NOTE SULLE ROTAZIONI RIGIDE

(Meccanica Analitica - a.a. 2009/10)

Sommario

1. Vi sono, oltre agli angoli di Eulero, ulteriori sistemi di coordinate lagrangiane idonei a descrivere il moto di corpi rigidi con punto fisso; vi sono ulteriori rappresentazioni delle rotazioni, equivalenti a quella descritta dagli elementi di $SO(3,\mathbb{R})$.

2. Il teorema di Eulero prevede che sia sempre possibile raccordare tra loro due configurazioni di un corpo rigido con punto fisso, mediante una rotazione attorno a una direzione fissa e suggerisce un'ulteriore scelta di variabili lagrangiane;

3. le rotazioni infinitesime commutano tra di loro cosí come le velocità angolari.

4. L'isomorfismo locale
$$SU(2,\mathbb{C}) \approx SO(3,\mathbb{R})$$
determina, a partire da una rotazione reale, la trasformazione lineare di uno spinore.

1 Rappresentazione spinoriale degli operatori di rotazione

1.1 Rappresentazione complessa di un vettore reale

Un vettore, per es. lo spostamento $\mathbf{x} = (P - O)$, oltre che come matrice colonna (con tre elementi reali) può essere rappresentato con una matrice complessa 2×2:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad P = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}$$

Notiamo che la matrice P è hermitiana ($P^\dagger = P$) e a traccia nulla; viceversa una qualsiasi matrice hermitiana e a traccia nulla deve avere la forma di P e determina univocamente un vettore. La richiesta (arbitraria) che P sia a traccia nulla, ha come conseguenza che il determinante di P individua il modulo del vettore $\mathbf{x}$: $\det P = -||\mathbf{x}||^2$.

Ci domandiamo ora come si trasforma la matrice P per effetto di una rotazione reale, vale a dire se $A \in SO(3,\mathbb{R})$ trasforma le componenti di $\mathbf{x}$ secondo l'usuale equazione

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

al termine della trasformazione resta individuata la matrice

$$P' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix}$$

Qual'è la legge di trasformazione $P \longrightarrow P'$? Per rispondere introduciamo una particolare famiglia di operatori in campo complesso.

1.2 Le matrici di $SU(2,\mathbb{C})$ sono individuate da tre coordinate.

Supponiamo di ruotare un vettore in un piano complesso: pensiamo con ciò di aver tracciato un vettore $\mathbf{w} = (P - O)$ che ha componenti complesse sia sull'asse Ox che su quello Oy, e applichiamo a esso una trasformazione lineare rappresentata da una matrice quadrata:

$$\begin{pmatrix} w'_x \\ w'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix},$$

dove tutti i numeri che compaiono nell'equazione sono, in linea di principio, complessi.

In modo analogo a quanto già visto per gli operatori di $SO(3,\mathbb{R})$, si può mostrare che le matrici complesse

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

unitarie ($QQ^\dagger = \mathbf{1}$) conservano i moduli dei vettori del piano complesso. Comunque, è interessante notare che se all'unitarietà aggiungiamo la richiesta che il determinante di tali matrici sia $= +1$, possiamo affermare che ciascuna di queste matrici è individuata dal valore di 3 soli parametri reali. Si lascia al lettore la verifica diretta di:

$$\left.\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \\ \alpha\delta - \beta\gamma = +1 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \\ \\ \alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1 \end{array}$$

Le matrici Q, unitarie e unimodulari, costituiscono il gruppo $SU(2,\mathbb{C})$, che con $SO(3,\mathbb{R})$ ha per ora in comune solo il numero di parametri che individuano ciascun elemento del gruppo.

1.3 C'è una corrispondenza (homomorfismo) tra i gruppi $SU(2,\mathbb{C})$ e $SO(3,\mathbb{R})$

Torniamo alla matrice P precedentemente introdotta. C'è un'interessante legame tra di essa e $SU(2,\mathbb{C})$: l'azione di una matrice unitaria su P è formalizzata dalla trasformazione di similitudine

$$P' = QPQ^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* & -\beta \\ \beta^* & \alpha \end{pmatrix}; \qquad (1.1)$$

infatti, ricordiamo quanto osservato per le rotazioni reali: la trasformazione $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ effettuata da A sui vettori, agisce anche sulle matrici, e lo fa secondo la legge: $B' = ABA^T$. Ma la trasformazione di similitudine ha una fondamentale proprietà (che si può dimostrare con un calcolo diretto): conserva l'hermitianità e la traccia (nulla) di P.

Di conseguenza la struttura di P' deve essere identica a quella di P:

$$P' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix}$$

e, ancora,

$$\det(P') = \det(QPQ^\dagger) = \det(P) \Longrightarrow {x'}^2 + {y'}^2 + {z'}^2 = x^2 + y^2 + z^2. \qquad (1.2)$$

Quest'ultima proprietà è la stessa che caratterizza l'ortogonalità delle matrici di rotazione A. In sintesi:
L'invarianza dei moduli dei vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ è l'effetto sia dell'applicazione di A al vettore $\mathbf{x}$ che dell'applicazione di Q alla matrice P. La (1.2) definisce l'applicazione tra i due gruppi, e associa a ogni

rotazione in $\mathbb{R}^3$, descritta da una matrice $A \in SO(3,\mathbb{R})$ una trasformazione lineare nel piano complesso descritta dalla matrice Q.

Le applicazioni degli operatori dei due gruppi rappresentano una stessa operazione astratta, la rappresentano su insiemi diversi e con operazioni diverse. In tal senso le rappresentazioni devono essere equivalenti e nel linguaggio matematico si deve mostrare che i due gruppi sono isomorfi, vale a dire che se indichiamo con

$$Q_2 \quad \text{e} \quad Q_1 \qquad\qquad B \quad \text{e} \quad C$$

rispettivamente due elementi di $SU(2,\mathbb{C})$ e le due rotazioni reali corrispondenti, si deve avere che tale corrispondenza associa al prodotto Q_2Q_1 proprio il prodotto BC (la corrispondenza *conserva* il prodotto). E cosí è:

$$\begin{aligned} P' = Q_1PQ_1^\dagger \quad &\longleftrightarrow \quad \mathbf{x}' = C\mathbf{x} \\ P'' = Q_2P'Q_2^\dagger \quad &\longleftrightarrow \quad \mathbf{x}'' = B\mathbf{x}' \\ P'' = Q_2Q_1PQ_1^\dagger Q_2^\dagger \quad &\longleftrightarrow \quad \mathbf{x}'' = BC\mathbf{x} \end{aligned}$$

1.4 Corrispondenza tra le coordinate di $SU(2,\mathbb{C})$ e quelle di $SO(3,\mathbb{R})$

Indicando con $x_- = x - iy$ e $x_+ = x + iy$, la trasformazione (1.1) implica che

$$P' = \begin{pmatrix} z' & x'_- \\ x'_+ & -z' \end{pmatrix} = QPQ^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* z + \beta^* x_- & -\beta z + \alpha x_- \\ \alpha^* x_+ - \beta^* z & -\beta x_+ - \alpha z \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Uguagliando termine a termine gli elementi delle matrici si ha infine

$$\left\{ \begin{array}{rlll} x'_+ = & -2\alpha^*\beta^* z & -(\beta^*)^2 x_- & +(\alpha^*)^2 x_+ \\ x'_- = & -2\alpha\beta z & +\alpha^2 x_- & -\beta^2 x_+ \\ z' = & (\alpha\alpha^* - \beta\beta^*)z & +\alpha\beta^* x_- & +\alpha^*\beta x_+ \end{array} \right. \tag{1.4}$$

La (1.4) altro non è che una trasformazione lineare che connette le componenti dei vettori reali $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}$: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ e, per fissare le idee, la terza riga di A è

$$(\alpha^*\beta + \alpha\beta^* \qquad i(-\alpha\beta^* + \alpha^*\beta) \qquad \alpha\alpha^* - \beta\beta^*)$$

…eccetera. È allora possibile scrivere una corrispondenza tra i **parametri di Cayley-Klein** α, β e gli angoli di Eulero semplicemente esprimendo la matrice A in entrambi i sistemi di coordinate e poi uguagliando termine a termine le due matrici A così scritte. Se resta un dubbio sul fatto che A sia una matrice reale, basta sostituire

$$\alpha = e_0 + ie_3 \qquad \beta = e_2 + ie_1 \qquad (e_0, e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R})$$

e la matrice diviene

$$\begin{pmatrix} e_0^2+e_1^2-e_2^2-e_3^2 & 2(e_1e_2 + e_0e_3) & 2(e_1e_3 - e_0e_2) \\ 2(e_1e_2 - e_0e_3) & e_0^2-e_1^2+e_2^2-e_3^2 & 2(e_2e_3 + e_0e_1) \\ 2(e_1e_3 + e_0e_2) & 2(e_2e_3 - e_0e_1) & e_0^2-e_1^2-e_2^2+e_3^2 \end{pmatrix}$$

Qui abbiamo introdotto i **parametri di Eulero** e_i che sono 4, ulteriori, possibili variabili lagrangiane, vincolate dalla condizione

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1.$$

Dunque esistono, e sono facilmente esplicitabili, relazioni funzionali tra angoli di Eulero e parametri di Cayley-Klein (o parametri di Eulero).

1.5 L'isomorfismo non è globale

Si può mostrare che la corrispondenza tra $SU(2,\mathbb{C})$ e $SO(3,\mathbb{R})$è di tipo $2:1$. Ci basta verificarlo in un caso elementare, quello di una rotazione piana attorno all'asse Oz. In tal caso, detto ϕ l'angolo della rotazione, si ha

$$\begin{aligned}
x'_+ &= x\cos\phi + y\sin\phi + i(-x\sin\phi + y\cos\phi) = x(\cos\phi - i\sin\phi) + iy(\cos\phi - i\sin\phi) = e^{-i\phi}x_+ \\
x'_- &= x\cos\phi + y\sin\phi - i(-x\sin\phi + y\cos\phi) = x(\cos\phi + i\sin\phi) - iy(\cos\phi + i\sin\phi) = e^{i\phi}x_- \\
z' &= z
\end{aligned}$$

Corrispondentemente, dalle (1.4), si ottiene che

$$\beta = 0; \quad \alpha^2 = e^{i\phi}$$

La corrispondenza $SU(2,\mathbb{C})$ e $SO(3,\mathbb{R})$ associa dunque tra loro le seguenti matrici:

$$Q_\phi = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} \longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se consideriamo due rotazioni, in particolare $\phi = 2\pi$ e $\phi = 4\pi$, a ciascuna di esse corrisponde una matrice distinta di $SU(2,\mathbb{C})$:

$$Q_{2\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad Q_{4\pi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -Q_{2\pi}$$

mentre è del tutto evidente che per entrambe le rotazioni

$$A = \mathbf{1}.$$

Generalizzando questo caso, si può mostrare che la corrispondenza è tra ogni $A \in SO(3,\mathbb{R})$ e una coppia di matrici $(Q,-Q)$ di $SU(2,\mathbb{C})$. Parleremo allora di homomorfismo, in quanto la biunivocità dell'applicazione non è rispettata.[1]

1.6 Q si esprime mediante i parametri di Eulero e le matrici di Pauli.

Se introduciamo le parentesi di Pauli $\boldsymbol{\sigma}_i$, una generica matrice di $SU(2,\mathbb{C})$ si scrive come segue:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha = e_0 + ie_3 & \beta = e_2 + ie_1 \\ \gamma = -(e_2 - ie_1) & \delta = e_0 - ie_3 \end{pmatrix} &= e_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + ie_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + ie_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + ie_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= e_0\mathbf{1} + i\mathbf{e}\cdot\boldsymbol{\sigma}.
\end{aligned}$$

Nel caso specifico di una rotazione piana attorno all'asse z, per come abbiamo già trattato il caso, si può scrivere:

$$Q_\phi = \mathbf{1}\cos\frac{\phi}{2} + i\boldsymbol{\sigma}_3\sin\frac{\phi}{2}$$

Le stesse matrici di Pauli forniscono una decomposizione particolarmente sintetica delle matrici hermitiane a traccia nulla. Dalla definizione, si ha che

$$P = x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}.$$

[1]Si può anche parlare di isomorfismo locale nel senso che la biunivocità vale tra un aperto contenente Q (cosí come un aperto contenente $-Q$!) e uno contenente A

2 Il teorema di Eulero

Supponiamo che un corpo rigido con un punto fisso, posizionato inizialmente in una configurazione $\mathcal{C}_0$, si trovi, dopo un intervallo di tempo $(t - t_0)$ in una configurazione $\mathcal{C}_t$, seguendo una qualunque evoluzione temporale. Il teorema di Eulero, in pratica, ci assicura che si può sempre individuare una rotazione (attorno a un asse fissato) che connetta queste configurazioni. Questo significa che la reale evoluzione temporale del corpo è **matematicamente equivalente** a tale rotazione (istante per istante, l'asse di rotazione, nell'evoluzione reale, potrebbe cambiare direzione).

Per la dimostrazione del teorema, premettiamo il seguente

Lemma: *Ogni matrice* $\mathbf{A} \in SO(3,\mathbb{R})$ *ha (almeno) un autovalore uguale a* $+1$.
Dim.: gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono le radici dell'equazione di terzo grado $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$. Due radici sono sempre tra loro coniugate, quindi almeno una è reale. Dalla teoria, sappiamo che[2] A può essere diagonalizzata e gli autovalori $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, che si trovano sulla diagonale, sono di modulo unitario. Inoltre, essendo A unimodulare, ne segue che

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = +1.$$

Se λ è una radice reale e $\mathbf{x}$ è un autovettore reale non nullo, allora dalla condizione di ortogonalità e dall'equazione agli autovalori $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$, si ha che

$$\|\mathbf{Ax}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \quad \text{e} \quad \|\mathbf{Ax}\|^2 = |\lambda|^2 \|\mathbf{x}\|^2 \Longrightarrow \lambda = \pm 1.$$

Se tutte le radici sono reali, esse sono $(1,1,1)$ o $(1,-1,-1)$, per l'unimodularità di A. Altrimenti, se due autovalori sono complessi,

$$\lambda_2^* = \lambda_3 \Longrightarrow |\lambda_2| = 1 = \lambda_2 \lambda_2^* = \lambda_2 \lambda_3$$

e, ancora, $\lambda_1 = +1$ dalla condizione sul determinante.

Teorema di Eulero: *Ogni matrice* $\mathbf{A} \in SO(3,\mathbb{R})$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$, *è una rotazione di un angolo* Φ *attorno a un asse* $\mathbf{n}$.
Dim.: il precedente lemma ci assicura che la matrice $\mathbf{A}$ ha un autovettore $\mathbf{n}$ con autovalore 1: $\mathbf{An} = \mathbf{n}$. La retta individuata da $\mathbf{n}$ è invariante rispetto alla rotazione. Sia π il piano ortogonale a tale retta:

$$\pi = \{\mathbf{y} | \mathbf{n} \cdot \mathbf{y} = 0\}.$$

Poiché $\mathbf{A}$ è ortogonale, $\mathbf{A}(\pi) = \pi$. Indicando con $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ una base ortogonale su π, relativamente alla terna $\mathbf{n}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, $\mathbf{A}$ è rappresentata dalla matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

D'altra parte, per le proprietà di $\mathbf{A}$, la matrice $\quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$

è evidentemente ortogonale e speciale, dunque appartiene a $SO(2,\mathbb{R})$, il gruppo delle rotazioni piane. Quindi $\mathbf{A}$ è una rotazione attorno alla direzione individuata da $\mathbf{n}$.

Come corollario del teorema di Eulero, possiamo affermare che:
Ogni matrice $\mathbf{A} \in SO(3,\mathbb{R})$ *può essere scritta, in una qualche base ortonormale, come*

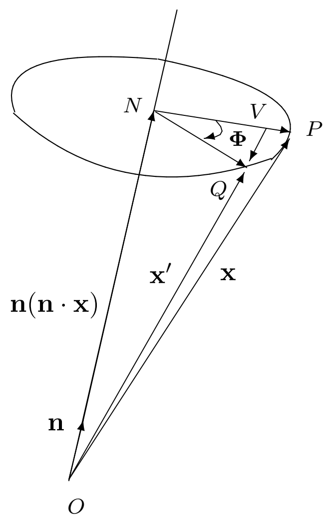
[2] se si vogliono approfondire i dettagli si veda p.es. il libro di testo a pp. 150-152

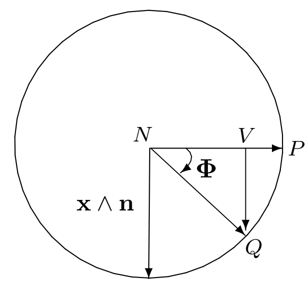
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Phi & \sin\Phi \\ 0 & -\sin\Phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Ciò significa che per la descrizione di una rotazione di un corpo rigido con punto fisso, una possibile scelta per le coordinate lagrangiane è la seguente: due variabili individuano la direzione del versore $\mathbf{n}$ dell'asse di rotazione, una terza coordinata è proprio l'angolo Φ della rotazione attorno a tale asse.

<u>Osservazione</u>: le coppie $(\mathbf{n}, \Phi)$ e $(-\mathbf{n}, -\Phi)$ rappresentano la medesima rotazione. Si può dunque restringere l'angolo all'intervallo $[0, \pi]$.

Ci proponiamo ora di esplicitare mediante queste nuove variabili lagrangiane la relazione lineare tra le componenti di $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$, vale a dire dei vettori posizione che individuano i punti del corpo rigido prima e dopo la rotazione[3]. A tal fine, analizziamo la decomposizione dei vettori qui sotto illustrata:





Qui vediamo la rotazione del punto P dall'alto. V è il piede della perpendicolare tracciata da Q a $(P - N)$.

nella figura di sinistra il generico vettore spostamento $\mathbf{x} = (P - O)$ viene ruotato in senso orario nel vettore $\mathbf{x}' = (Q - O)$. Quest'ultimo, come è evidente dalla figura, si decompone anche in:

$$(Q - O) = (N - O) + (V - N) + (Q - V).$$

Valutiamo separatamente ciascuno di questi componenti:

① $(N - O) = \mathbf{n}(P - O)\cdot\mathbf{n}$,
essendo $(P - O)\cdot\mathbf{n}$ pari alla proiezione di $(P - O)$ lungo l'asse di $\mathbf{n}$.

② $\|(V - N)\| = \|(Q - N)\|\cos\Phi = \|(P - N)\|\cos\Phi \Longrightarrow$
$(V - N) = (P - N)\cos\Phi = [(P - O) - (N - O)]\cos\Phi = [\mathbf{x} - \mathbf{n}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})]\cos\Phi$

③ $\|(Q - V)\| = \|(Q - N)\|\sin\Phi = \|(P - O)\wedge\mathbf{n}\|\sin\Phi \Longrightarrow (Q - V) = (\mathbf{x}\wedge\mathbf{n})\sin\Phi$.

In totale, $\quad (Q - O) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + [\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}]\cos\Phi + (\mathbf{x}\wedge\mathbf{n})\sin\Phi.$

Riordinando, abbiamo: $\boxed{\mathbf{x}' = \mathbf{x}\cos\Phi + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}(1 - \cos\Phi) + (\mathbf{x}\wedge\mathbf{n})\sin\Phi}$

[3] Si noti che, approfondendo tale analisi, sarebbe ovviamente possibile scrivere equazioni di trasformazione tra questi nuovi parametri e le coordinate di $SU(2,\mathbb{C})$ e $SO(3,\mathbb{R})$ già studiate.

3 Osservazioni sulle rotazioni infinitesime.

Se una trasformazione è infinitesima, cioè se la differenza tra i vettori posizione

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$$

è valutata trascurando i contributi superiori al primo ordine di approssimazione, la formula precedentemente ricavata per le rotazioni finite si riduce a

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + (\mathbf{n} \wedge \mathbf{x})d\Phi \tag{3.1}$$

dove $\cos\Phi$ è stato approssimato a 1 e $\sin\Phi$ a $d\Phi$; inoltre si è fatto uso di una convenzione sui segni opposta alla precedente: la trasformazione consiste ora in una rotazione (attiva) dei vettori in senso antiorario ($\Phi \to -\Phi$).

D'altra parte, l'approssimazione al primo ordine della matrice $\mathbf{A}$ nella formula della rotazione $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ si effettua mediante la matrice della trasformazione infinitesima $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{x} \qquad (\Longrightarrow d\mathbf{x} = \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{x}).$$

Per fissare le idee consideriamo una rotazione piana e ne sviluppiamo al primo ordine di approssimazione la matrice, indicando con $d\Phi$ la variazione infinitesima dell'angolo :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d\Phi & 0 \\ -d\Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quest'ultima è la matrice $\boldsymbol{\varepsilon}$ che fornisce la variazione infinitesima $d\mathbf{x}$.

La matrice $\boldsymbol{\varepsilon}$ gode evidentemente delle seguenti proprietà:

$(\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}_1)(\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}_2) = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}_2)(\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}_1)$ (le rotazioni infinitesime commutano);

$(\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{1}$ (la rotazione inversa è $\mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}$);

$\boldsymbol{\varepsilon}^T = -\boldsymbol{\varepsilon}$ ($\boldsymbol{\varepsilon}$ è antisimmetrica).

In base a quest'ultima proprietà, e tenendo conto della (3.1), $\boldsymbol{\varepsilon}$, espressa mediante le coordinate $\mathbf{n}$ e Φ, è:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} d\Phi = \sum_{i=1}^{3} n_i \mathbf{M}_i d\Phi = d\Phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \tag{3.2}$$

dove

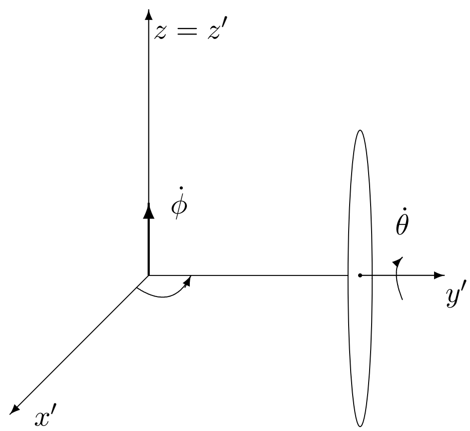
$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le (3.1) e (3.2) ripropongono l'applicazione (nota dalla cinematica del punto) tra matrici antisimmetriche e prodotti vettoriali; a livello infinitesimo qui abbiamo

$$d\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} dt \wedge \mathbf{x} \Longrightarrow \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{n} d\Phi,$$

$\boldsymbol{\omega}$ essendo la velocità angolare del corpo rigido rispetto a un osservatore fisso, vale a dire la velocità angolare di un qualunque sistema solidale con il corpo rigido rispetto a un sistema fisso nello spazio.

Proprietà importante: **Le rotazioni finite non sono commutative; le rotazioni infinitesime (e con esse le velocità angolari) lo sono**.
Per esemplificare, consideriamo il seguente sistema



Un disco ruota attorno alla retta Oy' con velocità angolare $\dot\theta$. A sua volta l'asse Oy' ruota attorno all'asse Oz con velocità angolare $\dot\phi$.

Istante per istante il corpo rigido è soggetto a due rotazioni e le due corrispondenti velocità angolari sono

$$\dot\theta\mathbf{j}', \quad \text{e} \quad \dot\phi\mathbf{k}.$$

Conviene sempre riferirsi a un unico osservatore: se $GXYZ$ (con $GZ = Gy'$) è un sistema solidale con il disco, avremo che le velocità angolari sono

$$\dot\theta\mathbf{K}, \quad \text{e} \quad \dot\phi\cos\theta\mathbf{I} + \dot\phi\sin\theta\mathbf{J}.$$

Invece, rispetto al sistema inerziale $Oxyz$, avremo

$$\dot\theta\cos\phi\mathbf{i} + \dot\theta\sin\phi\mathbf{j}, \quad \text{e} \quad \dot\phi\mathbf{k}.$$

Indichiamo con B e C due successive rotazioni: per fissare le idee, C ruota il sistema di riferimento solidale al disco di un angolo θ attorno Gy', B di un angolo ϕ attorno a Oz, e sia $A = CB$ la rotazione totale[4]. A queste rotazioni associamo, piuttosto che le relative velocità angolari, le matrici antisimmetriche di rotazione:

$$A \longrightarrow \Omega = \dot A A^T; \quad B \longrightarrow \Omega_B = \dot B B^T; \quad C \longrightarrow \Omega_C = \dot C C^T.$$

Come facilmente si verifica,

$$\Omega = \dot A A^T = (\dot C B + C\dot B)B^T C^T = \Omega_C + C\Omega_B C^T$$

dove l'ultimo termine rappresenta la trasformazione di similitudine che permette di esprimere la matrice Ω_B nel sistema di riferimento intermedio ottenuto mediante la rotazione C. Tradotto in termini di velocità angolari, ciò significa

$$\boldsymbol\omega_A = \boldsymbol\omega_C + \boldsymbol\omega_B$$

che chiaramente è una relazione commutativa.

Come applicazione, studiamo una rotazione infinitesima come somma vettoriale delle tre derivate temporali degli angoli di Eulero, ciascuna moltiplicata per il corretto versore:

$$\boldsymbol\omega(t) = \dot\phi\mathbf{e}_3 + \dot\theta\mathbf{e}_1' + \dot\psi\mathbf{E}_3,$$

[4]nel caso generale ovviamente $BC \neq CB$.

dove la successione delle rotazioni della terna di versori è

$$\mathbf{e}_i \xrightarrow{\phi} \mathbf{e}_i' \xrightarrow{\theta} \mathbf{e}_i'' \xrightarrow{\psi} \mathbf{E}_i \qquad\qquad (i = 1, 2, 3).$$

Allora, ruotiamo (in senso passivo) tutti i versori su una stessa base, per esempio quella iniziale,

$$\mathbf{e}_1' \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

di modo che si ottengono le note relazioni:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \dot\phi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot\theta \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot\psi \begin{pmatrix} \sin\phi\sin\theta \\ -\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Osservazione: **La velocità angolare non è una funzione integrabile degli angoli di Eulero e delle loro derivate temporali: non si può esprimere come la derivata totale rispetto al tempo di una funzione degli angoli di Eulero**.
Supponiamo per assurdo che

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\Lambda}(\phi, \theta, \psi)$$

Sulla prima componente di $\boldsymbol{\omega}$, per fissare le idee, ciò si traduce in

$$\omega_1 = \dot\theta\cos\phi + \dot\psi\sin\phi\sin\theta = \frac{\partial\Lambda_1}{\partial\phi}\dot\phi + \frac{\partial\Lambda_1}{\partial\theta}\dot\theta + \frac{\partial\Lambda_1}{\partial\psi}\dot\psi$$

da cui

$$\frac{\partial\Lambda_1}{\partial\theta} = \cos\phi, \qquad \frac{\partial\Lambda_1}{\partial\psi} = \sin\phi\sin\theta,$$

ma queste relazioni sono tra loro incompatibili: basta derivare la prima rispetto a ψ, la seconda rispetto a θ e confrontare i risultati. Conseguentemente ω_1 non è una velocità generalizzata.

4 Commento: perché studiare $SU(2, \mathbb{C})$?

Nel passaggio dalla Cinematica alla Meccanica del corpo rigido, in realtà ben poco degli sviluppi teorici qui presentati saranno utilizzati per scrivere e risolvere le corrispondenti equazioni differenziali. Ciò nonostante si richiama l'attenzione sulla rappresentazione delle rotazioni in termini degli operatori di $SU(2, \mathbb{C})$ per i seguenti motivi:

1. Le coordinate *naturali* per descrivere gli elementi di questo gruppo (siano esse i parametri di Cayley-Klein o quelli di Eulero) sono coordinate lagrangiane, alternative agli angoli di Eulero. L'introduzione del gruppo complesso ha permesso di esemplificare in modo non banale la possibilità di ricorrere a sistemi di coordinate lagrangiane tra loro distinti per descrivere uno stesso sistema meccanico.

2. È possibile scrivere equazioni di trasformazione tra le coordinate lagrangiane

$$(\phi, \theta, \psi) \qquad (e_0, e_1, e_2, e_3) \qquad (\mathbf{n}, \Phi)$$

ed esprimere le matrici di $SO(3, \mathbb{R})$ mediante i parametri di Eulero: dal punto di vista pratico questa sostituzione può risultare conveniente, in quanto gli elementi delle matrici, piuttosto che in termini di funzioni trigonometriche, sono formati da semplici polinomi di secondo grado.

3. Nella descrizione quanto meccanica, l'equazione del moto (che non è piú l'equazione di Newton) non determina la posizione della particella, bensí la **funzione d'onda** (una funzione complessa)

$$\Psi(\mathbf{x}, t)$$

che è cosí correlata alla probabilità $d\mathcal{P}(\mathbf{x}, t)$ della particella di trovarsi all'istante t nell'elemento di volume $dx\,dy\,dz$ che circonda il punto $\mathbf{x}$:

$$d\mathcal{P}(\mathbf{x}, t) = C|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 dx\,dy\,dz$$

(C è una costante di normalizzazione).

D'altra parte, in Meccanica Quantistica, alle particelle è attribuito un momento angolare totale che somma due contributi: quello *orbitale* (che è il momento angolare classico, prodotto del vettore spostamento e della quantità di moto) e un momento *intrinseco* detto di spin. Questa grandezza può assumere valori discreti e a particelle come l'elettrone si associano due possibili numeri quantici:

$$\frac{1}{2} \qquad \text{o} \qquad -\frac{1}{2}.$$

Questo è il motivo per cui all'elettrone si associa, piuttosto che una singola funzione d'onda, una coppia di funzioni d'onda, o meglio, una funzione d'onda a due componenti:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi(\mathbf{x}, \frac{1}{2}) \\ \Psi(\mathbf{x}, -\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}$$

(le due componenti sono dette con *spin up* e con *spin down*).

Dal punto di vista formale, questa funzione è proprio un vettore complesso come quello a cui abbiamo applicato la trasformazione lineare $Q \in SU(2, \mathbb{C})$. Questi *vettori* hanno dunque un'importante applicazione in Fisica e per essi Ehrenfest coniò nel 1929 il termine **spinori**. Una loro caratteristica, che abbiamo già precedentemente individuato, è che sono invarianti per rotazioni pari a $2n(2\pi)$ mentre per un numero dispari di 2π uno spinore Ψ è trasformato in $-\Psi$.

In sintesi: abbiamo mostrato che la rotazione in $\mathbb{R}^3$, descritta da operatori di $SO(3, \mathbb{R})$,

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x},$$

è rappresentata in campo complesso dalla trasformazione di similitudine

$$P' = QPQ^\dagger,$$

dove, si deve ricordare, P' e P rappresentano $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}$, rispettivamente.

E fino qui, l'operatore Q ha un ruolo di operatore di rotazione sulle coordinate di $\mathbf{x}$. Ma le matrici Q sono anche le matrici di rotazione della Meccanica Quantistica, nel senso che, in corrispondenza a una rotazione reale, la funzione d'onda di un elettrone con spin si trasforma proprio secondo la legge lineare

$$\begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}' = Q \begin{pmatrix} \Psi_+ \\ \Psi_- \end{pmatrix}$$

e Q deve essere un elemento di $SU(2, \mathbb{C})$, perchè solo cosí è garantita l'invarianza del modulo dello spinore e, dunque, della probabilità che una particella si trovi in una certa configurazione.