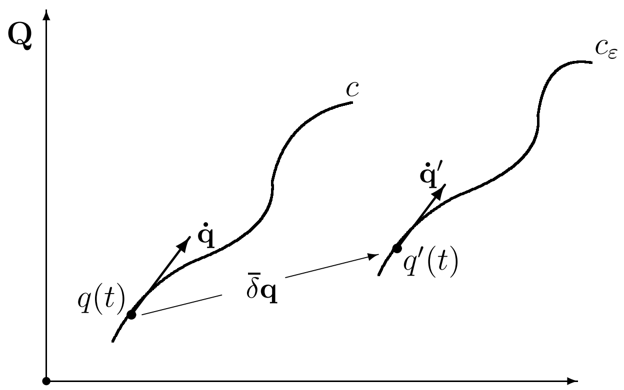
I risultati ottenuti precedentemente sono molto particolari e in questo paragrafo li generalizzeremo. A tale scopo, supponiamo che una generica trasformazione infinitesima (non necessariamente di punto)

$$\overline{\delta} q_i = \epsilon f_i(q,\dot q,t), \quad \overline{\delta}\dot q_i = \epsilon \dot f_i(q,\dot q,t) \qquad (i = \overline{1,n}) \quad \text{e } \overline{\delta} t = 0 \tag{5.3}$$

generi la seguente particolare variazione della lagrangiana:

$$\overline{\delta}\mathscr{L} = \epsilon\frac{d}{dt}F(q,\dot q,t); \tag{5.4}$$

in tal caso si usa dire che, rispetto alla (5.3), $\mathscr{L}$ è ***quasi-invariante***. Anche le (5.3) sono, seppure in senso più generale delle (5.1), simmetrie della lagrangiana poiché, come vedremo immediatamente, sono ugualmente legate a leggi di conservazione.



Nello spazio delle configurazioni ogni punto dell' orbita c viene trasformato in un punto dell' orbita c_ϵ, ma un'orbita può corrispondere a più traiettorie: la (5.3) specifica quale traiettoria viene variata e qual'è la variazione.

TEOREMA DI NOETHER (1918): ***Ogni simmetria della funzione di Lagrange è una simmetria delle equazioni differenziali del moto ed individua una legge di conservazione.***

Dimostrazione.

Si consideri, per il funzionale $\Phi[c]$, la generica variazione (2.5), e si faccia l'ipotesi che valgano le (5.3), (5.4). Otteniamo:

$$\overline{\Delta}\Phi = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial \dot q_i}\right)\overline{\delta} q_i dt + \left[\sum_i \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial \dot q_i}\overline{\delta} q_i\right]_{t_1}^{t_2} \tag{5.5}$$

dove usiamo la barra sulle variazioni per ricordare che sono particolari, e cioè che:
(a) sono simmetrie della lagrangiana;
(b) non sono di punto e non si annullano agli estremi, come, invece, nel principio di Hamilton;
(c) si richiede che $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 0$.

In primo luogo, la proprietà (c) implica che

$$\overline{\Delta}\Phi[c] = \int_{t_1}^{t_2} \overline{\delta}\mathscr{L} dt; \tag{5.6}$$

tenendo poi conto della (5.4) e uguagliando (5.5) con (5.6), si ottiene

$$-\epsilon \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) f_i dt = \epsilon \left[\sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} f_i - F \right]_{t_1}^{t_2}. \tag{5.7}$$

Sulla traiettoria del moto reale (dove valgono le equazioni di Eulero-Lagrange) il termine di sinistra è uguale a zero. Quindi, lungo la traiettoria del moto

$$\left[\sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} f_i - F \right]_{t_1}^{t_2} \overset{\circ}{=} 0.$$

Ma ciò equivale a dire che (essendo l'intervallo $(t_2 - t_1)$ completamente arbitrario) la funzione

$$G = \sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} f_i - F \tag{5.8}$$

è costante durante il moto, avendo lo stesso valore sia in t_1 che in t_2. Dunque: $\dot{G} = 0$ e questa è la legge di conservazione individuata dalla simmetria della funzione di Lagrange.

<u>Osservazione 1</u>: il teorema assicura anche che *Una simmetria della lagrangiana è anche una simmetria delle equazioni del moto*. La dimostrazione formale di tale affermazione è abbastanza complicata ed esula dalle priorità di queste note. Ricordiamo ancora una volta comunque, che se la trasformazione (5.1) è una simmetria di Noether, essa trasforma soluzioni (traiettorie nello spazio delle configurazioni) in soluzioni dello stesso sistema di equazioni differenziali.

<u>Osservazione 2</u>: se, come caso particolare, la trasformazione è del tipo (5.1) per cui la lagrangiana è invariante in senso forte, ovviamente la costante del moto associata dal teorema di Noether è

$$G = \sum_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} f_i.$$

Questa costante del moto è molto particolare perché è lineare in $\partial \mathscr{L} / \partial \dot{q}_i$ e non tutte le costanti del moto hanno necessariamente questa forma (vds. esempi più avanti). Il pregio della versione generalizzata del teorema che abbiamo dimostrato è che la (5.8) è un espressione del tutto generale, quindi si può ipotizzare che la corrispondenza simmetrie - costanti del moto vada nei due sensi. Si dimostra infatti (**Teorema di Noether inverso**) che ad <u>ogni</u> costante del moto è sempre possibile associare una simmetria della lagrangiana e, quindi, delle equazioni del moto. La dimostrazione esula dagli scopi del corso.

6 Esempi ed applicazioni.

$\boxed{\text{1. Invarianza galileiana}}$

Applichiamo a un sistema di punti materiali isolato il trascinamento infinitesimo

$$\delta \mathbf{x}_k = \delta \mathbf{v} t \qquad \delta \dot{\mathbf{x}}_k = \delta \mathbf{v} \qquad (k = \overline{1, N})$$

dove $\delta \mathbf{v}$ è una velocità infinitesima. Siccome la funzione di Lagrange è

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{x}}_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij}(\| \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \|)$$

e l'energia potenziale non varia per i trascinamenti ($\| \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \|$ resta immutato), la variazione della lagrangiana è

$$\delta \mathscr{L} = \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{x}}_k \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}_k = \delta \mathbf{v} \cdot \sum_{k=1}^{N} m_k \dot{\mathbf{x}}_k = \delta \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt} M \mathbf{x}_G$$

(M è la massa totale; $\mathbf{x}_G$ individua il centro di massa).

La lagrangiana è dunque quasi-invariante e, per il teorema di Noether, ponendo nella (5.3) $f_i(q, \dot{q}, t) = t$ e $\boldsymbol{\epsilon} = \delta \mathbf{v}$, si ottiene che

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_k} t - M \mathbf{x}_G \right) = 0;$$

da quest'ultima relazione si deduce che

$$\mathbf{x}_G = \dot{\mathbf{x}}_G t + \mathbf{c},$$

vale a dire che il centro di massa di un sistema isolato si muove di moto rettilineo ed uniforme; la velocità del centro di massa è dunque la costante del moto che associamo all'invarianza per trascinamenti della lagrangiana.

Si noti che per questo sistema esiste la lagrangiana gauge-equivalente

$$\widetilde{\mathscr{L}} = \mathscr{L} - \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k \mathbf{x}_k^2}{2t},$$

che ha la proprietà di essere invariante in senso forte. Infatti, si verifica facilmente che

- $\delta \widetilde{\mathscr{L}} = 0$;
- $\widetilde{\mathscr{L}}$ e $\mathscr{L}$ portano alle stesse equazioni del moto

$$m_k \ddot{\mathbf{x}}_k = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_k} \qquad (k = \overline{1, N}).$$

$\boxed{\text{2. Oscillatore armonico isotropo } n\text{-dimensionale}}$

Nel caso di masse unitarie, la funzione di Lagrange di tale sistema è

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left(\dot{q}_j^2 - q_j^2 \right); \tag{6.1}$$

le corrispondenti equazioni del moto sono

$$\ddot{q}_j = -q_j \qquad\qquad (j = \overline{1,n}). \tag{6.2}$$

Consideriamo la trasformazione infinitesima (non di punto!)

$$\delta q_j = \frac{1}{2}\epsilon(\dot{q}_k\delta_{jl} + \dot{q}_l\delta_{jk}) \qquad (j = \overline{1,n}) \tag{6.3}$$

dove gli indici k e l sono fissati.

Conseguentemente,

$$\delta\dot{q}_j = \frac{d}{dt}\delta q_j = \frac{1}{2}\epsilon(\ddot{q}_k\delta_{jl} + \ddot{q}_l\delta_{jk}) \quad (j = \overline{1,n}). \tag{6.4}$$

Le accelerazioni $\ddot{q}$ non sono, a loro volta, delle variabili indipendenti, in quanto le equazioni del moto fissano la loro dipendenza funzionale dalle variabili $q, \dot{q}, t$: sostituendo le (6.2) nelle (6.4) si ha:

$$\delta\dot{q}_j = -\frac{1}{2}\epsilon(q_k\delta_{jl} + q_l\delta_{jk}) \qquad (j = \overline{1,n}). \tag{6.5}$$

Valutiamo la variazione della lagrangiana:

$$\delta\mathscr{L} = \sum_j(\dot{q}_j\delta\dot{q}_j - q_j\delta q_j) = -\frac{\epsilon}{2}\sum_j[\dot{q}_j(q_k\delta_{jl} + q_l\delta_{jk}) + q_j(\dot{q}_k\delta_{jl} + \dot{q}_l\delta_{jk})] =$$

$$-\epsilon(q_k\dot{q}_l + q_l\dot{q}_k) = -\epsilon\frac{d}{dt}(q_kq_l).$$

Per il teorema di Noether, la costante del moto è la funzione

$$G = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_j}\frac{1}{2}(\dot{q}_k\delta_{jl} + \dot{q}_l\delta_{jk}) + q_kq_l = \dot{q}_k\dot{q}_l + q_kq_l.$$

Si verifichi per esercizio, in modo diretto, che $dG/dt = 0$.

3. Il problema di Keplero ed il vettore di Runge-Lenz.

Il modello fisico a cui pensiamo è quello di un pianeta attratto da un centro di gravità con forza di modulo $\parallel \mathbf{F} \parallel = 1/r^2$. Dalla lagrangiana

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{1}{x} \qquad\qquad \text{(con } x \text{ intendiamo } \parallel \mathbf{x} \parallel) \tag{6.6}$$

seguono le equazioni differenziali

$$\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{x}}{x^3} = 0. \tag{6.7}$$

Consideriamo la trasformazione infinitesima delle coordinate

$$\delta x_i = \epsilon\left(\dot{x}_i x_k - \frac{1}{2}x_i\dot{x}_k - \frac{1}{2}\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}}\,\delta_{ik}\right) \qquad (i = \overline{1,3}) \tag{6.8}$$

dove k è fissato. Come nell'esempio precedente, la trasformazione non è di punto e, quindi, nelle $\delta\dot{x}_i$ compaiono le accelerazioni, le cui espressioni vanno dedotte dalle equazioni del moto. Otteniamo così

$$\delta\dot{x}_i = \frac{\epsilon}{2}\left(\dot{x}_i\dot{x}_k - \dot{\mathbf{x}}^2\delta_{ik} - \frac{x_ix_k}{x^3} + \frac{\delta_{ik}}{x}\right). \tag{6.9}$$

La conseguente variazione della lagrangiana è

$$\delta\mathscr{L} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \delta\dot{\mathbf{x}} - \frac{\mathbf{x}\cdot\delta\mathbf{x}}{x^3} = \frac{1}{2}\epsilon\left(\dot{\mathbf{x}}^2\dot{x}_k - \frac{\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}}}{x^3}x_k - \dot{\mathbf{x}}^2\dot{x}_k + \frac{\dot{x}_k}{x}\right) - \epsilon\left(\frac{\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}}}{x^3}x_k - \frac{1}{2}\frac{\mathbf{x}^2\dot{x}_k}{x^3} - \frac{1}{2}\frac{\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}}}{x^3}x_k\right)$$

$$= \epsilon\left(\frac{\dot{x}_k}{x} - \frac{\mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}}}{x^3}x_k\right) = \epsilon\frac{d}{dt}\frac{x_k}{x}.$$

Allora la trasformazione è una simmetria infinitesima per la lagrangiana e si conservano le funzioni:

$$A_k = \dot{\mathbf{x}}^2 x_k - \mathbf{x}\cdot\dot{\mathbf{x}}\dot{x}_k - \frac{x_k}{x} \qquad (k = 1, 2, 3),$$

che sono le componenti del *vettore di Runge-Lenz*

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{x}} \wedge (\mathbf{x}\wedge\dot{\mathbf{x}}) - \frac{\mathbf{x}}{x}.$$

Tale vettore è un'ulteriore costante del moto che si aggiunge a quelle, usuali, del moto centrale: il momento angolare e l'energia meccanica.

4. Carica in un campo elettrico uniforme e costante

Indicando con $\mathbf{E} = cost.$ il campo elettrico, abbiamo per il nostro sistema [1]

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + q\mathbf{E}\cdot\mathbf{x}. \tag{6.10}$$

Le traslazioni sono simmetrie di $\mathscr{L}$:

$$\delta\mathbf{x} = \boldsymbol{\epsilon} \Rightarrow \delta\mathscr{L} = q\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}\cdot\frac{d}{dt}(q\mathbf{E}t)$$

e si conserva la quantità

$$G = m\dot{\mathbf{x}} - q\mathbf{E}t$$

il cui significato è evidente: il moto della particella è uniformemente accelerato.

Mostriamo ora che con un'opportuna gauge possiamo scrivere una lagrangiana (gauge-) equivalente che risulta essere invariante in senso forte rispetto alle traslazioni.

Se scegliamo

$$\Psi = -c(\mathbf{E}\cdot\mathbf{x})t$$

i potenziali scalare e vettore $\phi = -q\mathbf{E}\cdot\mathbf{x}$ e $\mathbf{A} = 0$ si trasformano in

$$\begin{cases} \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0 \\ \mathbf{A}' = \mathbf{A} + grad\Psi = grad\Psi = -qc\mathbf{E}t. \end{cases}$$

La corrispondente lagrangiana gauge-equivalente è

$$\widetilde{\mathscr{L}} = \mathscr{L} + \frac{q}{c}\frac{d\Psi}{dt} = \mathscr{L} - \frac{d}{dt}[q(\mathbf{E}\cdot\mathbf{x})t] \tag{6.11}$$

che implica

$$\frac{\partial\widetilde{\mathscr{L}}}{\partial\mathbf{x}} = 0 \Longrightarrow \delta\tilde{\mathscr{L}} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial\widetilde{\mathscr{L}}}{\partial\dot{\mathbf{x}}} = m\dot{\mathbf{x}} - q\mathbf{E}t = cost.$$

[1] per la descrizione lagrangiana del moto di una particella carica in un campo elettromagnetico si veda: H. Goldstein §1.5.

$\boxed{\text{5. Una simmetria della dinamica che non lascia invariata la lagrangiana.}}$

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) + \frac{B}{2}\left(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1\right) \tag{6.12}$$

è la lagrangiana di una particella carica in un campo magnetico $\mathbf{B}$ costante e perpendicolare al piano $(q_1 q_2)$. Qui vengono usate unità di misura che rendono unitarie sia la carica e la massa della particella che la velocità della luce c.

Le equazioni differenziali del moto sono [2]

$$\ddot{q}_1 = B\dot{q}_2; \qquad \ddot{q}_2 = -B\dot{q}_1. \tag{6.13}$$

Consideriamo ora la trasformazione infinitesima

$$Q_1 = q_1 - \epsilon\dot{q}_2; \qquad Q_2 = q_2 + \epsilon\dot{q}_1 \tag{6.14}$$

che, tenendo conto delle equazioni del moto, implica

$$\dot{Q}_1 = \dot{q}_1 + \epsilon B\dot{q}_1; \qquad \dot{Q}_2 = \dot{q}_2 + \epsilon B\dot{q}_2. \tag{6.15}$$

Valutiamo, prima di tutto, come si trasformano le equazioni del moto. Derivando rispetto al tempo le (6.15), si ottengono le

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_1 &= \ddot{q}_1 + \epsilon B\ddot{q}_1 = B\dot{q}_2 + \epsilon B^2\dot{q}_2 = B\dot{Q}_2; \\ \ddot{Q}_2 &= \ddot{q}_2 + \epsilon B\ddot{q}_2 = -B\dot{q}_1 - \epsilon B^2\dot{q}_1 = -B\dot{Q}_1 \end{aligned} \tag{6.16}$$

che, come è evidente hanno <u>la stessa forma</u> delle (6.13).

Valutiamo ora la variazione di $\mathscr{L}$:

$$\delta\mathscr{L} = \left(\dot{q}_1 - \frac{B}{2}q_2\right)\delta\dot{q}_1 + \left(\dot{q}_2 + \frac{B}{2}q_1\right)\delta\dot{q}_2 + \frac{B}{2}\dot{q}_2\delta q_1 - \frac{B}{2}\dot{q}_1\delta q_2$$

$$= \epsilon B\left(\dot{q}_1^2 - \frac{B}{2}q_2\dot{q}_1 + \dot{q}_2^2 + \frac{B}{2}q_1\dot{q}_2 - \frac{\dot{q}_2^2}{2} - \frac{\dot{q}_1^2}{2}\right) = \epsilon\frac{B}{2}\left[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + B(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1)\right]$$

Vale a dire

$$\delta\mathscr{L} = \epsilon B\mathscr{L}. \tag{6.17}$$

Esiste una funzione $F(q,\dot{q},t)$ tale che $\delta\mathscr{L} = \epsilon\, dF/dt$? In virtù della (6.17) ciò equivale a richiedere che

$$\mathscr{L} = \frac{dF}{dt}.$$

La risposta è negativa se si tiene conto della espressione della lagrangiana data in (6.12): infatti

- se F dipendesse anche dalle $\dot{q}$, $\mathscr{L}$ verrebbe a dipendere dalle $\ddot{q}$, in contraddizione con la (6.12);
- se $F = F(q,t)$, la lagrangiana dovrebbe essere lineare nelle $\dot{q}$, e ciò è contraddittorio per lo stesso motivo visto sopra.

[2] integrandole si prova che le orbite della carica sono circonferenze attorno alla direzione di $\mathbf{B}$.

Osservazione: le (6.14) non sono dunque simmetrie della lagrangiana, e, non essendo nemmeno trasformazioni di punto non implicano neppure la covarianza delle equazioni di Lagrange nel senso studiato precedentemente. Ciononondimeno le equazioni trasformate (6.16) sono ancora equazioni di Lagrange, con lagrangiana

$$\mathscr{L}^* = \frac{1}{2}\left(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2\right) + \frac{B}{2}\left(Q_1\dot{Q}_2 - Q_2\dot{Q}_1\right).$$

Ma, comunque

- $$\mathscr{L}^*(Q,\dot{Q},t) \neq \mathscr{L}'(Q,\dot{Q},t) = \mathscr{L}(q,\dot{q},t) + \delta\mathscr{L};$$
- non possiamo associare alcuna costante del moto alla simmetria (6.14).

6. Oscillatore armonico bidimensionale

$$\mathscr{L}_1 = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(q_1^2 + q_2^2\right) \qquad \text{e} \qquad \mathscr{L}_2 = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_2^2 - \dot{q}_1^2\right) - \frac{1}{2}\left(q_2^2 - q_1^2\right)$$

sono lagrangiane equivalenti per la stessa dinamica $\quad \ddot{q}_i = -q_i \qquad (i = 1, 2).$

Si mostri per esercizio che:

1. le due lagrangiane non sono gauge-equivalenti;
2. la trasformazione infinitesima $\qquad \delta q_1 = -\epsilon\dot{q}_2; \quad \delta q_2 = \epsilon\dot{q}_1$
   (a) è una simmetria per la dinamica;
   (b) lascia invariata in senso forte $\mathscr{L}_1$;
   (c) lascia invariata in senso debole $\mathscr{L}_2$.

7. Moto piano non centrale.

Una guida rettilinea di massa trascurabile ruota in un piano orizzontale $x_1 0 x_2$ formando con l'asse x_1 un angolo θ, che varia nel tempo secondo la legge $\theta = \ln t$. Un punto di massa m è libero di muoversi senza attrito lungo tale guida.

1. Si verifichi che la funzione di Lagrange che descrive il sistema è quasi-invariante rispetto alla trasformazione infinitesima
   $$\delta\rho = \epsilon\left(\frac{\rho}{2} - t\dot{\rho}\right), \qquad \left(\text{dove} \quad \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right),$$
   e che si ha: $\delta\mathscr{L} = \epsilon\dfrac{d}{dt}(-t\mathscr{L})$; si ricavi poi la corrispondente legge di conservazione.
2. Si discuta la conservazione dell'energia meccanica del sistema.
3. Si dica se il moto della particella è centrale e si giustifichi la risposta.

1. Essendo $\mathscr{L} = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \frac{\rho^2}{t^2}\right)$ l'equazione del moto è $\ddot\rho = \frac{\rho}{t^2}$ e

$$\delta\dot\rho = -\epsilon\left(\frac{\rho}{t} + \frac{\dot\rho}{2}\right).$$

Dunque, $$\delta\mathscr{L} = m\epsilon\left(\frac{\rho^2}{2t^2} - \frac{\dot\rho^2}{2} - \frac{2\rho\dot\rho}{t}\right);$$

   come si può facilmente verificare, il termine di destra è anche il risultato della derivata $\frac{d}{dt}(-\epsilon t\mathscr{L})$. Dunque, la lagrangiana è quasi invariante e si ha che si conserva durante il moto la funzione

$$G = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot\rho}\left(\frac{\rho}{2} - t\dot\rho\right) + t\mathscr{L} = m\frac{\rho\dot\rho}{2} + \frac{m\rho^2}{2t} - \frac{m\dot\rho^2}{2}t.$$

2. Si noti che la funzione di Lagrange coincide con l'energia lagrangiana di un punto materiale che si muove su una retta fissa e che ha energia potenziale $-\frac{m\rho^2}{2t^2}$. Evidentemente tale funzione non è costante durante il moto.

3. Siccome l'accelerazione radiale del punto ($a_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\theta^2$) è nulla, quella trasversa deve essere diversa da zero. Pertanto il moto non è centrale.

8. Simmetrie della lagrangiana ⟶simmetrie dinamiche.

Supponiamo che la trasformazione infinitesima (di punto)

$$\begin{cases} \delta q_i = \epsilon f_i(q,t) \\ \delta\dot q_i = \epsilon\dot f_i(q,t) \end{cases} \quad (i = \overline{1,n}) \tag{6.18}$$

lasci invariata la lagrangiana ($\delta\mathscr{L} = 0$). Si può mostrare che le conseguenze che otterremo da questo caso particolare di invarianza sono del tutto generali.

L'invarianza implica che

$$0 = \delta\mathscr{L} = \sum_i\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot q_i}\delta\dot q_i\right) \tag{6.19}$$

e, derivando quest'ultima rispetto a q_k e $\dot q_k$, otteniamo, rispettivamente

$$\sum_i\left(\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial q_i\partial q_k}\delta q_i + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}\frac{\partial\delta q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial\dot q_i\partial q_k}\delta\dot q_i + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot q_i}\frac{\partial\delta\dot q_i}{\partial q_k}\right) = 0 \tag{6.20}$$

$$\sum_i\left(\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial q_i\partial\dot q_k}\delta q_i + \frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial\dot q_i\partial\dot q_k}\delta\dot q_i + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot q_i}\frac{\partial\delta q_i}{\partial q_k}\right) = 0. \tag{6.21}$$

Dalle (6.21-22) abbiamo, rispettivamente,

$$\delta\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot q_k}\right) = \sum_i\left(\frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial q_i\partial\dot q_k}\delta q_i + \frac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial\dot q_i\partial\dot q_k}\delta\dot q_i\right) = -\sum_i\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot q_i}\frac{\partial\delta q_i}{\partial q_k}; \tag{6.22}$$

$$\delta\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_k}\right) = -\sum_i\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}\frac{\partial\delta q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial\delta\dot{q}_i}{\partial q_k}\right). \tag{6.23}$$

Usando le proprietà delle trasformazioni di punto e le equazioni di Lagrange, otteniamo dalla (6.23)

$$\frac{d}{dt}\delta\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_k}\right) = -\sum_i\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}\frac{\partial\delta q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial\delta\dot{q}_i}{\partial q_k}\right) \tag{6.24}$$

vale a dire

$$\frac{d}{dt}\delta\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_k}\right) = \delta\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_k}\right) \qquad (k=\overline{1,n}) \tag{6.25}$$

D'altra parte, al primo ordine di approssimazione, abbiamo anche che

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}(q,\dot{q},t) + \delta\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i} \tag{6.26}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}(q,\dot{q},t) + \delta\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}. \tag{6.27}$$

Sottraendo la (6.28) alla derivata totale rispetto al tempo della (6.27), si ha

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i}(q,\dot{q},t) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_i}(q,\dot{q},t), \tag{6.28}$$

dove si è tenuto conto della (6.26).

La parte di destra della (6.29) è uguale a zero lungo la traiettoria reale del moto (dove valgono le equazioni di Lagrange)

$$q_i = \phi_i(q_0,\dot{q}_0,t),$$

dunque anche la parte sinistra si annulla, ma la lagrangiana è valutata in tal caso lungo

$$q_i' = q_i + \delta q_i = \phi_i(t) + \delta q_i(t).$$

Ciò significa semplicemente che le equazioni di Lagrange valgono anche su tale traiettoria, che dunque rappresenta una diversa soluzione delle stesse equazioni differenziali, relativa a diverse condizioni iniziali.

9. Commutabilità dei processi di derivazione temporale e variazione.

Siccome $\forall f = f(q,\dot{q},t)$

$$\delta\frac{d}{dt}f = \delta\sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i\right) =$$

$$\sum_{i,k}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial q_k}\dot{q}_i + \frac{\partial^2 f}{\partial\dot{q}_i\partial q_k}\ddot{q}_i\right)\delta q_k + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial\dot{q}_k}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial q_k} + \frac{\partial^2 f}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_k}\ddot{q}_i\right)\delta\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial\dot{q}_k}\delta\ddot{q}_k\right], \tag{6.29}$$

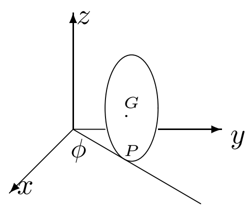
$$\frac{d}{dt}\delta f = \frac{d}{dt}\sum_k\left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial f}{\partial\dot{q}_k}\delta\dot{q}_k\right) =$$

$$\sum_{i,k}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial q_k}\dot{q}_i + \frac{\partial^2 f}{\partial\dot{q}_i\partial q_k}\ddot{q}_i\right)\delta q_k + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial\dot{q}_k}\dot{q}_i + \frac{\partial^2 f}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_k}\ddot{q}_i\right)\delta\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{d}{dt}\delta q_k + \frac{\partial f}{\partial\dot{q}_k} + \frac{d}{dt}\delta\dot{q}_k\right], \tag{6.30}$$

i due *processi* commutano se e soltanto se

$$(i) \qquad \frac{d}{dt}\delta q_k = \delta \dot{q}_k \tag{6.31}$$

$$(ii) \qquad \frac{d}{dt}\delta \dot{q}_k = \delta \ddot{q}_k \tag{6.32}$$



Inclusione dei vincoli di rotolamento nella meccanica lagrangiana

Se un generico corpo rigido rotola senza strisciare su un piano orizzontale fisso e il suo centro di massa mantiene una quota costante, il vincolo che il punto di contatto sia istantaneamente fermo, cioè che

$$0 = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - G),$$

si traduce in $$0 = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 0 & -R \end{pmatrix}$$

con $R = ||P - G||$. I due vincoli anolonomi sono, dunque,

$$\Phi_1 = \dot{x} - R\omega_y = \dot{x} - R(\dot{\theta}\sin\phi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi) = 0 \tag{6.33}$$

$$\Phi_2 = \dot{y} + R\omega_x = \dot{y} + R(\dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi) = 0. \tag{6.34}$$

La lagrangiana libera (scritta in assenza di vincoli anolonomi) è, in generale, della forma

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}[I_1(\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi)^2 + I_2(\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi)^2 + I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2]$$

Nel caso del disco rotolante, abbiamo un grado di libertà in meno. Ora, ϕ è ancora il primo angolo di Eulero (rotazione attorno all'asse verticale), ψ è la rotazione attorno all'asse principale d'inerzia passante per G e perpendicolare al piano del disco, mentre $\theta = \frac{\pi}{2}$. In tal caso,

$$\boldsymbol{\omega}_{inerz} = (\dot{\psi}\sin\phi, -\dot{\psi}\cos\phi, \dot{\phi}) \qquad \boldsymbol{\omega}_{body} = (\dot{\phi}\sin\psi, \dot{\phi}\cos\psi, \dot{\psi})$$

I due vincoli anolonomi sono ora

$$\Phi_1 = \dot{x} + R\dot{\psi}\cos\phi = 0 \tag{6.35}$$

$$\Phi_2 = \dot{y} + R\dot{\psi}\sin\phi = 0. \tag{6.36}$$

La lagrangiana libera è data da

$$\mathscr{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(I_1\dot{\phi}^2 + I_3\dot{\psi}^2)$$

Le equazioni del moto per sistemi anolonomi sono

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} = \sum_{\mu=1}^{2} \lambda_\mu \frac{\partial \Phi^\mu}{\partial \dot{q}_i} \tag{6.37}$$

cosicché si ha, indicando con Q_i le componenti generalizzate della forza di attrito statico,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} = Q_1 &= \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{x}} = \lambda_1 \\ m\ddot{y} = Q_2 &= \lambda_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \dot{y}} = \lambda_2 \\ I_1\ddot{\phi} = Q_\phi &= 0 \\ I_3\ddot{\psi} = Q_\psi &= R(\lambda_1 \cos\phi + \lambda_2 \sin\phi) \end{aligned}$$

La derivata temporale dei vincoli (3) e (4) fornisce:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{\lambda_1}{m} - R\dot{\psi}\dot{\phi}\sin\phi + \frac{R^2}{I_3}\cos\phi(\lambda_1\cos\phi + \lambda_2\sin\phi) = 0$$

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{\lambda_2}{m} + R\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\phi + \frac{R^2}{I_3}\sin\phi(\lambda_1\cos\phi + \lambda_2\sin\phi) = 0$$

Moltiplicando la prima per $\cos\phi$, la seconda per $\sin\phi$ e sommando, si ha

$$\left(\frac{1}{m} + \frac{R^2}{I_3}\right)(\lambda_1\cos\phi + \lambda_2\sin\phi) = 0$$

moltiplicando la prima per $\sin\phi$, la seconda per $-\cos\phi$ e sommando, si ha

$$\lambda_1\sin\phi - \lambda_2\cos\phi = mR\dot{\psi}\dot{\phi}$$

In questa forma, infine, si possono ricavare facilmente i moltiplicatori indeterminati di Lagrange:

$$\begin{cases} \lambda_1 = mR\dot{\psi}\dot{\phi}\sin\phi \\ \lambda_2 = -mR\dot{\psi}\dot{\phi}\cos\phi \end{cases}$$

A questo punto è risolto il problema (algebrico) della determinazione dei moltiplicatori di Lagrange; resta da studiare il moto del sistema: si noti che sostituendo l'espressione dei moltiplicatori nelle equazioni del moto si ha che $\ddot{\psi} = 0$. In definitiva, $\dot{\phi} =$ cost. ($\longrightarrow$ il piano del disco ruota uniformemente attorno all'asse z), $\dot{\psi} =$ cost. ($\longrightarrow$ il disco ruota uniformemente attorno al proprio asse perpendicolare); conseguentemente il centro di massa si muove di moto circolare uniforme. La reazione vincolare è perpendicolare alla velocità (è una forza centrifuga) ed è fornita dall'attrito del piano:

$$\mathbf{F}_A = mR\dot{\phi}_0\dot{\psi}_0(\sin\phi\mathbf{i} - \cos\phi\mathbf{j}) = -mR\dot{\psi}_0\frac{d}{dt}(\cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j})$$

senza di essa il disco si muoverebbe lungo una retta fissa del piano.