ESERCIZI EMQ

I.Masina

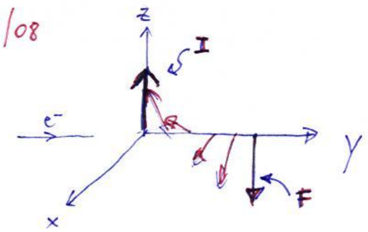
2010/2011

STERN GERLACH

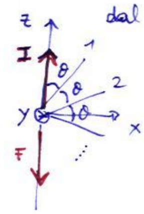
Un fascio di elettroni che viaggia lungo l'asse y viene analizzato da una serie di filtri di Stern-Gerlach che analizzano la loro componente di spin nel piano x-z. Il primo filtro (I) fa passare solo gli elettroni polarizzati nella direzione z positiva, l'ultimo (F) quelli con polarizzazione z negativa. Inseriamo adesso fra I e F una serie di N filtri che analizzano lo spin in una direzione del piano x-z che fa col precedente un angolo pari a π/ (N+1) e fanno passare solo la componente positiva nella loro direzione (vedi esempio con N=5 nella figura) . Si calcoli la probabilità che un elettrone riesca ad attraversare tutto l'apparato per N=1,2,3,4,5 e nel limite di N molto grande.

---

③ 5/11/08



dal pto di vista di un e⁻



$\theta = \frac{\pi}{N+1}$

Dopo I $\quad |\alpha\rangle = |+\rangle$

Ricordare (es. 1.9 Sakurai) che $\quad |\vec{S}\cdot\hat{n}\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,|-\rangle$

è t.c. $\quad \vec{S}\cdot\hat{n}\;|\vec{S}\cdot\hat{n}\rangle = \frac{\hbar}{2}\;|\vec{S}\cdot\hat{n}\rangle$

$\Big[$ con le rot^{ni} $\quad e^{-i\sigma_y\frac{\theta}{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \left(\mathbb{1}\cos\frac{\theta}{2} - i\sigma_y\sin\frac{\theta}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta/2 & -\sin\theta/2\\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta/2\\ \sin\theta/2\end{pmatrix}\Big]$

Proiezione dello stato $|\vec{S}\cdot\hat{n}_1\rangle$ su $|\vec{S}\cdot\hat{I}\rangle$

$$C = \left(\langle+|\cos\frac{\theta}{2} + \langle-|\sin\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}$$

$$|C|^2 = P_{I1} = \cos^2\frac{\theta}{2}$$

lo stesso avviene ad ogni passaggio successivo: $\quad P_{i,i+1} = \cos^2\frac{\theta}{2}$

<u>N=0</u> $\quad \to \theta = \pi \qquad \Rightarrow C = 0 \qquad P_{IF}^{(0)} = 0$

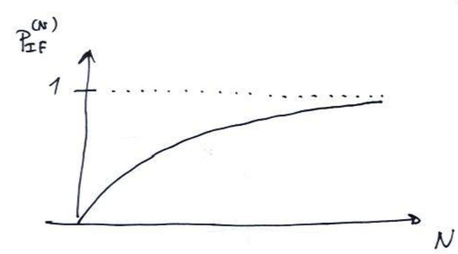
<u>N=1</u> $\quad \to \theta = \pi/2 \quad - \Rightarrow C = \cos\pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad P_{IF}^{(1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1/4 = .25$

<u>N=2</u> $\quad \to \theta = \pi/3 \qquad \Rightarrow C = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad P_{IF}^{(2)} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \simeq .42$

$$\Longrightarrow P_{IF}^{(N)} = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2(N+1)}$$

o meglio:

$$\boxed{P_{IF}^{(N)} = \left(\cos\frac{\pi}{2(N+1)}\right)^{2(N+1)}}$$



TIME EVOLUTION

Si consideri un sistema a due stati con Hamiltoniana

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & \eta \\ \eta & E_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) Puo' η essere un numero complesso?
b) Determinare gli autovalori di H.
c) Al tempo $t = 0$ il sistema e' nello stato $|\psi(0)> = (|1> + i|2>)/\sqrt{2}$. Determinare le probabilita' $P_1(t)$ e $P_2(t)$ di trovare il sistema al tempo t nello stato $|1>$ e $|2>$ rispettivamente. Fare un disegno di $P_1(t)$ e $P_2(t)$ in funzione del tempo.

1) Affinché H sia hermitiano, η deve essere reale

2) $\det H = E_0^2 - \eta^2 = \lambda_A \lambda_B$, $\mathrm{Tr} H = 2E_0 = \lambda_A + \lambda_B \Rightarrow \quad \lambda_A = E_0 - \eta \quad \lambda_B = E_0 + \eta$

$$\begin{array}{cc} |1\rangle & |2\rangle \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} E_0 & -\eta \\ -\eta & E_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (E_0 \mp \eta) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$\rightarrow E_0 \alpha - \eta\beta = (E_0 - \eta)\alpha \rightarrow -\eta\beta = -\eta\alpha \Rightarrow \alpha_A = \beta_A = 1/\sqrt{2}$

$\rightarrow -\eta\alpha + E_0\beta = (E_0 + \eta)\beta \rightarrow -\eta\alpha = \eta\beta \rightarrow \alpha_B = -\beta_B = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|A\rangle = \frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}} \quad , |B\rangle = \frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}}$$

Se $\eta > 0$, $|A\rangle$ è lo stato fondamentale , $|B\rangle$ lo stato eccitato.

3) Invertendo le precedenti $|1\rangle = \frac{|A\rangle + |B\rangle}{\sqrt{2}} \qquad |2\rangle = \frac{|A\rangle - |B\rangle}{\sqrt{2}}$

Quindi

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\Big(|A\rangle + |B\rangle + i\,|A\rangle - i\,|B\rangle \Big) = \frac{1}{2}\Big[(1+i)\,|A\rangle + (1-i)\,|B\rangle \Big]$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} |\psi(0)\rangle = e^{-i\frac{E_0 - \eta}{\hbar}t} \frac{1+i}{2}|A\rangle + e^{-i\frac{E_0+\eta}{\hbar}t} \frac{1-i}{2}|B\rangle =$$

$$= \frac{e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}}}{2} \Big(e^{\frac{i\eta t}{\hbar}} (1+i) \underbrace{|A\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)} + e^{-\frac{i\eta t}{\hbar}} (1-i) \underbrace{|B\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle} \Big)$$

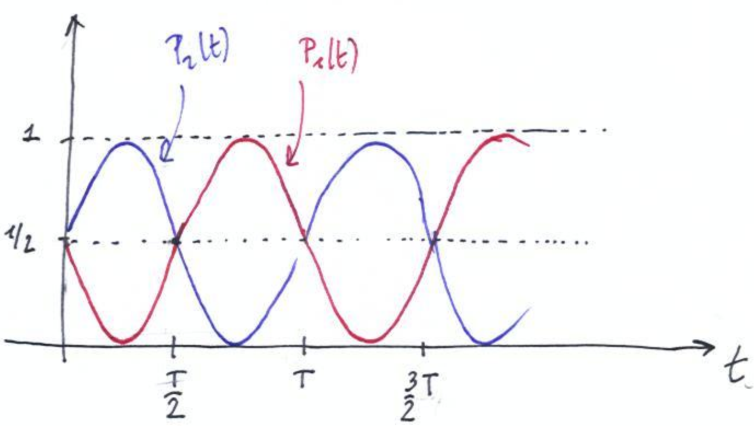
$$= e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\underbrace{\left(\frac{e^{\frac{i\eta t}{\hbar}}(1+i) + \overbrace{e^{-\frac{i\eta t}{\hbar}}(1-i)}^{cc}}{2} \right)}_{= \mathrm{Re}\left(e^{\frac{i\eta t}{\hbar}} (1+i) \right) = \cos\frac{\eta t}{\hbar} - \sin\frac{\eta t}{\hbar}} |1\rangle + \underbrace{\left(\frac{e^{\frac{i\eta t}{\hbar}}(1+i) - \overbrace{e^{-\frac{i\eta t}{\hbar}}(1-i)}^{cc}}{2} \right)}_{= i\, \mathrm{Im}\left(e^{\frac{i\eta t}{\hbar}} (1+i) \right) = i\left(\sin\frac{\eta t}{\hbar} + \cos\frac{\eta t}{\hbar} \right)} |2\rangle \right]$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\cos\frac{\eta t}{\hbar} - \sin\frac{\eta t}{\hbar} \right) |1\rangle + i \left(\cos\frac{\eta t}{\hbar} + \sin\frac{\eta t}{\hbar} \right) |2\rangle \right]$$

$$P_1(t) = \frac{1}{2} (c-s)^2 = \frac{1}{2} \left(\underbrace{c^2+s^2}_{1} - \overbrace{2cs}^{\sin\frac{2\eta t}{\hbar}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \sin\frac{2\eta t}{\hbar} \right)$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2} (c+s)^2 = \frac{1}{2} \left(\underbrace{c^2+s^2}_{1} + 2cs \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \sin\frac{2\eta t}{\hbar} \right)$$

periodo $T = \frac{\pi \hbar}{\eta}$



GRADINI

Un fascio monocromatico di elettroni viaggia lungo l'asse x verso una zona nella quale si sospetta ci possa essere un doppio gradino di potenziale repulsivo. Aumentando da valori molto bassi l'energia cinetica degli elettroni si osserva che non c'e' riflessione per la prima volta per E = 15 eV. e per la seconda volta per E = 30 eV.

a) Quanto è alto e quanto è largo il gradino?
b) Per che valore dell'energia del fascio mi aspetto di nuovo trasmissione completa?
c) Quanto vale il coefficiente di riflessione per E = 10 eV?

② 5/11/08 fascio monocromatico di e^- viaggia lungo x verso doppio gradino.

Aumentando E (partendo da valori molto bassi) si osserva R=0 a 15 e 30 eV.

a) Altezza e larghezza gradino

b) Per quale E successivo ci si aspetta R=0 di nuovo?

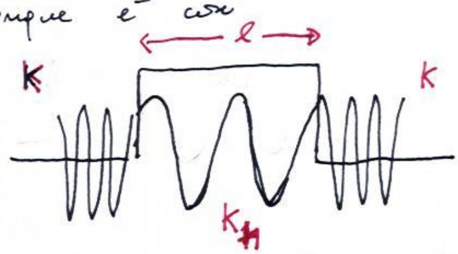
c) Valore di R per E = 10 eV.

Innanzitutto il gradino deve essere così  e non così .

Inoltre deve essere proprio in su , non in giù 

altrimenti per E molto piccole sarebbe riflesso tutto.

a) Dunque è così



se $K_{in}\ell = 2\pi n$ allora è come se il gradino non ci fosse: $T=1$, $R=0$.

$n = 1,2,3,\ldots$

la prima volta $n=1$ $\quad k_1\ell = 2\pi \quad \underset{\uparrow\, 15\,eV}{E_1} - V_0 = \frac{\hbar^2}{2m}k_1^2 \rightarrow k_1^2 = \frac{2m(E_1-V_0)}{\hbar^2}$

la seconda volta $n=2$ $\quad k_2\ell = 4\pi = 2k_1\ell \quad \underset{\uparrow\, 2E_1}{E_2} - V_0 = \frac{\hbar^2}{2m}k_2^2 \rightarrow k_2^2 = \frac{2m(2E_1-V_0)}{\hbar^2}$

dunque $\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2 = k_1^2 = 2m\,\frac{E_1-V_0}{\hbar^2}$

$$\left(\frac{4\pi}{\ell}\right)^2 = k_2^2 = 2m\,\frac{2E_1-V_0}{\hbar^2} \xrightarrow{①} \left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2 = \frac{m}{2}\,\frac{2E_1-V_0}{\hbar^2} = \frac{2m\,(E_1-V_0/2)}{\hbar^2}$$

differenza $\quad 0 = mE_1 \underbrace{-2mV_0 + \frac{m}{2}V_0}_{-\frac{3}{2}mV_0} \Rightarrow E_1 = \frac{3}{2}V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{2}{3}E_1 = 10\,eV$

$$\xrightarrow{②} \frac{8\pi^2}{\ell^2} = 2m\,\frac{E_1-V_0/2}{\hbar^2}$$

differenza $\quad \overbrace{(4-8)}^{-4}\frac{\pi^2}{\ell^2} = -\frac{2mV_0}{\hbar^2} + \frac{mV_0}{\hbar^2} = -\frac{mV_0}{\hbar^2}$

$$\ell^2 = \frac{4\pi^2\hbar^2}{mV_0} = \frac{4\pi^2(\hbar c)^2}{mc^2\,V_0} = \frac{4\pi^2\; 4\times10^4\,MeV^2\,fm^2}{\frac{1}{2}MeV\;\;10\,eV} =$$

$$= 32\pi^2\;10^3\cdot10^6\,fm^2 \simeq 32\pi^2\;10^{10}\,fm^2$$

$$\rightarrow \ell \simeq \overbrace{\sqrt{3.2}\,\pi}^{\simeq 5}\;10^5\underbrace{fm}_{10^{-15}m} \simeq 5\times10^{-10}\,m \simeq 5\,Å$$

b) la nuova $R=0$ avverrà per

$k_3 = 3k_1$ $\qquad\qquad E_1 - V_0 = 5\,eV$

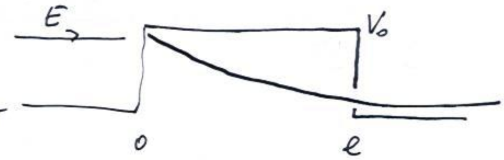
$$E_3 - V_0 = \frac{\hbar^2}{2m}k_3^2 = 9\frac{\hbar^2}{2m}k_1^2$$

$$E_3 = 9(E_1 - V_0) + V_0 = \underbrace{9\times 5\,eV}_{45\,eV} + 10\,eV = 55\,eV$$

c) quando $E = 10\,eV$, E diventa uguale all'altezza della barriera; $E \simeq V_0$

Per $E \simeq V_0$ c'è riflessione totale $R = 1$

o meglio quasi totale perchè un po' di effetto tunnel ci sarà



$$\frac{|\psi(\ell)|}{|\psi(0)|} = P = e^{-\frac{\ell\sqrt{V_0 2m}}{\hbar}} \simeq e^{-2\pi} \simeq e^{-6.3}$$

sappiamo che

$$\ell^2 = \frac{4\pi^2\hbar^2}{mV_0} \to \frac{\ell^2\, 2mV_0}{\hbar^2} = 4\pi^2$$

$$\to \frac{\ell\sqrt{2mV_0}}{\hbar} = 2\pi$$

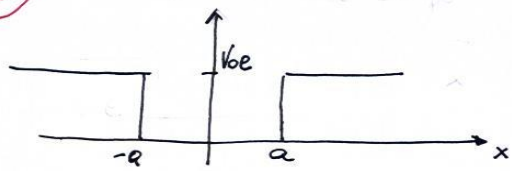
BUCHE

Si consideri un elettrone in una buca di potenziale di larghezza 1 Angstrom e profondità 37,37 Volt.

a) quanti stati legati sono possibili?

b) Quanto vale l'energia di legame dello stato fondamentale?

| (1) 5/11/08



e^- in una buca di potenziale

$2a = 1\,\mathring{A} = 10^{-10}\,m = 10^5\,fm$

$V_0 = 37.37$ Volt

a) quanti stati legati?

b) E stato fondamentale?

a)

PARI — 1 stato pari, quello fondamentale, c'è sempre

pari eccitati $\quad \dfrac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \geq (n_p \pi)^2 \qquad n_p = 1, 2, 3, \ldots \rightarrow \dfrac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \geq \left(\underbrace{2n_p}_{N_p} \dfrac{\pi}{2}\right)^2$

$N_p = 2, 4, \ldots$

DISPARI — dispari eccitati $\quad \dfrac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \geq \left(n_d \pi - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 \qquad n_d = 1, 2, 3, \ldots \rightarrow \dfrac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \geq \left(\underbrace{(2n_d - 1)}_{N_d} \dfrac{\pi}{2}\right)^2$

$N_d = 1, 3, \ldots$

Riassumendo il numero di stati eccitati $n_{ecc} = 1, 2, 3, \ldots$ soddisfa

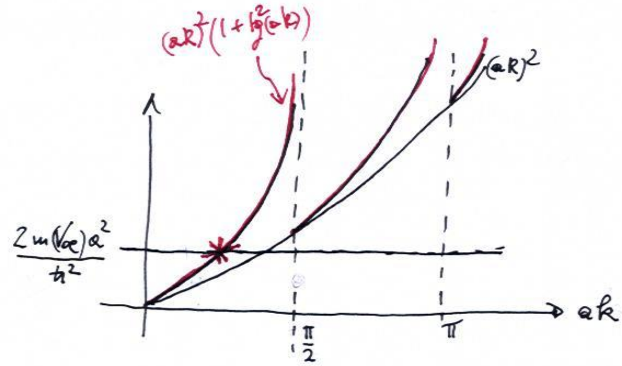
$$\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \geq \left(n_{ecc} \frac{\pi}{2}\right)^2 \qquad n_{ecc} = \text{dispari} \rightarrow \text{pari} \qquad \text{+ dispari pari}$$

$$n_{ecc}^2 \leq \frac{8m(V_0 e)a^2}{\pi^2 \hbar^2} = \frac{8\, mc^2\, eV_0\, a^2}{\pi^2 (\hbar c)^2} = \frac{\cancel{8}^{4} \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{MeV}\ 37.37\,eV}{\pi^2\ 4\times 10^4\, MeV^{\cancel{2}} fm^2} \frac{1}{4} \mathring{A}^2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \frac{37.37\,eV}{10^4\,MeV} \frac{\cancel{\mathring{A}^2}}{10^{-10}\,\cancel{\mathring{A}^2}} = \frac{37.37}{4\pi^2} \simeq .94$$

$\Rightarrow$ c'è solo lo stato fondamentale

b)



quindi — quasi uguale ma non proprio

$$\frac{2m(V_0 e)a^2}{\hbar^2} \lesssim \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

$$= (ak)^2(1 + tg^2(ak))$$

Può essere

$ak \overset{?}{=} \frac{\pi}{4} \qquad \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\left(1+tg^2\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{4\cdot 4}\overbrace{(1+1)}^{2} \simeq \frac{\pi^2}{8}$ sì

$ak \overset{?}{=} \frac{\pi}{3} \qquad \left(\frac{\pi}{3}\right)^2\left(1+tg^2\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3\cdot 3}\overbrace{(1+3)}^{4} \simeq \pi^2\,\frac{4}{9} \not\simeq \frac{\pi^2}{2}$ no

$\Rightarrow \quad ak \approx 1$, ossia $1+tg^2 ak \simeq 3$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 (ka)^2}{2ma^2} =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m(V_0e)a^2}\, V_0 e\, \cancel{(ka)^2} = \frac{V_0 e}{\underbrace{1+tg^2(ak)}_{\simeq 3}} \simeq 13 \text{ eV}$$

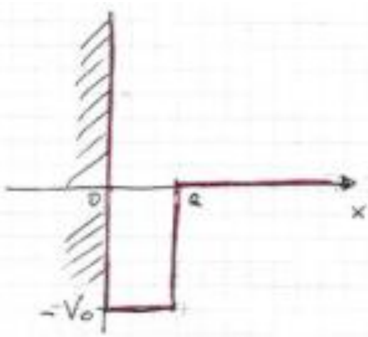
$$\frac{\hbar^2}{2m(V_0e)a^2} = \frac{1}{\cancel{(ak)^2}\left(1+tg^2(ak)\right)}$$

CANESCHI – Settembre 97 (N2)

Una particella di massa m è soggetta al pot.le 1 dim.le $V(x) = +\infty$ per $x<0$, $V(x) = -V_0$ per $0<x<a$, $V(x)=0$ per $x>a$, e sia $V_0 = 15\ \text{MeV}$ e $R = \frac{a}{\hbar}\sqrt{2mV_0} = 6$.

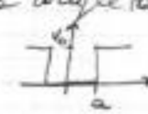
a) trovare il numero degli stati legati
b) stimare numericamente l'energia dello stato fondamentale.
c) se la particella è soggetta a un pot.le perturbatore proporzionale a x, si calcoli lo spostamento dell'energia dello stato fond.le al 1° ordine perturbativo.

a)



è una buca dimezzata

Siccome $\psi(0) = 0$
le soluzioni saranno quelle
dispari della buca completa,
ossia



$$R^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \geq \left(n\,\frac{\pi}{2}\right)^2 \qquad n = 1,3,5,\dots$$

Per noi

$$6 = R \geq \frac{n\pi}{2} \;\rightarrow\; n \leq \frac{12}{\pi} = 3.8 \;\rightarrow\; n=3$$

$$\rightarrow \boxed{2 \text{ stati} : n = 1,3}$$

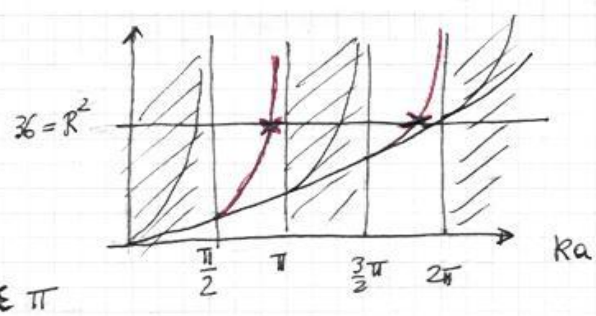
b)
$$\underbrace{E+V_0}_{\substack{\text{fond}\\ \text{buca dimezzata}}} = \underbrace{E_1}_{\text{buca completa}} = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}\cdot 4 = \frac{V_0\hbar^2}{V_0 2ma^2}\pi^2 = \frac{V_0}{R^2}\pi^2 \cong 15\ \text{MeV}\,\underbrace{(.52)^2}_{.27} \simeq 4.1\ \text{MeV}$$

$$\rightarrow E_{fond} = E_{1\,b.c.} - V_0 \simeq (4.1 - 15)\ \text{MeV} \simeq -10.9\ \text{MeV}$$

c) Siccome $n \simeq 3.8 \simeq 4$

$\downarrow$

lo stato fond.
è quello con $n = 1$
ed è t.c. $aK \lesssim \pi$



Precisamente

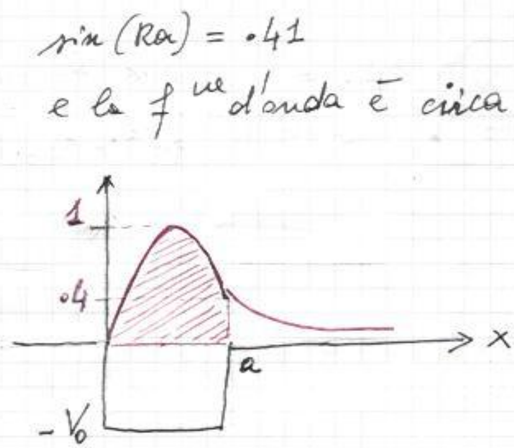
$$(aK)^2\left(1 + \cot^2(aK)\right) = R^2 = 36$$

$\downarrow$

$$aK \simeq .864\,\pi$$

Allora $\sin(Ka) = .41$

e la f^{ne} d'onda è circa questa



approssimativamente si può trascurare il contributo a $x > a$ e concentrarsi su quella a $x < a$

con $Ka = \pi$ $\leftarrow$ diventa cioè la f^{ne} d'onda del 1° stato eccitato della buca completa

Quindi

$$\Delta E^{(1)} = \alpha \; \langle \text{fond}|x|\text{fond}\rangle$$

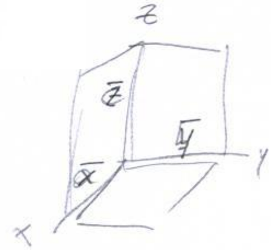
$$[\alpha] = \frac{E}{L}$$

dove

$$\langle \text{fond}|x|\text{fond}\rangle \approx \int_0^a dx\, \frac{x}{a} \sin^2 \overbrace{\frac{\pi x}{a}}^{y} = \frac{a}{\pi^2} \underbrace{\int_0^{\pi} dy\, y \sin^2 y}_{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{a}{4}$$

Quindi $\Delta E^{(1)} \simeq \dfrac{\alpha a}{4}$

Un elettrone e' confinato da buca di potenziale tridimensionale infinita nella regione $0< x < a$; $0< y < a$; $0 < z < 2a$.
Determinare i quattro livelli energetici più bassi e la loro degenerazione



$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi_n(x,y,z) = E_n\,\psi_n(x,y,z)$$

$\psi_n = 0$ sui bordi del parallelepipedo

Variabili separabili $\quad \psi(x,y,z) = u_x(x)\,u_y(y)\,u_z(z)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}u_y u_z + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}u_x u_z + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}u_x u_y\right) = E_n\, u_x u_y u_z$$

$$\underbrace{\frac{1}{u_x}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}}_{-k_x^2} + \underbrace{\frac{1}{u_y}\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}}_{-k_y^2} + \underbrace{\frac{1}{u_z}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}}_{-k_z^2} = -\overbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}^{k^2}$$

where $\sum_i k_i^2 = k^2$

hence $\quad \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + k_i^2 u_i = 0$

$$\hookrightarrow \quad u_i(x_i) = A_i\cos(k_i x_i) + B_i\sin(k_i x_i)$$

$$u_i(0) = 0 \rightarrow A_i = 0$$

$$u_i(\bar{x}_i) = 0 = B_i \sin(k_i \bar{x}_i) \rightarrow k_i\bar{x}_i = n_i\pi \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$k_i = \frac{n_i\pi}{\bar{x}_i}$$

Hence

$$\psi_{n_x n_y n_z}(x,y,z) = C\,\sin(k_{n_x}x)\,\sin(k_{n_y}y)\,\sin(k_{n_z}z)$$

$$C = \sqrt{\frac{2}{\bar{x}}\frac{2}{\bar{y}}\frac{2}{\bar{z}}}$$

normalizzazione

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{\bar{x}^2}+\frac{n_y^2}{\bar{y}^2}+\frac{n_z^2}{\bar{z}^2}\right)$$

$$a = \bar{x} = \bar{y} = \frac{\bar{z}}{2}$$

$$E_{n_x n_y n_z} = \underbrace{\frac{\hbar^2 \pi^2}{2 m a^2}}_{\bar{E}} \left(n_x^2 + n_y^2 + \frac{n_z^2}{4} \right)$$

$$E_{111} = \bar{E} \left(\frac{4+4+1}{4} \right) = \frac{9}{4} \bar{E}$$

$$E_{112} = \bar{E} \left(\frac{4+4+4}{4} \right) = \frac{12}{4} \bar{E}$$

$$E_{113} = \bar{E} \left(\frac{4+4+9}{4} \right) = \frac{17}{4} \bar{E}$$

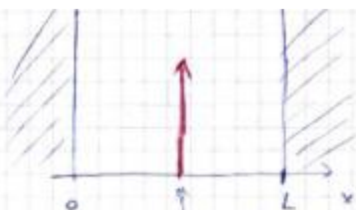
$$E_{121} = E_{211} = \bar{E} \left(\frac{16+4+1}{4} \right) = \frac{21}{4} \bar{E}$$

$$E_{114} = \bar{E} \left(\frac{4+4+16}{4} \right) = \frac{24}{4} \bar{E}$$

$$\vdots$$

Una particella confinata in una buca infinita unidimensionale di larghezza L e' perfettamente localizzata al tempo $t = 0$ nel punto centrale della medesima.
a) Calcolare le probabilita' dei valori possibili dell'energia della particella e il valor medio dell'energia stessa.
b) Calcolare la funzione d'onda ad un tempo t generico, e descriverne qualitativamente il comportamento.

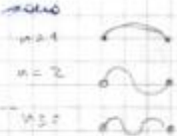
a)



particella localizzata in $\frac{L}{2}$ $\qquad \psi(x,0) = \delta\left(x - \frac{L}{2}\right)$

gli autostati dell'energia (cioè dell'ham.) sono

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin k_n x \qquad k_n = \frac{\pi}{L} n \quad n = 1,2,3,\ldots$$



sviluppiamo la nostra ψ in questa base otteniamo i coeff[ti] che in $| \, |^2$ ci danno la prob. di avere quell'energia.

$(\psi = c_n \psi_n)$

$$c_n = \langle \psi_n | \psi \rangle = \int_0^L dx \, \psi_n(x) \, \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(k_n \frac{L}{2}\right)$$

$$k_n \frac{L}{2} = \frac{\pi}{L} n \frac{L}{2} = n \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad c_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{2}{L}} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

prob. di avere energia E_n con n dispari $\frac{2}{L}$

pari 0

notare che $\sum_n |C_n|^2 = \infty$

e dunque anche $\langle |E| \rangle = \sum_n E_n |C_n|^2 = \infty$

ciò è ragionevole: lo stato iniziale è uno stato di energia ∞ perché è perfettamente localizzato: è costruito sovrapponendo stati che hanno componenti di impulso sempre più elevato: indeterminazione sull'impulso $= \infty$ ⇒ anche l'energia si aspetterà diverga.

principio indeterm. →

b) $\psi(x,t) = \sum_n c_n \underbrace{\psi_n(x,t)}$

$$= e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \psi_n(x,0)$$

siccome $E_n = E_1 n^2$

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n e^{-\frac{iE_1 n^2 t}{\hbar}} \psi_n(x,0)$$

ci sarà un tempo $\bar{t} > 0$ a cui $\psi(x,\bar{t}) = \psi(x,0)$?

deve essere

$$e^{-\frac{iE_1 n^2 \bar{t}}{\hbar}} = 1$$

ossia $-\frac{E_1 n^2 \bar{t}}{\hbar} = 2\pi m$ ← intero

posso scegliere $m = n^2$

$$\bar{t} = \frac{2\pi \hbar}{E_1}$$

OSCILLATORE ARMONICO

16/11/04 - II compito di Elementi di Meccanica Quantistica

Problema 1

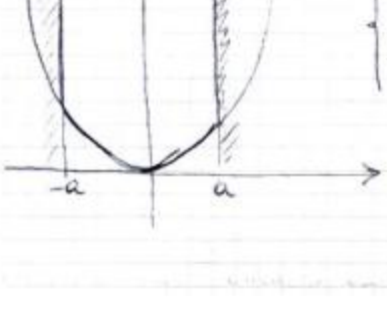
Una particella di massa m e' confinata nel segmento $-a \leq x \leq a$ e soggetta al potenziale $\frac{1}{2} m\omega^2 x^2$.

a) Sia ω molto piccolo (rispetto a che?): si descriva qualitativamente lo spettro.

b) Sia adesso ω molto grande: si descriva qualitativamente lo spettro in questo caso, distinguendo il comportamento degli autostati dell'energia di autovalore "piccolo" (rispetto a che?) da quelli di autovalore "grande".

$m = 0, 1, 2, 3$

①



$$E_m^{(b)} = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}(n+1)^2 \qquad \text{buca}$$

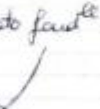
$$E_m^{(o)} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad \text{oscillatore}$$

le funz.ni d'onda devono annullarsi fuori da $(-a, a)$.

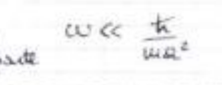
$f(\pm a) = 0$ ma $f'_{sx,dx}(\mp a) = 0$, $f'_{dx,sx}(\mp a) \neq 0$

a) ω piccolo → essenzialmente ho una buca

1° modo $E_n \propto n^2$



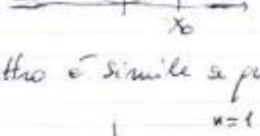
$\frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2} = E_0^{(b)} \gg E_0^{(o)} = \frac{\hbar\omega}{2}$

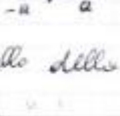


$E_n \propto n$

$\frac{\hbar\pi^2}{4ma^2} \gg \omega$ → numeri O(1) a parte $\omega \ll \frac{\hbar}{ma^2}$

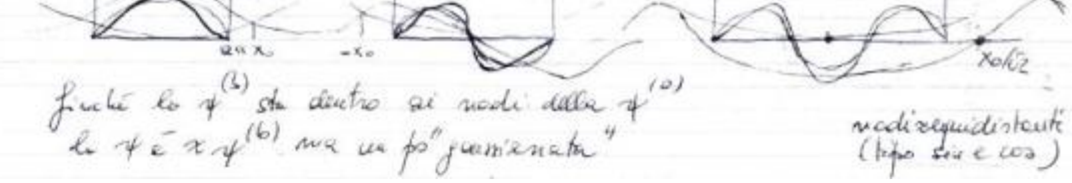
2° maniera f d'onda dello stato fond.le:





$\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = x_0 \gg a \rightarrow \omega \ll \frac{\hbar}{ma^2}$

Lo spettro è simile a quello della buca, ma ψ è più soppressa vicino ai bordi



finché la $\psi^{(b)}$ sta dentro ai nodi della $\psi^{(o)}$ la ψ è $\simeq \psi^{(b)}$ ma un po' "gaussianizzata"

nodi equidistanti (tipo sin e cos)

b) <u>ω grande</u> → essenzialmente un osc per i livelli più bassi

1° modo

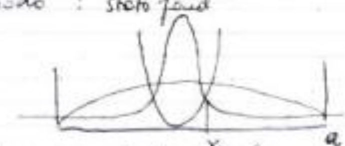
$E_n \propto n^2$

$E_0^{(b)} \ll E_0^{(o)}$

$\propto n$

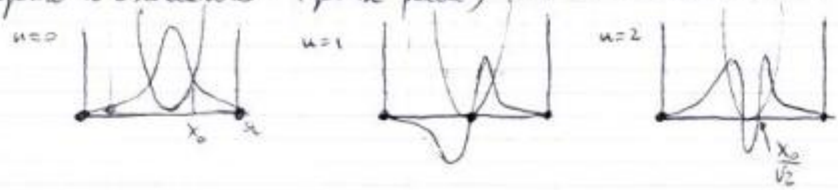
$\Rightarrow \omega \gg \frac{\hbar}{ma^2}$

2° modo : stato fond.

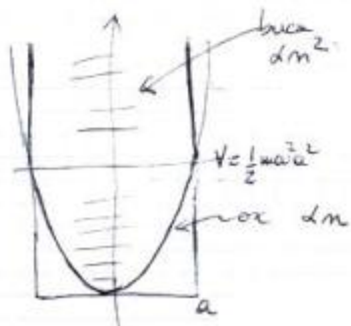


$x_0 \ll a \rightarrow \omega \gg \hbar/ma^2$

Spettro x oscillatore (per n piccolo), ma si annullano in ± a



modi concentrati attorno a x=0



l'approx dell'oscillatore è valida finché

$(n+\frac{1}{2})\hbar\omega = E_n^{(o)} < \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \rightarrow n < \frac{a^2}{\frac{\hbar}{m\omega}} = \frac{\omega}{\frac{\hbar}{ma^2}}$

x_0^2

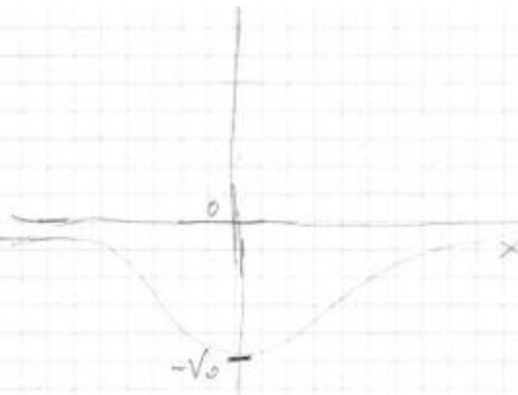
— Per $n > \frac{\omega}{\hbar/ma^2}$
l'approx buona per lo spettro è quella della buca

Esercizio 2

Una particella di massa m e' soggetta al potenziale unidimensionale

$$V(x) = -V_0 \frac{1}{1 + x^2/a^2} \quad . \tag{1}$$

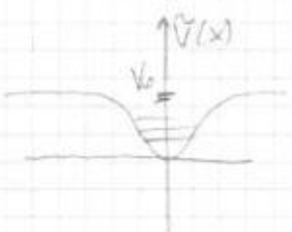
Dire per quali valori dei parametri m, a, V_0 si puo' usare per i livelli piu' bassi l'approssimazione dell'oscillatore armonico. Si trovino in questo caso gli autovalori dell'energia.



$\tilde{x} = \frac{x}{a} \ll 1$

$$f(\tilde{x}^2) = \frac{1}{1+\tilde{x}^2} = 1 + \overset{-1}{f'(0)}\,\tilde{x}^2 + \frac{1}{2}\overset{2}{f''(0)}\,\tilde{x}^4 + \dots$$

$$\begin{cases} f'(\tilde{x}^2) = -\dfrac{1}{(1+\tilde{x}^2)^2} \\ f''(\tilde{x}^2) = 2\dfrac{1}{(1+\tilde{x}^2)^3} \end{cases}$$



$$V(x) = -V_0\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{a}\right)^4 + \dots\right) =$$

$$\underbrace{V(x) + V_0}_{\tilde{V}(x)} = \underbrace{\frac{V_0}{a^2}}_{\sim\frac{1}{2}m\omega^2} x^2 - \frac{V_0}{a^4} x^4$$

$x_0/a \ll 1 \Rightarrow \frac{\hbar}{m\omega} \ll a^2 \Rightarrow \frac{\hbar^2 a^2}{m^2 2V_0} \ll a^4 \Leftrightarrow$

App^{ne} osc armonico valida se $\hbar\omega \ll V_0 \Rightarrow \frac{\hbar^2 2}{ma^2} \ll V_0$

allora $\tilde{E}_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ $\quad n = 0, 1, 2, \dots$

dove $\omega = \sqrt{\frac{2V_0}{ma^2}}$

Potenziali centrali

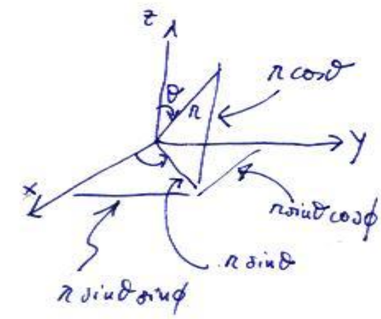
Un elettrone nel campo coulombiano di un protone del quale si trascura lo spin è descritto dalla funzione d'onda u (x,y,z)= A x y e^{-ar}.

a) si dica per quali valori del parametro a la funzione d'onda rappresenta un autostato dell'energia

b) si dica quale è lo stato di momento angolare dell'elettrone.

<u>Problema 1</u>   10/12/03

$$u(x,y,z) = A\ x\ y\ e^{-ar} =$$
$$= A\, r^2 \sin^2\theta\, \sin\phi\cos\phi\, e^{-ar}$$
$$\sin\phi\cos\phi = \frac{\sin 2\phi}{2} = \frac{e^{i2\phi}-e^{-i2\phi}}{4i}$$



Dunque

$$u(x,y,z) = \frac{A}{4i}\, r^2 e^{-ar} \Big(\underbrace{\sin^2\theta\, e^{i2\phi}}_{\frac{Y_2^2(\theta,\varphi)}{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}}} - \underbrace{\sin^2\theta\, e^{-i2\phi}}_{\frac{Y_2^{-2}(\theta,\varphi)}{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}}} \Big)$$

$$\Rightarrow \ l=2,\ m=\pm 2,\ n \geq 3$$

Ricordando la formula generale

$$\psi_{nlm} = R_{nl}(r)\, Y_l^m(\theta,\varphi)$$

$$\rho = \sqrt{\frac{8 m_e |E|}{\hbar^2}}\, r = \frac{2Z}{n a_0}\, r$$

$$R_{nl} = -\sqrt{\left(\frac{2Z}{n a_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}}\ e^{-\rho/2} \rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho) \underset{r\to 0}{\sim} r^l$$

Notare che la nostra $u \xrightarrow[r\to 0]{} r^2$, infatti $l=2$!

Il polinomio di Laguerre ha grado $n+l-(2l+1) = n-l-1$; per la nostra u si vede che il grado del polinomio è zero, ossia $n-l-1=0 \Rightarrow n=l+1=3$.

Resta da valutare $a = \frac{\rho}{2r} \overset{Z=1}{=} \frac{2}{2\, \cancel{n}\, a_0} = \frac{1}{3 a_0}$

Un elettrone e' descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(r,\theta,\phi) = A\ r^a\ e^{-br}\ (\cos^2\theta + c)\ \ . \tag{2}$$

a) Quanto deve valere c se ψ e' una autofunzione del momento angolare orbitale?
b) Supponendo che ψ sia un'autofunzione dell'equzione di Schroendinger, se ne determini il potenziale corrispondente. Si precisi in particolare per quali valori dei parametri questo potenziale corrisponde ad un potenziale di tipo Coulombiano.

a) $\cos\theta = \frac{z}{r}$ → si tratta di $l=2$: vedere la $Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$

⇒ $c = -\frac{1}{3}$ permette di avere proprio la Y_2^0

Per l'H già vediamo che: $\psi(r) \xrightarrow[r\to 0]{} r^l$ ⇒ $a = 2$

b) notare che per $r \to 0$, $\psi \sim r^a$ (a causa della barriera centrifuga) dove a = intero ≥ 0

$r \to \infty$, $\psi \sim e^{-br}$ =

Nell'eq di S, $u = r R(r) = A r^{a+1} e^{-br}$, $l(l+1) = 6$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{l(l+1)}{r^2}u + V(r)\,u = E u$$

$$\to V(r) = E - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{6}{r^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = A\ \left((1+a)r^{a}e^{-br} - r^{a+1}b\,e^{-br}\right) =$$

$$= \underbrace{A\ r^{a+1}e^{-br}}_{u}\left(\frac{a+1}{r} - b\right) = u\left(\frac{a+1}{r} - b\right)$$

$$\frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{u}\left(u'(\ ) + u(\ )'\right) = \frac{1}{u}\left(u\left(\frac{a+1}{r} - b\right)^2 + u\left(-\frac{a+1}{r^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{(a+1)^2}{r^2} + b^2 - 2\frac{b(a+1)}{r} - \frac{a+1}{r^2} = \frac{a+1}{r^2}(a+\cancel{1}\cancel{-1}) + b^2 - 2\frac{b(a+1)}{r}$$

$$V(r) = E - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{6}{r^2} - \frac{(a+1)a}{r^2} - b^2 + 2b\frac{a+1}{r}\right) =$$

per avere un coulombiano $6 = (a+1)a$ ⇒ $a = 2$

$$\stackrel{a=2}{=} \underbrace{E + \frac{\hbar^2}{2m}b^2}_{=0} - \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m}\cancel{2}b\frac{a+1}{r}}_{Ze^2/r} \quad (a+1 = 3)$$

(per noi $Z=1$)

se $E = -\frac{\hbar^2}{2m}b^2$

$$\Rightarrow \frac{e^2}{r} = \frac{\hbar^2}{m}b\frac{3}{r}$$

ovvero $b = \frac{me^2}{3\hbar^2}$

ne segue $E = -\frac{\hbar^2}{2m} b^2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{m e^4 m}{9\hbar^4 \hbar^2} = -\frac{e^4}{2 \cdot 9} \frac{m}{\hbar^2} =$

$$= -\frac{e^2}{2 \underbrace{\left(\frac{\hbar^2}{me^2}\right)}_{a_0} 3^2}$$

la formula generale è

$$E_n = -\frac{e^2}{2a_0} \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow n = 3$$

---

2) in modo alternativo

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$L_z \psi = 0 \Rightarrow m = 0$$

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) \right]$$

$$L^2 \psi = -\hbar^2 \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(-A r^a e^{-br} 2\cos\theta \sin^2\theta \right) =$$

$$= -\hbar^2 \frac{1}{\sin\theta} \left(-2A r^a e^{-br} \right) \left(-\sin^3\theta + 2\cos^2\theta \sin\theta \right) =$$

$$= +\hbar^2 \, 2A r^a e^{-br} \left(\underbrace{-\sin^2\theta}_{= -1 + \cos^2\theta} + 2\cos^2\theta \right) =$$

$$= -1 + \cos^2\theta + 2\cos^2\theta = -1 + 3\cos^2\theta$$

$$= \underset{\downarrow \; l(l+1)}{6\hbar^2} \underbrace{A r^a e^{-br} \left(\cos^2\theta - \frac{1}{3} \right)}_{\psi \text{ con } c = -1/3}$$

$$\hookrightarrow \boxed{l = 2}$$

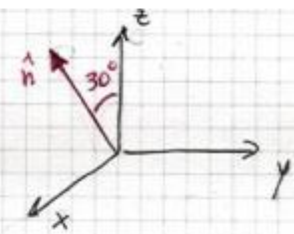
ROTAZIONI E MOMENTO ANGOLARE

Prova scritta di Istituzioni di Fisica Teorica
Settembre 1997

Problema 1

Una particella senza spin si trova nello stato di momento angolare L=1 e componente m =+1 lungo la direzione che giace nel piano xz e forma un angolo di 30º con l'asse z. Scrivere la funzione d'onda piu' generale che descrive questo stato.

$\ell=1,\ m=1$



$$|\alpha\rangle = R_y(30^\circ)\ |\ell=1, m=1\rangle$$

metodo 1 $\psi_\alpha(\vec x') = \underbrace{\langle \vec x'|R_y(30^\circ)}_{\langle \vec x''|}|1,1\rangle = \langle \vec x''|1,1\rangle = Y_1^1(\hat x'')\ f(r)$

$$|\vec x''\rangle = R_y(-30^\circ)|\vec x'\rangle \overset{(*)}{=} |\underbrace{x'\frac{\sqrt3}{2}-\frac{z'}{2}}_{x''}, \underbrace{y'}_{y''}, \underbrace{z'\frac{\sqrt3}{2}+\frac{x'}{2}}_{z''}\rangle$$

$$Y_1^1(\hat x) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\ \underbrace{\sin\theta\ e^{i\varphi}}_{\frac{x+iy}{r}} \quad \Rightarrow Y_1^1(\hat x'') = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\ \frac{1}{r}\ \left(x'\frac{\sqrt3}{2}-\frac{z'}{2}+iy'\right)$$

(*) indeed

$$R_y(-30^\circ)\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos30^\circ & 0 & -\sin30^\circ\\ 0 & 1 & 0\\ \sin30^\circ & 0 & \cos30^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt3}{2}x'-\frac{z'}{2}\\ y'\\ \frac{x'}{2}+\frac{\sqrt3}{2}z'\end{pmatrix}$$

metodo 2

$$R_y(30^\circ)\,|1,1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} & \cdot & \cdot \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot \\ \frac{1-\cos\theta}{2} & \cdot & \cdot \end{pmatrix}_{\theta=30^\circ} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}/2}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1-\sqrt{3}/2}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \sim |1,1\rangle \\ \sim |1,0\rangle \\ \sim |1,-1\rangle \end{array}$$

$$\langle \hat{x}' | R_y(30^\circ) |1,1\rangle = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) Y_1^1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} Y_1^0 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \underbrace{Y_1^{-1}}_{=(-1)Y_1^{1*}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\frac{x'+iy'}{r} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\frac{z'}{r} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\frac{x'-iy'}{r} =$$

$$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\frac{1}{2}\Big[\underbrace{\left(\cancel{1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\cancel{1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}_{\sqrt{3}}\Big]\frac{x'}{r} - \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\frac{1}{2}\Big[\underbrace{\left(1+\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+\left(1-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)}_{2}\Big]\frac{iy'}{r} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\frac{z'}{r} =$$

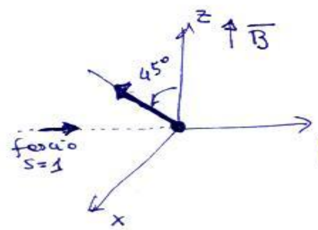
$$= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\frac{1}{r}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + iy' - \frac{z'}{2}\right)$$

In una esperienza di Stern- Gerlach il fascio incidente e' costituito di atomi di spin 1 polarizzati lungo una direzione che forma un angolo di 45 gradi rispetto all'asse z lungo il quale e' diretto il campo.

a) determinare lo spinore che descrive lo stato di spin degli atomi incidenti nella base nella quale e' diagonale S_z.

b) calcolare le intensita' delle componenti dei fasi emergenti dall'esperienza.

Problema 3 10/12/03



a) uno stato polarizzato lungo una direzione che forma un angolo di 45° rispetto all'asse z è

$$R_y(45°)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1+\cos\frac{\pi}{4}) & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\pi/4 & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2}(1-\cos\frac{\pi}{4}) & \cdot & \cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\end{pmatrix}$$

b) le intensità delle componenti dei fasci emergenti sono quindi

$$S_z = +1 \longrightarrow P = \left|\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 = \frac{1}{4}\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2} = \frac{1}{8}(2+1+2\sqrt{2}) = \frac{3+2\sqrt{2}}{8} \simeq .73$$

$$S_z = 0 \longrightarrow P = \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} = .25$$

$$S_z = -1 \longrightarrow P = \left|\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 = \frac{1}{4}\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2} = \frac{1}{8}(2+1-2\sqrt{2}) = \frac{3-2\sqrt{2}}{8} \simeq .02$$

COMPOSIZIONE DI MOMENTI ANGOLARI

Si consideri una particella di spin 2 che decade in due particelle di spin 1/2, e.g. una coppia e^+-e^-.

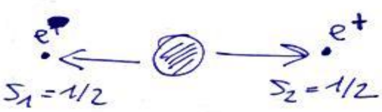
a) quali sono i valori possibili del momento angolare orbitale relativo della coppia e^+-e^- ?

b) se la particella che decade e' a riposo ed ha $s_z=1$, e il decadimento avviene in onda P, si calcoli la probabilita' di trovare l'elettrone con lo spin diretto lungo l'asse z.

c) nelle stesse ipotesi del punto b) si calcoli la distribuzione angolare del decadimento.

<u>Problema 2</u> 10/12/2003

$s = j = 2$



$$\bar{S} = \underset{e^-}{\bar{S}_1} + \underset{e^+}{\bar{S}_2} \Rightarrow s = 0, 1$$

Ne segue che

l ← momento angolare orbitale relativo

a) $$|l - s| \le \underset{=2}{j_R} \le l + s$$

Per $s = 0 \longrightarrow l = 2$

$s = 1 \longrightarrow |l-1| \le 2 \le l+1 \Rightarrow \begin{cases} l \ge 1 \\ l \le 3 \end{cases} \rightarrow l = 1, 2, 3$

b) $m = 1$; $l = 1$ ← possibile solo quando $s = 1$

Poiché $m = m_l + m_s$
$1 = 1 + 0$
$ 0 + 1$

→ può essere composto solo con gli stati $\underset{l\ m_l}{|1,1\rangle}\underset{s\ m_s}{|1,0\rangle}$ e $\underset{l\ m_l}{|1,0\rangle}\underset{s\ m_s}{|1,1\rangle}$

CG $\boxed{1\times 1}$

$$\overset{j\ m}{|2,1\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2}}\ |1,1\rangle \underbrace{|1,0\rangle}_{\frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\ |1,0\rangle \underbrace{|1,1\rangle}_{\overset{e^-\,e^+}{|++\rangle}}$$

$$\underset{\text{somma}}{|\langle +\pm|2,1\rangle|^2} = P_{e_{z,+}} = \left|\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{1}{2}}\right|^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

c) $$\langle \hat{n} | 2,1\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\ Y_1^1(\theta,\varphi)\ \overset{s\ m_s}{|1,0\rangle} + \sqrt{\frac{1}{2}}\ Y_1^0(\theta,\varphi)\ \overset{s\ m_s}{|1,1\rangle}$$

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{s,m_s} |(\langle s, m_s| \langle \hat{n}|)\ |2,1\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left(|Y_1^1|^2 + |Y_1^0|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8\pi}\sin^2\theta + \frac{3}{4\pi}\cos^2\theta\right) =$$

$$= \frac{3}{8\pi}\Big(\underset{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{2}\Big) = \frac{3}{8\pi}\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2\cdot 8\pi}\left(1 + \cos^2\theta\right)$$

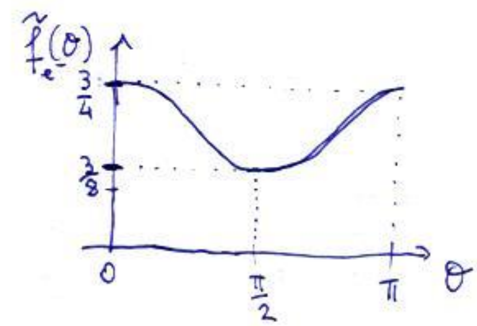
Infatti $\int d\Omega\, f_{e^-}(\vartheta,\varphi) = \int \overbrace{d\Omega}^{d\phi\, d\cos\vartheta}\, \frac{3}{2\cdot 8\pi}\left(1+\cos^2\vartheta\right) =$

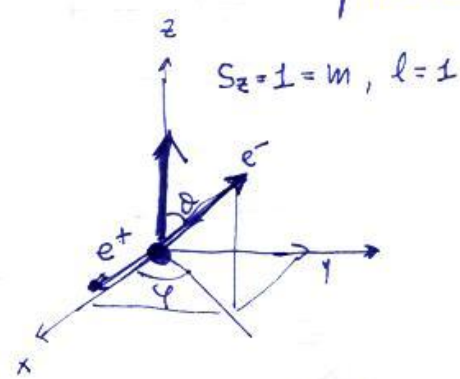
$$= 2\pi \cdot \frac{3}{2\cdot 8\pi} \int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta)\, \left(1+\cos^2\vartheta\right) =$$

$$= \frac{3}{8}\left(2 + \frac{\cos^3\vartheta}{3}\Big|_{-1}^{1}\right) = \frac{3}{8}\left(\underbrace{2+\frac{2}{3}}_{\frac{6+2}{3}}\right) = 1$$ ☺

infatti è normalizzata a 1 la probabilità.

$$\tilde{f}_{e^-}(\vartheta) = \int d\phi\, f_{e^-}(\vartheta,\varphi) = \frac{3}{8}\left(1+\cos^2\vartheta\right)$$





dunque l'e^- (che viene emesso sempre opposto al e^+, in modo tale che l'impulso è conservato) viene emesso con simmetria cilindrica (indip. da ϕ) e preferenzialmente a $\vartheta = 0, \pi$, con un minimo all'equatore, $\vartheta = \pi/2$.

Notare che, se e^- viene emesso con ϑ e φ,

e^+ " " con $\pi - \vartheta$ e $\varphi + \pi$.

Si ha $f(\vartheta,\varphi) = f(\vartheta, \varphi+\pi)$ ovviamente,

e anche $f(\vartheta,\varphi) = f(\pi-\vartheta,\varphi)$.

Cioè la distribuzione angolare di e^- e e^+ è la stessa!

Una particella a riposo di spin 3/2 decade in due particelle, una di spin 0 ed una di spin 1/2.

a) Quali sono i valori possibili del momento angolare orbitale relativo dei prodotti del decadimento?

Se la particella che decade ha autovalore di S_z pari a $1/2\,\hbar$ e se il decadimento avviene in onda P,

b) qual'e' la distribuzione angolare del decadimento?

c) qual'e' la probabilita' di trovare il valore $+1/2\,\hbar$ misurando la componente z dello spin della particella di decadimento con spin 1/2? E quella di trovare il valore $-1/2\,\hbar$? Come cambiano queste due quantita' in funzione della direzione?

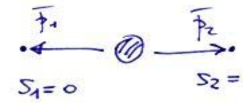
d) qual e' il valor medio della componente z dello spin della particella di decadimento con spin 1/2 ? Come cambia questa quantita' in funzione della direzione?

e) qual'e' la probabilita' di trovare il valore $+1/2\,\hbar$ misurando la componente x dello spin della particella di decadimento con spin 1/2? E quella di trovare il valore $-1/2\,\hbar$? Dunque qual e' il valor medio della componente x dello spin della particella di decadimento con spin 1/2 ?

f) si risponda alle tre domande del punto e) nel caso si misuri la componente y dello spin della particella di decadimento con spin 1/2.

Problema 2 9/12/04

$j = 3/2$



nel sistema del centro di massa $\bar{p}_1 = -\bar{p}_2$ cioè vengono emesse in verso opposto

$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 \;\to\; s = 1/2$

$\bar{L} \;\to\; \ell$ momento angolare orbitale relativo

a) $|\ell - s| \le j \le \ell + s$

Per noi $|\ell - 1/2| \le \frac{3}{2} \le \ell + 1/2$

$\to \ell \ge 1$

$\to \ell - \frac{1}{2} \le \frac{3}{2} \to \ell \le 2$

$\Big\} \; \ell = 1, 2$

Se $m = \frac{1}{2}\hbar$ e $\ell = 1$

b) $\frac{1}{2}\hbar = m = m_\ell + m_s$ si può ottenere solo con

$$\begin{array}{cc} m_\ell & m_s \\ 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{array}$$

Infatti, guardando la tabella dei CG per $\underset{\ell}{1} \times \underset{s}{1/2}$ si legge

$$|j=3/2, m=1/2\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, \overset{m_\ell}{|1\rangle} \overset{m_s}{|-\rangle} + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, |0\rangle |+\rangle$$

$$\langle \hat{n} | j=3/2, m=1/2\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\, Y_1^1(\theta,\varphi)\, |-\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\, Y_1^0(\theta,\varphi)\, |+\rangle$$

c) $P_{z,z+} = \frac{2}{3}$ $\quad P_{z,z-} = \frac{1}{3}$

$P_{z,z+}(\theta,\varphi) = \frac{1}{3}|Y_1^1|^2 = \frac{1}{3}\frac{3}{8\pi}\sin^2\theta$; $P_{z,z-}(\theta,\varphi) = \frac{2}{3}|Y_1^0|^2 = \frac{2}{3}\frac{3}{4\pi}\cos^2\theta$

d)

$$\langle \tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\,|S_z|\,\overset{j}{3/2},\overset{m}{1/2}\rangle = \left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\langle 1|\langle -| + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\langle 0|\langle +|\right)\underbrace{S_z\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\rangle|-\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|0\rangle|+\rangle\right)}_{\sqrt{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{2}\hbar\right)|1\rangle|-\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}\hbar\right)|0\rangle|+\rangle} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\hbar\right) + \frac{2}{3}\frac{1}{2}\hbar = \left(-\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\right)\hbar = \frac{1}{6}\hbar$$

$$\langle 3/2,1/2\,|S_z|\,3/2,1/2\rangle = \int d\Omega\ \langle 3/2,1/2|\hat{n}\rangle\langle\hat{n}|S_z|3/2,1/2\rangle =$$

$$= \int d\Omega \left(\frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^{1*}\langle -| + \sqrt{\frac{2}{3}}Y_1^{0*}\langle +|\right) S_z \left(\frac{1}{\sqrt{3}}Y_1^1|-\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}Y_1^0|+\rangle\right)$$

$$= \int d\Omega\ \underbrace{\left(\frac{1}{3}|Y_1^1|^2\left(-\frac{1}{2}\hbar\right) + \frac{2}{3}|Y_1^0|^2\left(\frac{1}{2}\hbar\right)\right)} =$$

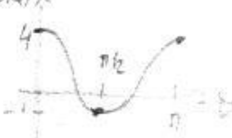
è il valore medio in f^{ne} dell'angolo

$$= -\frac{1}{6}\hbar + \frac{2}{6}\hbar = \frac{1}{6}\hbar \quad \text{ok}$$

$$= -\frac{\hbar}{2}\frac{1}{8\pi}\sin^2\theta + \frac{\hbar}{2}\frac{4}{8\pi}\cos^2\theta =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\frac{1}{8\pi}\left(-1+5\cos^2\theta\right) \quad f(\theta,\varphi)$$

$$-1+5c^2 = \frac{8}{\hbar}2\pi f(\theta,\varphi)$$



e) $$|S_{x,\pm}\rangle = \frac{|+\rangle \pm |-\rangle}{\sqrt{2}} \Rightarrow |\pm\rangle = \frac{|S_x+\rangle \pm |S_x-\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$P_{2,x+} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}+\frac{2}{6} = 1/2$$

$$P_{2,x-} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = 1/2$$

$$\langle S_x\rangle = 0$$

e infatti è perfettamente ragionevole per questioni di simmetria

f) è come per x.

Settembre 97 (N3)

Se il deutone è costituito da un protone ed un neutrone in uno stato con $J=1$, $S=1$ e L dominantemente 0 con una piccola frazione di $L=2$
a) si scriva la f^ne d'onda del deutone nello stato $J_z=1$ nel sistema del centro di massa indicando con $u_L(r)$ $(L=0,2)$ le f^ni d'onda radiali
b) si calcoli la prob.^tà che la proiezione nell'asse z dello spin p sia $-1/2$ in questo stato

a)
$$\overset{s_p}{1/2} \times \overset{s_n}{1/2} \to \begin{cases} S=0 \\ S=1 \end{cases}$$

Il deutone è
$$\begin{cases} S=1 \\ \ell = 0 + \epsilon 2 \end{cases} \to j=1$$

se $\ell=0 \to j=1$
se $\ell=2 \to j=\underline{1},2,3$

comunque:
$1 = m_j = m_\ell + m_s$

Per la componente dominante $|\overset{j}{1},\overset{m_j}{1}\rangle = |\overset{m_\ell}{0}\rangle|\overset{m_s}{1}\rangle = |0\rangle \, |\overset{pn}{++}\rangle$

$$\psi_0 = \sqrt{1-\epsilon}\, u_0(r)\, Y_0^0 \, |++\rangle$$

per quella sotto dominante vediamo i CG di $\ell \times 1$
$$|\overset{j}{1},\overset{m_j}{1}\rangle = \sqrt{\tfrac{3}{5}}\, |2\rangle \underbrace{|-1\rangle}_{|--\rangle} - \sqrt{\tfrac{3}{10}}\, |1\rangle \underbrace{|0\rangle}_{\frac{|+-\rangle+|-+\rangle}{\sqrt{2}}} + \sqrt{\tfrac{1}{10}}\, |0\rangle \underbrace{|1\rangle}_{|++\rangle}$$

$$\psi_2 = \sqrt{\epsilon}\, u_2(r) \left[\sqrt{\tfrac{3}{5}}\, Y_2^2 \, |--\rangle - \sqrt{\tfrac{3}{10}}\, Y_2^1 \, \frac{|+-\rangle+|-+\rangle}{\sqrt{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{10}}\, Y_2^0 \, |++\rangle \right]$$

così $\psi = \psi_0 + \psi_2$

b)
$$\left(\langle \overset{p}{-}+| + \langle --|\right)\left(\cancel{|\psi_0\rangle} + |\psi_2\rangle\right) = \sqrt{\epsilon}\, u_2(r) \left[\sqrt{\tfrac{3}{5}}\, Y_2^2 - \sqrt{\tfrac{3}{10}}\, Y_2^1 \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$\to P_{p,-\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{20}\right)\epsilon = \frac{3}{4}\epsilon$$

ne segue che $P_{p,\frac{1}{2}} = 1 - \frac{3}{4}\epsilon$

Calcoliamo anche
$$\left(\langle -\overset{n}{+}| + \langle ++|\right)\left(|\psi_0\rangle + |\psi_2\rangle\right) = \sqrt{1-\epsilon}\, u_0(r)\, Y_0^0 + \sqrt{\epsilon}\, u_2(r) \left[-\sqrt{\tfrac{3}{10}}\, Y_2^1 \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{10}}\, Y_2^0 \right]$$

$$\to P_{n,\frac{1}{2}} = 1 - \epsilon + \epsilon \underbrace{\left(\frac{3}{20} + \frac{1}{10}\right)}_{1/4} = 1 - \frac{3}{4}\epsilon \, , \quad P_{n,-1/2} = \frac{3}{4}\epsilon$$

Una particella di spin 1 con $S_z = 0$ decade in due particelle di spin $1/2$ in onda D. Si determini la distribuzione angolare dei prodotti di decadimento.

$$s=1,\ s_z=0 \xrightarrow[\ell=2]{d} \underbrace{1/2,\ 1/2}$$

$$\to s=1 \quad\quad \to s=0 \leftarrow \text{NO}$$

$$\vec{J} = \vec{\ell} + \vec{s} \quad\quad \ell - s = 1 \quad\quad \ell + s = 3_{max}$$

$$\boxed{2 \times 1} \to CG:$$

$$|1,0\rangle = \sqrt{\frac{3}{10}}\,|2,1\rangle|1,-1\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}\,|2,0\rangle|1,0\rangle + \sqrt{\frac{3}{10}}\,|2,-1\rangle|1,1\rangle$$

$$\langle\hat{n}|1,0\rangle = \sqrt{\frac{3}{10}}\,\underbrace{\langle\hat{n}|2,1\rangle}_{Y_2^1}|1,-1\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}\,\underbrace{\langle\hat{n}|2,0\rangle}_{Y_2^0}|1,0\rangle + \sqrt{\frac{3}{10}}\,\underbrace{\langle\hat{n}|2,-1\rangle}_{Y_2^{-1}}|1,1\rangle$$

$$P_{\theta,\varphi} = \frac{3}{10}|Y_2^1|^2 + \frac{2}{5}|Y_2^0|^2 + \frac{3}{10}|Y_2^{-1}|^2$$

$$= 2\cdot\frac{3}{10}\underbrace{|Y_2^1|^2}_{\frac{15}{8\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta} + \frac{2}{5}\underbrace{|Y_2^0|^2}_{\frac{5}{2\cdot 8\pi}(3\cos^2\theta-1)^2} = \frac{3}{5}\,\frac{15}{8\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{2}{5}\,\frac{5}{2\cdot 8\pi}\left(9\cos^4\theta + 1 - 6\cos^2\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left(\underbrace{9(1-c^2)c^2}_{9c^2 - \cancel{9c^4}} + \cancel{9c^4} + 1 - 6c^2\right) = \frac{1}{8\pi}\left(3c^2+1\right)$$

$$\int d\Omega\ \frac{1}{8\pi}(3c^2+1) = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \int_{-1}^{1} \underbrace{d\cos\theta}_{x}\ \frac{1}{8\pi}\left(3x^2+1\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(x^3+x\right)_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\Big(\overbrace{1+1-(-1)-(-1)}^{4}\Big) = 1$$