La cinematica

Biomeccanica del movimento
Prof.ssa Luciana Zaccagni

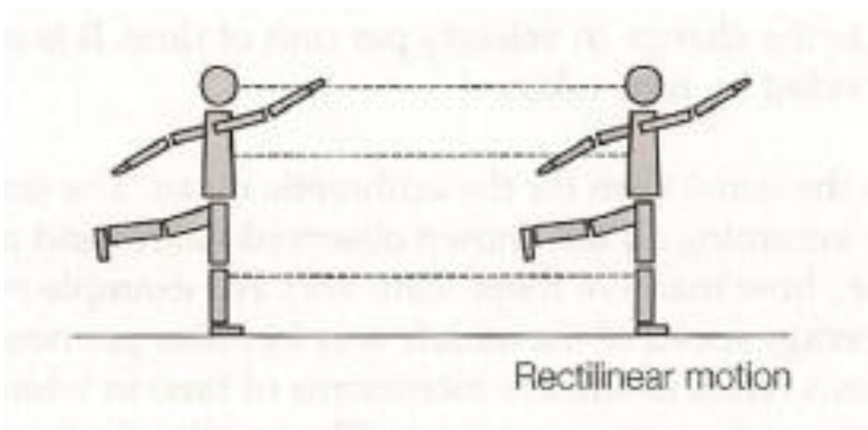
Cinematica

- **La cinematica è lo studio del movimento e si propone di descriverlo, senza occuparsi di ciò che lo ha causato.**
- I risultati di molti eventi sportivi sono misure di cinematica, quindi capire queste misure è importante.
- Cosa è il movimento? Possiamo definire il movimento come l'azione o il processo di un cambiamento della posizione di un corpo nello spazio e nel tempo.
- Il movimento coinvolge un cambiamento nella posizione da un punto all'altro. Due cose sono necessarie affinché avvenga il movimento: lo spazio e il tempo. Per rendere lo studio del movimento più semplice, classifichiamo il movimento in lineare, angolare o entrambi (generale).

Movimento lineare

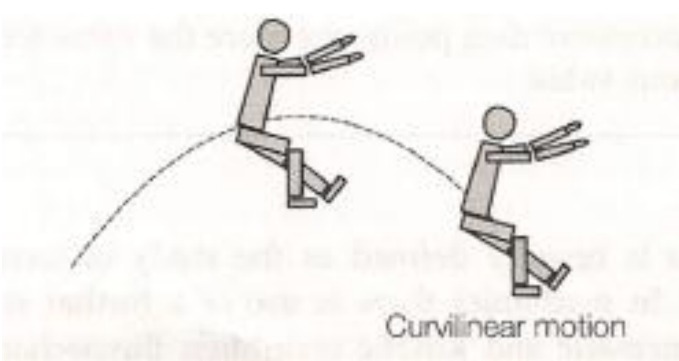
Il movimento lineare viene anche chiamato come **traslazione.**

Avviene quando tutti i punti di un corpo si muovono della stessa distanza, nella stessa direzione e nello stesso tempo. Questo può avvenire in due modi: **traslazione rettilinea o curvilinea.** Il primo caso avviene quando tutti i punti di un corpo o di un oggetto si muovono in una linea retta in maniera tale che la direzione del moto non cambia, l'orientamento dell'oggetto non cambia, e tutti i punti dell'oggetto si muovono della stessa distanza.



Nel secondo caso, molto simile al precedente, tutti i punti di un corpo o di un oggetto si muovono in maniera tale che l'orientamento dell'oggetto non cambia, tutti i punti dell'oggetto si muovono della stessa distanza.

La differenza fra il rettilineo e il curvilineo è nel percorso seguito dai punti dell'oggetto che nel secondo caso è curvo, quindi la direzione del moto dell'oggetto è costantemente in cambiamento, anche se l'orientamento dell'oggetto non cambia.



Per determinare se un moto è lineare, basta immaginare due punti dell'oggetto sotto esame e connetterli tramite una linea. Come l'oggetto si muove, se la linea mantiene sempre lo stesso orientamento (ovvero se la linea punta nella stessa direzione e rimane della stessa lunghezza) allora parliamo di movimento lineare.

Se i punti sulla linea immaginaria si muovono in linee rette parallele, allora il moto è **rettilineo**.

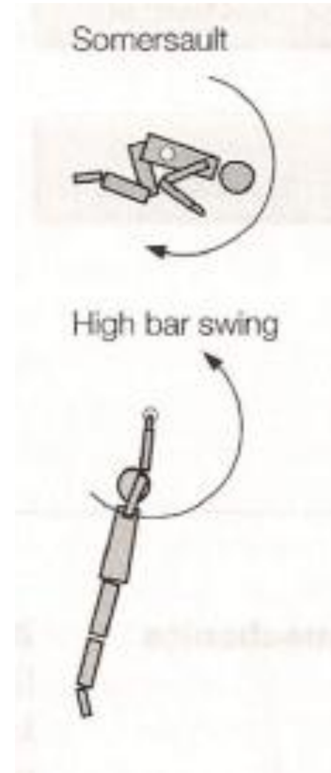
Se i punti si muovono in linee parallele non rette allora il moto è **curvilineo**.

Movimento Angolare

Il movimento angolare è anche chiamato **rotazione** o movimento rotatorio. Avviene quando tutti i punti di un corpo o di un oggetto si muovono in cerchi (o parti di cerchi) attorno lo stessa linea centrale fissa o asse di rotazione che può essere reale o immaginario. Il movimento angolare può avvenire attorno ad un asse dentro o fuori il corpo.

Un bambino su un'altalena è un esempio di movimento angolare attorno ad un asse esterno al corpo.

Per determinare se un movimento è angolare, occorre prendere una qualsiasi coppia di punti sull'oggetto in questione. Come l'oggetto si muove, se il percorso di ciascuno di questi punti è circolare, se i percorsi circolari hanno lo stesso centro o asse, se la linea di questi punti cambia continuamente orientamento mentre l'oggetto si muove, se la linea cambia continuamente la direzione a cui punta, allora l'oggetto sta ruotando.



Movimento generale

- La combinazione dei movimenti angolari dei nostri arti può produrre un movimento lineare di uno o più parti del corpo, ad es. quando l'articolazione del ginocchio e dell'anca si estendono per produrre un movimento lineare del piede. Analogamente, l'estensione del gomito e un'adduzione orizzontale della spalla possono produrre un movimento lineare della mano.
- **Il movimento generale è la combinazione del movimento lineare e di quello angolare.** Questo tipo di movimento è il tipo di movimento più comune che si trova nel movimento umano e nello sport.
- La corsa e il cammino sono buoni esempi di movimento generale.

- Classificare il movimento come lineare, angolare o generale rende l'analisi meccanica del movimento più semplice. Se un movimento può essere scomposto in componenti lineari e in componenti angolari, le componenti lineari possono essere analizzate utilizzando le leggi della meccanica che governano il movimento lineare. Analogamente, le componenti angolari possono essere analizzate usando le leggi della meccanica che governano il movimento angolare. Le analisi lineari e angolari possono essere poi combinate per studiare il moto generale di un oggetto o di una persona.

POSIZIONE, DISTANZA E SPOSTAMENTO

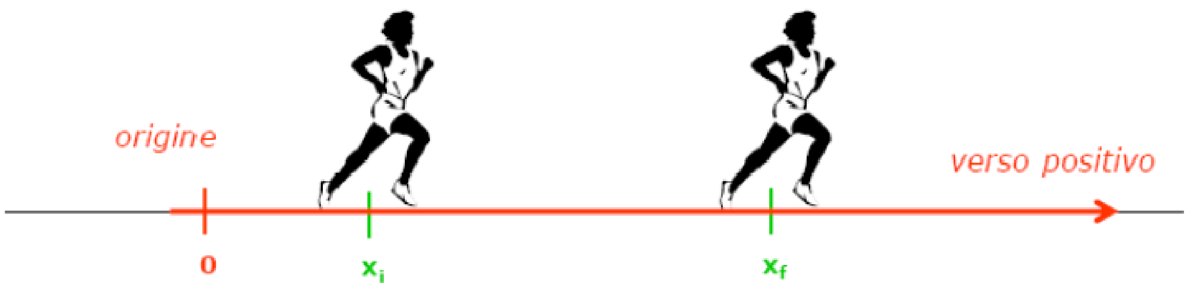
La prima caratteristica cinematica che usiamo per descrivere un oggetto è la sua **posizione**. La definizione di movimento - come azione o processo di cambiamento in posizione - si riferisce per l'appunto alla posizione.

Dal punto di vista meccanico la **posizione è definita come la locazione nello spazio.**

Può sembrare non così importante all'inizio come caratteristica, ma considerando l'importanza della posizione dei giocatori nel campo in sport come il calcio, il tennis, il rugby, la pallavolo e che le strategie utilizzate spesso dipendono da dove i giocatori di ciascuna squadra sono posizionati .....

Sistema di coordinate in una dimensione

Il primo passo nella descrizione del moto di un corpo è quello di stabilire un sistema di coordinate che definiscono la sua posizione. Un esempio di sistema di coordinate in una dimensione è qui mostrato:



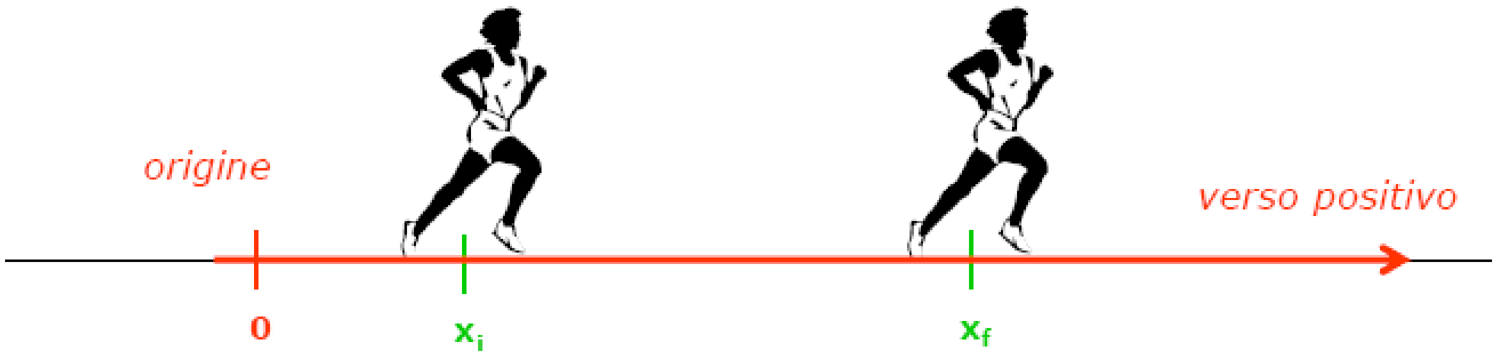
Questo sistema consiste in un asse x, con un'origine (dove x=0) e una freccia che indica il verso positivo, cioè il verso nel quale x aumenta.

Nel costruire un sistema di coordinate, siamo liberi di scegliere l'origine, il verso positivo come desideriamo, ma una volta fatta questa scelta, **dobbiamo essere coerenti con essa in tutti i calcoli che seguiranno.**

Nella figura la persona si è mossa verso destra da una posizione iniziale x_i a una posizione finale x_f. Poiché il verso positivo è a destra, si ha che $x_f > x_i$

Uni-dimensionale (1D)

Posizione locazione nello spazio
necessita della definizione di un sistema di coordinate



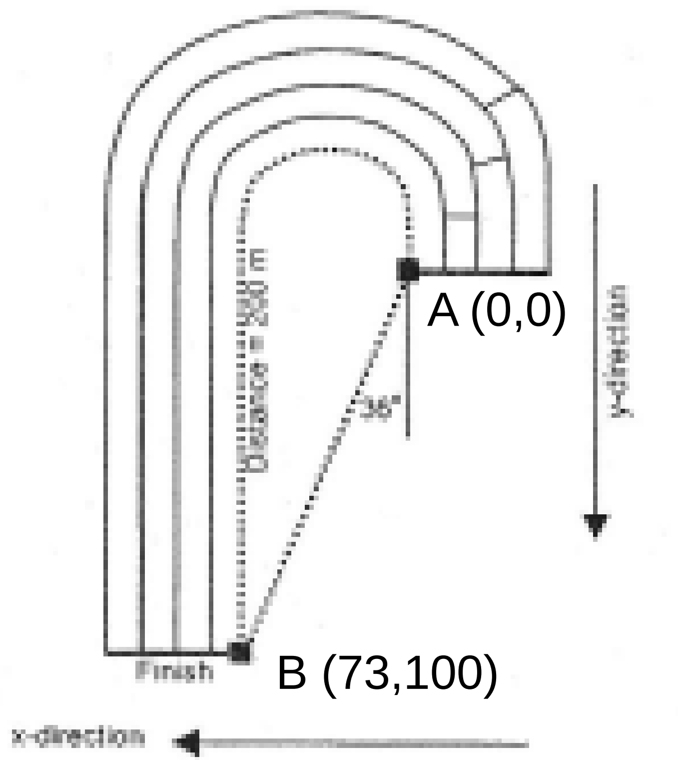
Il moto di un corpo si può esprimere in termini di:

Distanza lunghezza complessiva del tragitto

Spostamento cambiamento di posizione=posizione finale-posizione iniziale

$$\Delta x = x_f - x_i$$

- E’ stata usata la notazione Δx come abbreviazione per la quantità $x_f - x_i$.
- Δx può essere sia positivo (se $x_f > x_i$), sia negativo (se $x_f < x_i$), sia nullo (se $x_f = x_i$).
- Le unità di misura SI per lo spostamento e per la distanza sono i metri, ma spostamento e distanza sono grandezze fisiche differenti.

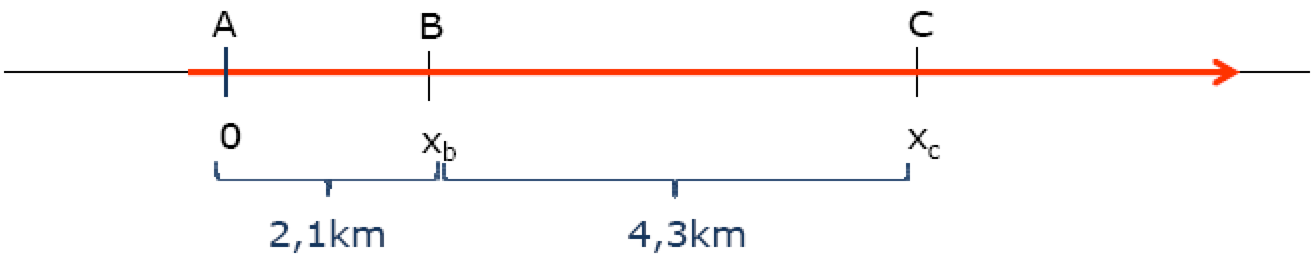


Un velocista che corre nella corsia interna della pista di atletica copre una

Distanza = 200m

Spostamento = 123,8 m con un angolo di 36°

In questo esempio la distanza è più importante dello spostamento.



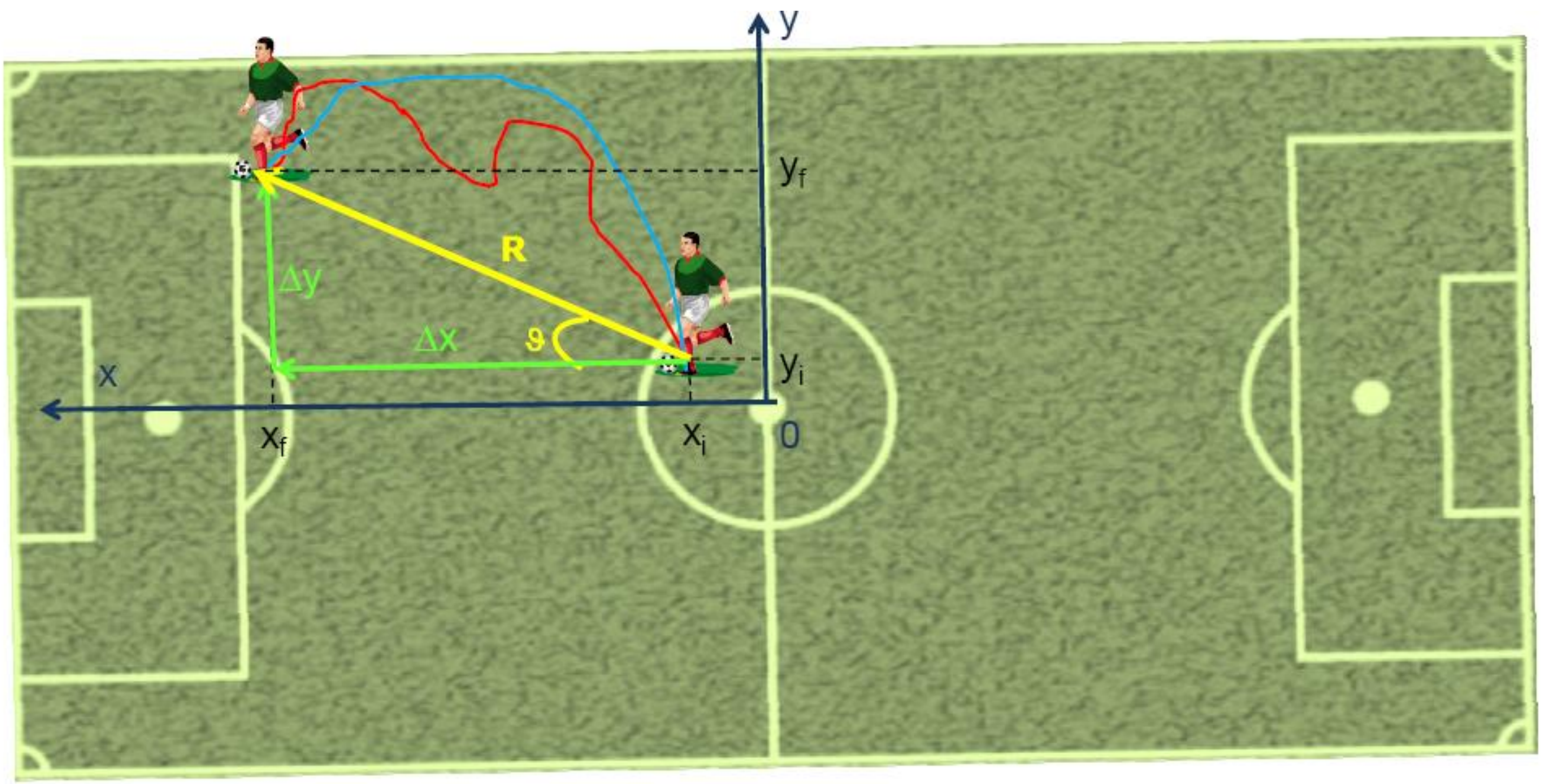
- Supponiamo di uscire da casa (punto B), di andare in biblioteca (punto C) e quindi di tornare a casa.
- Nel tragitto da casa alla biblioteca e ritorno, la distanza percorsa è 8,6km, mentre lo spostamento è zero dal momento che x_f=x_i=2,1km.
- Supponiamo invece di andare da casa (B) alla biblioteca (C) e poi al parco (A).
- In questo caso la distanza percorsa è 10,7km, ma lo spostamento è: $\Delta x = x_f - x_i$ = (0km)-(2,1km) = -2,1km
  dove il segno meno indica che lo spostamento è avvenuto nel verso negativo che in questo caso è a sinistra.

N.B. Non si ha uno spostamento negativo ma uno spostamento in una direzione negativa o positiva
La distanza è sempre positiva

Bi-dimensionale (2D)

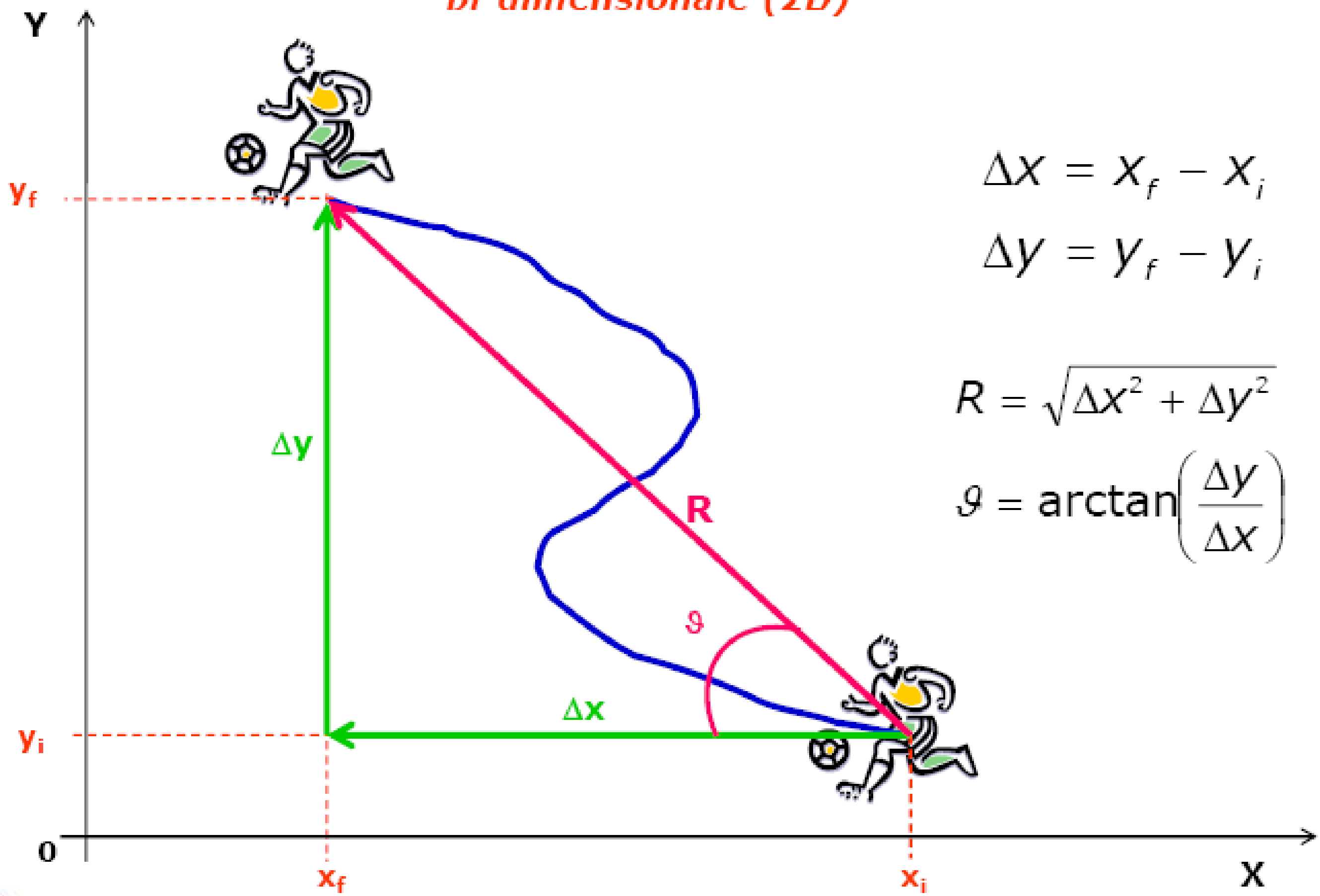
- Consideriamo una situazione bidimensionale. Immaginiamo di guardare una partita di calcio, un giocatore sta correndo dal centro campo verso la porta. Per descrivere la sua posizione iniziale e finale quindi il relativo spostamento è utile utilizzare un **sistema di riferimento cartesiano.**
- Prima di tutto, posizioneremo un punto di riferimento fisso del nostro sistema di coordinate chiamato *origine,* perché tutte le misurazioni delle posizioni hanno origine da quel punto.
- Posizioniamo l'**origine** al centro campo e definiamo **l'asse x** diretto lungo la lunghezza e **l'asse y** diretto lungo la larghezza del campo da calcio.

Spostamento in campo di un giocatore di calcio



- La **distanza percorsa** è facilmente definita: è la misura della lunghezza del percorso seguito dal giocatore per andare dalla sua posizione iniziale a quella finale (lunghezza del percorso celeste o rosso di figura).
- Lo **spostamento risultante è la distanza misurata lungo una linea retta dalla posizione iniziale alla posizione finale** (R). Possiamo trovare lo spostamento lungo la y facendo la differenza fra il valore finale e quello iniziale della posizione nella direzione y e analogamente possiamo trovare lo spostamento lungo la x.

bi-dimensionale (2D)



$$\Delta x = x_f - x_i$$

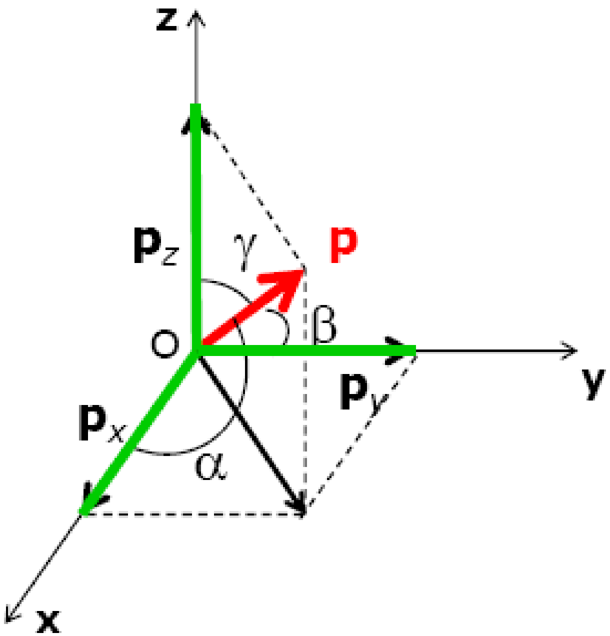
$$\Delta y = y_f - y_i$$

$$R = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

tri-dimensionale (3D)

Sistema di riferimento



$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_x + \mathbf{p}_y + \mathbf{p}_z = p_x\mathbf{i} + p_y\mathbf{j} + p_z\mathbf{k}$$

$$p_x = \mathbf{p} \bullet \mathbf{i} = p\cos\alpha$$

$$p_y = \mathbf{p} \bullet \mathbf{j} = p\cos\beta$$

$$p_z = \mathbf{p} \bullet \mathbf{k} = p\cos\gamma$$

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$$

COORDINATE CARTESIANE

VELOCITÀ

- Il passo successivo nella descrizione del moto è quello di valutare quanto rapidamente si muove un oggetto. Per esempio, quanto tempo impiega una palla lanciata da un giocatore di baseball a raggiungere la base?
- Il modo più semplice per caratterizzare la rapidità di un moto è attraverso la

  velocità scalare media = distanza/tempo impiegato

  La velocità scalare media ha come dimensioni il rapporto tra una distanza e un tempo; in unità SI si misura in metri al secondo (**m/s**). Sia la distanza sia il tempo impiegato sono grandezze positive, perciò la velocità scalare media è sempre positiva.
- La **velocità media (*v_m*)** è definita come il rapporto tra lo spostamento e il tempo impiegato a compierlo.
- **velocità media = spostamento/tempo impiegato**

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

- Notare la profonda differenza fra i termini “velocità scalare” e “velocità” che , nonostante siano simili, descrivono grandezze fisiche diverse. Forse più opportunamente gli anglosassoni, per evitare equivoci, utilizzano per le due grandezze vocaboli diversi: *speed* per la velocità scalare e *velocity* per la velocità.

La velocità media non ci informa soltanto su quanto velocemente l’oggetto in esame si sta muovendo, ma ci dice anche qualcosa sulla **direzione** nella quale esso si muove.

Per esempio, se un oggetto si muove in direzione positiva,

$x_f > x_i$ e $v_m > 0$.

Al contrario, se un oggetto si muove in direzione negativa, si ha che $x_f < x_i$ e $v_m < 0$.

La velocità media ci fornisce più informazioni rispetto alla velocità scalare media, quindi in biomeccanica è usata più spesso.

velocità

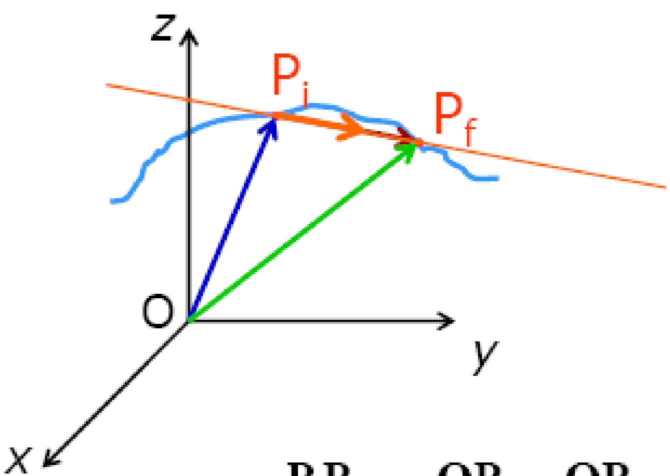
Quanto rapidamente si muove un oggetto?

Velocità scalare media (**scalare**, *speed*)

Distanza/tempo impiegato

Velocità media (**vettore**, *velocity*)

Spostamento/tempo impiegato



OP_i vettore posizione

P_iP_f vettore spostamento

$OP_f = OP_i + P_iP_f$

$$\mathbf{v}_m = \frac{\mathbf{P}_i\mathbf{P}_f}{t_f - t_i} = \frac{\mathbf{OP}_f - \mathbf{OP}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{OP}}{\Delta t}$$

$$\begin{cases} v_{mx} = \dfrac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\ v_{my} = \dfrac{y_f - y_i}{t_f - t_i} = \dfrac{\Delta y}{\Delta t} \\ v_{mz} = \dfrac{z_f - z_i}{t_f - t_i} = \dfrac{\Delta z}{\Delta t} \end{cases}$$

Es.1: Allenamento allo scatto

Un atleta esegue uno scatto di 50m in 8s quindi si ferma e torna, passeggiando lentamente, alla linea di partenza in 40s. Se viene presa come positiva la direzione dello scatto:

a) qual è la velocità media dello scatto?

b) qual è la velocità media della passeggiata di ritorno?

c) qual è la velocità media del percorso completo di andata e ritorno?

soluzione

a) applichiamo l'equazione allo scatto tenendo presente che x_f=50m; x_i=0m; t_f=8s e t_i=0s;

$$V_{m=}(x_f - x_i)/(t_f - t_i)=(50m-0m)/(8s-0s)=6{,}25m/s$$

b) applichiamo l'equazione allo scatto tenendo presente che x_f=0m; x_i=50m; t_f=48s e t_i=8s;

$$V_{m=}(x_f - x_i)/(t_f - t_i)=(0m-50m)/(48s-8s)=-1{,}25m/s$$

c) applichiamo l'equazione allo scatto tenendo presente che x_f=0m; x_i=0m; t_f=48s e t_i=0s;

$$V_{m=}(x_f - x_i)/(t_f - t_i)=(0m-0m)/(48s-0s)=0m/s$$

Teniamo presente che in questo caso la velocità scalare media per il percorso completo è 100m/48s=2,08m/s quindi diversa da zero

Es.2: velocità media nella corsa

Considerando i record mondiali maschili riportati in tabella, si calcoli la velocità media maggiore fra le diverse discipline.

Gara	Record	Atleta	Nazionalità	Data	Luogo
50m	5.56s	Donovan Bailey	Canada	9/02/1996	Reno, Stati Uniti
100m	9.69s	Usain Bolt	Giamaica	16/08/2008	Pechino, Cina
200m	19.30s	Usain Bolt	Giamaica	20/08/ 2008	Pechino, Cina
400m	43.18s	Michael Johnson	USA	26/08/1999	Siviglia,Spagna

Soluzione

applichiamo la definizione della velocità media per i diversi record

$$V_{m50}=(x_f - x_i)/(t_f - t_i)=(50m-0m)/(5.56s-0s)=8.99m/s$$

$$V_{m100}=(x_f - x_i)/(t_f - t_i)=(100m-0m)/(9.69s-0s)=10.32m/s$$

$$V_{m200}=(x_f - x_i)/(t_f - t_i)=(200m-0m)/(19.30s-0s)=10.36m/s$$

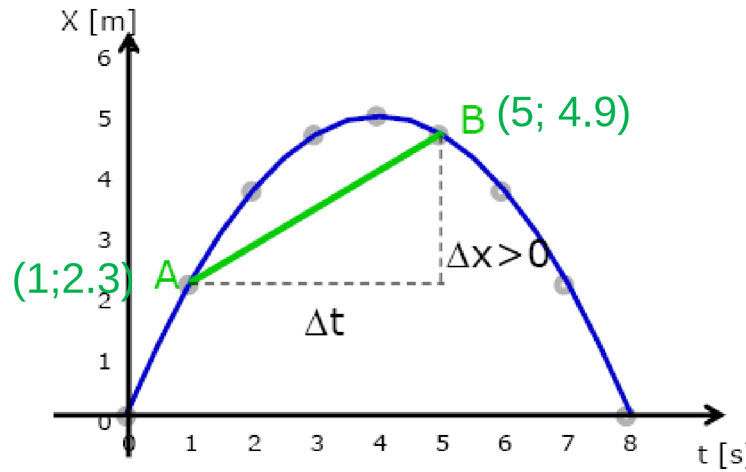
$$V_{m400}=(x_f - x_i)/(t_f - t_i)=(400m-0m)/(43.18s-0s)=9.26m/s$$

Nei 200m è stata raggiunta la velocità scalare media maggiore

Grafico spazio-tempo

- Spesso è utile visualizzare il moto di una particella, rappresentando la sua posizione in funzione del tempo. Riportando sull'asse orizzontale il tempo t e sull'asse verticale la posizione x otteniamo un grafico spazio-tempo che rende più semplice visualizzare il moto della particella.
- Una rappresentazione nel piano t-spostamento porta a un'interpretazione particolarmente utile della velocità media. Supponiamo di voler determinare la velocità media della particella in Figura nell'intervallo di tempo fra t=1s e t=5s.

La *pendenza* di una retta congiungente due punti in un grafico spazio-tempo è uguale alla velocità media nell'intervallo di tempo tra i due punti

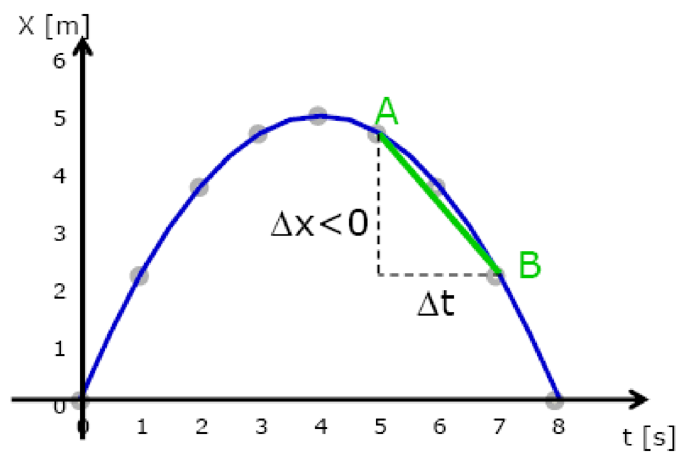


- Dalla definizione di velocità media sappiamo che
- $v_m = \Delta x/\Delta t = (4.9m - 2.3m)/(5s-1s) = 2.6m/4s = +0.7m/s$.

- Per collegare ciò con il grafico spazio-tempo, disegniamo una linea che colleghi la posizione della particella a t=1s (A) e la posizione a t=5s (B). La pendenza della retta che congiunge A con B è uguale alla crescita di x rispetto a t, ovvero $\Delta x/\Delta t$.

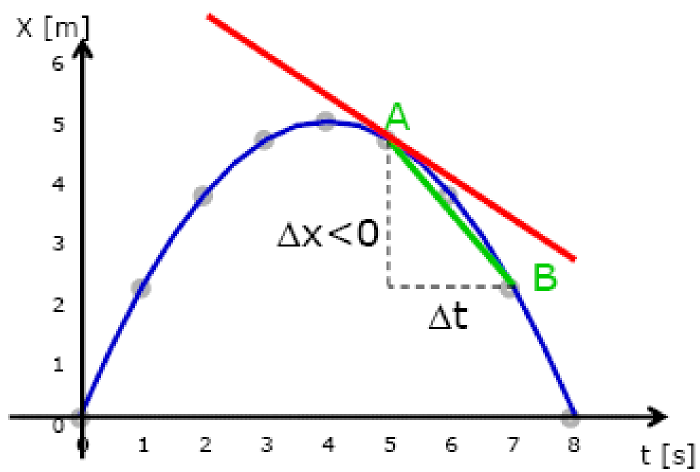
  Ma $\Delta x/\Delta t$ è la velocità media, perciò concludiamo che:

  la **pendenza di una retta congiungente due punti in un grafico spazio-tempo è uguale alla velocità media nell'intervallo di tempo tra i due punti.**
- Calcoliamo la velocità media tra l'istante t=5s e t=7s, in figura è mostrata la linea che congiunge i due punti corrispondenti. Prima di tutto notiamo che questa ha una pendenza negativa, quindi $v_m<0$. Notiamo inoltre che la linea è inclinata di più rispetto alla precedente. Se calcoliamo la pendenza di questa retta, troviamo che in questo intervallo di tempo
- $v_m=(2.3m-4.9m)/(7s-5s)=-1.3m/s.$



Velocità istantanea

- La velocità media è una grandezza utile per caratterizzare il moto; però a volte può portare a considerazioni sbagliate. Per esempio, supponiamo di viaggiare in automobile su una lunga strada rettilinea e di percorrere 92km in 2.0h. La nostra velocità media è di 46km/h, ma sicuramente saranno stati solo pochi gli istanti durante i quali la velocità era effettivamente di 46km/h: possiamo aver viaggiato a 65km/h per la maggior parte del tempo, ma per tutto il tempo durante il quale siamo stati fermi alla stazione di servizio per mangiare la nostra velocità era 0.
- Per avere una rappresentazione più accurata del viaggio, occorre effettuare la media su intervalli di tempo più piccoli. Se calcoliamo la velocità media ogni quindici minuti, otteniamo una migliore rappresentazione di come è stato il viaggio. Ancor meglio, possiamo ottenere una rappresentazione più realistica calcolando la velocità media ogni minuto, o addirittura ogni secondo.
- La **velocità istantanea** in un dato istante è uguale al valore **della pendenza della tangente al grafico** spazio-tempo in quell'stante.



La velocità istantanea è la *pendenza* della tangente alla curva in un determinato istante

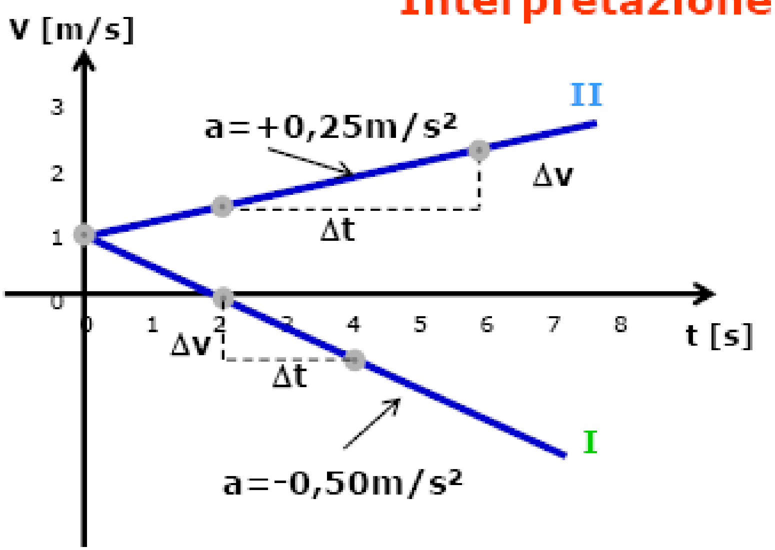
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

ACCELERAZIONE

- Mentre la velocità misura il cambiamento di posizione rispetto al tempo, l'accelerazione misura il cambiamento di velocità rispetto al tempo. Tra tutti i concetti discussi in questa sezione forse nessuno è importante per la biomeccanica come quello dell'accelerazione. Galileo, per esempio, mostrò che i corpi in caduta libera si muovono con accelerazione costante e Newton mostrò che accelerazione e forza sono direttamente correlate, come vedremo nella Dinamica. Perciò risulta particolarmente importante una comprensione chiara e completa del concetto di accelerazione.
- Definizione di accelerazione media: $$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$
- Notiamo che le dimensioni dell'accelerazione media sono le dimensioni di una velocità diviso un tempo, cioè metri al secondo fratto secondo $$\frac{metri\ al\ secondo}{secondo} = \frac{m/s}{s} = \frac{m}{s^2}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Interpretazione grafica accelerazione



Retta I. Particella con accelerazione costante di $-0{,}50 m/s^2$, ogni secondo la velocità della particella diminuisce di 0,50 m/s. In un diagramma velocità-tempo osserviamo una linea con pendenza negativa.

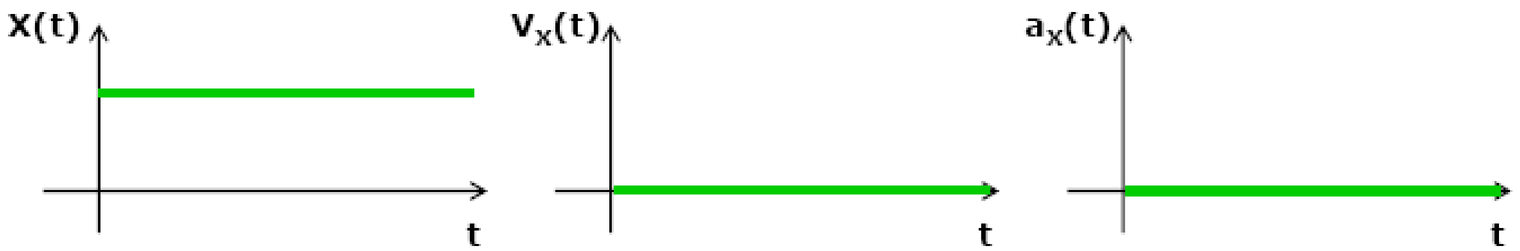
Retta II. Ha una pendenza positiva con un accelerazione costante di $+0{,}25 m/s^2$.

In termini di diagramma velocità-tempo, un moto con accelerazione costante viene rappresentato con una retta che ha una pendenza di valore uguale alla accelerazione

In un moto rettilineo, quando velocità e accelerazione di un oggetto hanno: *stesso segno*,il modulo della velocità aumenta; *segno opposto*, il modulo della velocità diminuisce

Casi particolari

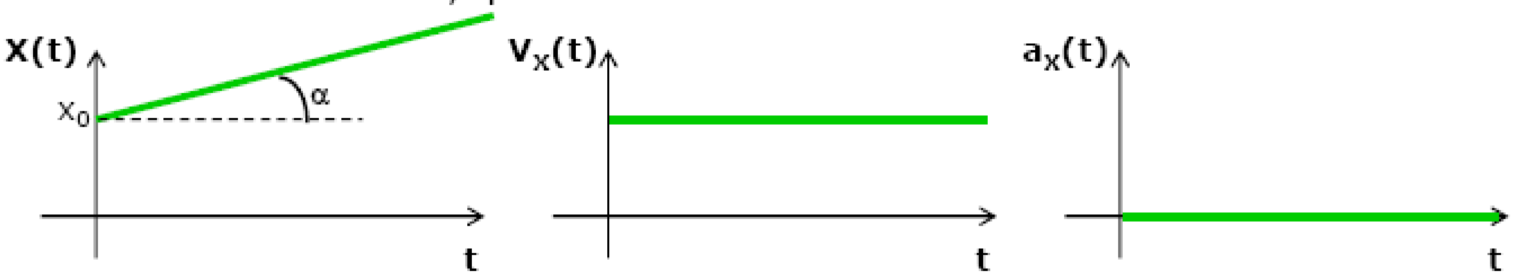
Punto in quiete



$x(t) = x_0$ $\quad$ $v_x(t) = 0$ $\quad$ $a_x(t) = 0$

Moto rettilineo uniforme

Moto di un corpo non soggetto ad alcuna forza o a forze che costantemente si equilibrano fra loro, caso limite semplice da studiare. La velocità scalare è costante (il moto è uniforme) la direzione della velocità è quella della retta lungo la quale si svolge il moto, quindi la velocità vettoriale è costante



$x(t) = vt + x_0$ $\quad$ $v_x(t) = \tan\alpha$ $\quad$ $a_x(t) = 0$

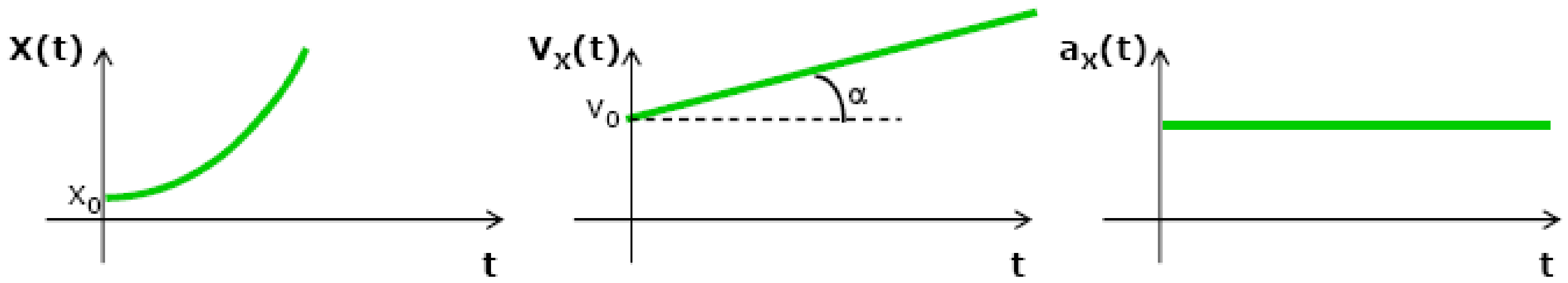
ACCELERAZIONE UNIFORME

In certe situazioni, l'accelerazione di un oggetto è costante, non cambia. Il moto di questo tipo può essere descritto da equazioni che mettono in relazione il tempo con posizione, velocità e accelerazione. Se un oggetto è soggetto ad accelerazione uniforme, la sua posizione e velocità possono essere predette in ogni istante futuro.

Casi particolari

Moto rettilineo uniformemente accelerato

L'accelerazione media ha valore costante indipendente da t. Se il moto è rettilineo le direzioni di **a** e di **v** coincidono con quella della retta lungo la quale si svolge il moto. Il caso più importante di moto uniformemente accelerato è la caduta libera di un corpo sotto l'azione di gravità.



$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \qquad v_x(t) = at + v_0 \qquad a_x(t) = \tan\alpha$$

MOTO VERTICALE DI UN PROIETTILE

- Un **proiettile** è un oggetto che viene proiettato in aria o lasciato cadere e sul quale agisce solo la forza di gravità e la resistenza dell'aria. Se la resistenza dell'aria è troppo piccola per essere misurata, e la sola forza che agisce sul proiettile è la forza di gravità della Terra, allora la forza di gravità accelererà il proiettile.
- Questa accelerazione è dovuta all'attrazione gravitazionale della Terra, o **g, è diretta verso il basso e vale 9.81 m/s²**.

$$a = -g = -9.81\, m/s^2$$

- N.B. Il segno negativo indica che l'accelerazione dovuta alla gravità è nella direzione verso il basso.

- Dalla definizione di accelerazione media, considerando che l'accelerazione è costante, sappiamo che:

$$a_m = \frac{v_f - v_i}{\Delta t} = -g$$

$$v_f - v_i = -g\Delta t$$

$$\Rightarrow \quad v_f = v_i - g\Delta t$$

- Questa equazione permette di determinare la velocità verticale istantanea del proiettile (v_f) alla fine di un intervallo di tempo (Δt) conoscendo la velocità iniziale (v_i) e la lunghezza dell'intervallo temporale. Si riconosce in questa equazione l'equazione di una retta, dove -*g* è la pendenza della retta, v_i è l'intercetta, v_f è la variabile dipendente e Δt è la variabile indipendente.
- La velocità verticale cambia linearmente con il cambiamento del tempo.

- Partiamo dalla definizione di velocità media $v_{ym} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_f - y_i}{\Delta t}$

- Dato che la velocità è linearmente proporzionale rispetto al tempo, la velocità media nell'intervallo di tempo è uguale alla velocità media fra quella iniziale e finale

$$y_f = y_i + v_i \Delta t - \frac{1}{2} g \Delta t^2$$

$$v_{ym} = \frac{v_f + v_i}{2} = \frac{y_f - y_i}{\Delta t}$$

- Questa equazione ci fornisce un mezzo per determinare la posizione verticale del proiettile alla fine di un intervallo temporale se conosciamo la velocità verticale iniziale e la durata dell'intervallo di tempo.

$$v_f^2 = v_i^2 - 2g \cdot (y_f - y_i) = v_i^2 - 2g \cdot \Delta y$$

Moto di caduta di un corpo

Se analizziamo il moto di un oggetto che viene lasciato cadere, le equazioni vengono semplificate, poiché v_i=0, e se settiamo l'origine dell'asse orizzontale in maniera tale che y_i=0, otteniamo:

$$y_f = -\frac{1}{2} g \Delta t^2$$

$$v_f = g \Delta t$$

$$v_f^2 = -2g \cdot \Delta y$$

Moto di caduta dei corpi

- Il *moto di caduta dei corpi* rappresenta un caso particolare di moto rettilineo uniformemente accelerato.

  In questo moto la traiettoria è verticale e l'accelerazione assume, sul nostro pianeta, il valore medio pari a $g = 9.81\ m/s^2$.
- La velocità raggiunta da un corpo che cade da una altezza h quando arriva a terra (trascurando la resistenza dell'aria), si calcola con la formula:

  $$v = \sqrt{(2\ g\ h)}$$
- Il tempo di caduta si calcola come: $T = V/g$

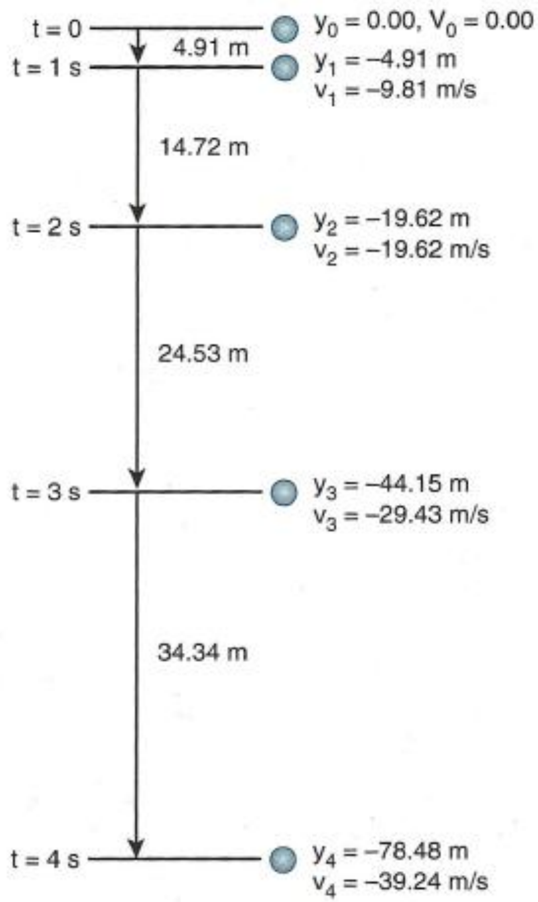
- Altre osservazioni riguardo il moto verticale di un proiettile ci possono servire. Lanciamo un oggetto nell'aria e cerchiamo di capire la velocità nell'istante che raggiunge il massimo in altezza.

  Appena prima di raggiungere il picco avrà una piccola velocità positiva (sta andando lentamente verso l'alto), appena dopo il picco avrà una piccola velocità negativa (sta andando lentamente verso il basso). La velocità verticale della palla all'apice del suo volo è nulla.

  La simmetria del volo di un proiettile serve a semplificare l'analisi. Il tempo che la palla impiega ad arrivare al picco è uguale al tempo che la palla impiega dal picco ad arrivare all'altezza iniziale.
- Quindi se posizione iniziale e finale sono le stesse:

$$\Delta t_{up} = \Delta t_{down} \quad , \qquad \Delta t_{volo} = 2\Delta t_{up}$$

Posizione verticale di una palla in caduta a intervalli di 1 s



Notare che la **velocità** della palla aumenta della stessa quantità (9.81 m/s) per ogni secondo regolata dalla legge $v_f = g\Delta t$, ma la sua **posizione** cambia di una quantità maggiore ogni secondo che cade essendo regolata dalla legge $y_f = \frac{1}{2}\, g\, (\Delta t)^2$

MOTO ORIZZONTALE DI UN PROIETTILE

- È difficile esaminare o osservare il moto orizzontale di un proiettile separatamente dal suo moto verticale, perché quando si osserva un proiettile si vedono contemporaneamente i movimenti verticali e orizzontali come un unico moto. Se potessimo osservare dall'alto un tiro libero a canestro, vedremmo che la palla si muove lungo una retta e che lo spostamento della palla a parità di intervallo di tempo rimane costante, ovvero la velocità è costante. *La velocità orizzontale di un proiettile è costante, e il suo moto orizzontale è in una linea retta.*
- Come fatto per il moto verticale, ricaveremo posizione, velocità e accelerazione per il moto orizzontale. Partiamo dalla considerazione che la velocità è costante. $v = v_i = v_f = \text{costante}$
- Se la velocità orizzontale è costante, vuol dire che non c'è cambiamento nella velocità. Quindi l'accelerazione orizzontale è nulla. $a=0$
- Inoltre, se la velocità orizzontale è costante, allora la velocità orizzontale media è la stessa della velocità orizzontale istantanea. Considerando, che la velocità media è lo spostamento diviso il tempo:

$$v_{xm} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{\Delta t}$$

$$x_f = x_i + v\Delta t$$

- Se la posizione iniziale è nulla ($x_i=0$): $x_f = v\Delta t$

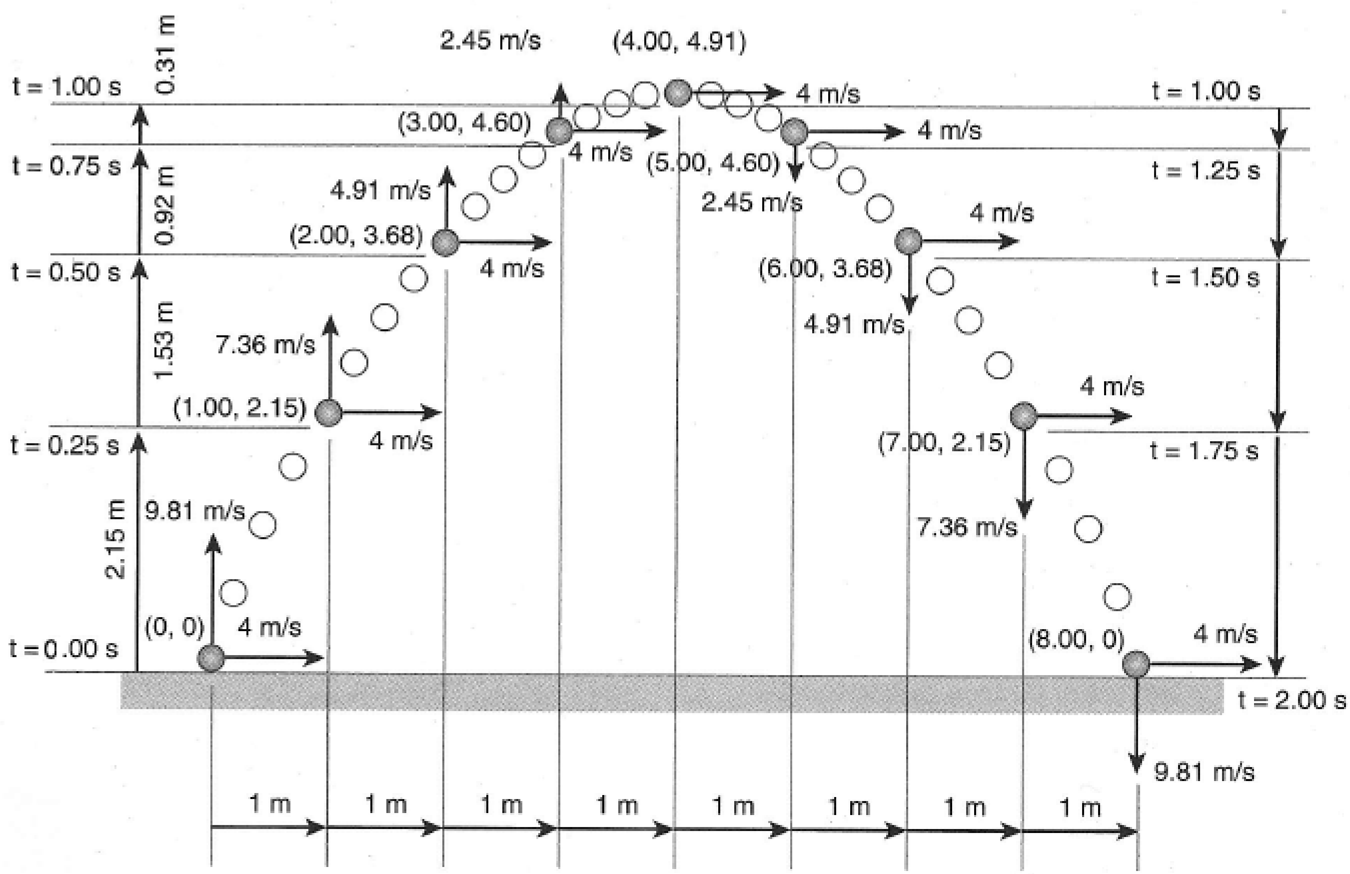
- Il movimento orizzontale e il movimento verticale di un proiettile sono indipendenti l'uno dall'altro. In altre parole, un proiettile continua ad accelerare verso il basso di $9.81 m/s^2$ con o senza il movimento orizzontale, e la velocità orizzontale di un proiettile rimane costante anche se il proiettile sta accelerando verso il basso di $9.81 m/s^2$. Anche se i movimenti di un proiettile sono indipendenti l'uno dall'altro, un'equazione può essere derivata per descrivere il percorso in due dimensioni. Ricavando il tempo e sostituendo nell'eq.

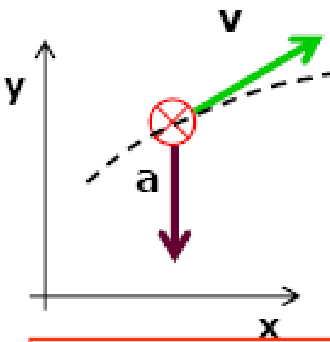
$$\Delta t = \frac{x}{v_x}$$

$$y_f = y_i + v_{yi} \cdot \left(\frac{x}{v_x}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_x}\right)^2$$

- Questa equazione corrisponde all'equazione di una parabola. Descrive le coordinate verticale (y) e orizzontale (x) di un proiettile durante il volo basato unicamente sulla posizione verticale, velocità verticale iniziale e velocità orizzontale.

Traiettoria parabolica del volo di una palla ad intervalli di 0,25 s





Moto parabolico eq. di base riepilogo

$$a_y = -9{,}81\, m/s^2 = -g$$

$$a_x = 0$$

$$x = x_0 + v_{0x}t \qquad v_x = v_{0x} \qquad v_x^2 = v_{0x}^2$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad v_y = v_{0y} - gt \qquad v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\Delta y$$

Vediamo meglio, in generale nel caso del moto uniformemente accelerato

Ricordando che $v_y = v_{0y} + at$, $t = \dfrac{v_y - v_{y0}}{a_y}$ e sostituendo in

$$y = y_0 + v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_{0y} \cdot \left(\frac{v_y - v_{0y}}{a_y}\right) + \tfrac{1}{2}(v_y - v_{0y}) \cdot \left(\frac{v_y - v_{0y}}{a_y}\right)$$

$$y = y_0 + \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2a_y} \longrightarrow \boxed{v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a(y - y_0)}$$

Gittata

- *La gittata,* ***R (range), di un proiettile è la distanza orizzontale percorsa prima di atterrare.***
- Consideriamo il caso in cui i livelli iniziale e finale sono gli stessi (y=0). Per semplificare le equazioni risultanti, sceglieremo l'origine come punto di partenza. Considerando che se la velocità scalare iniziale pari a v_i e un angolo θ sopra l'orizzonte. Il proiettile parte dall'origine, quindi le posizioni iniziali x e y sono zero: $x_i = 0$ e $y_i = 0$
- Le componenti della velocità iniziale sono determinate:

$$v_{ix} = v_i \cos\theta$$

$$v_{iy} = v_i \sin\theta$$

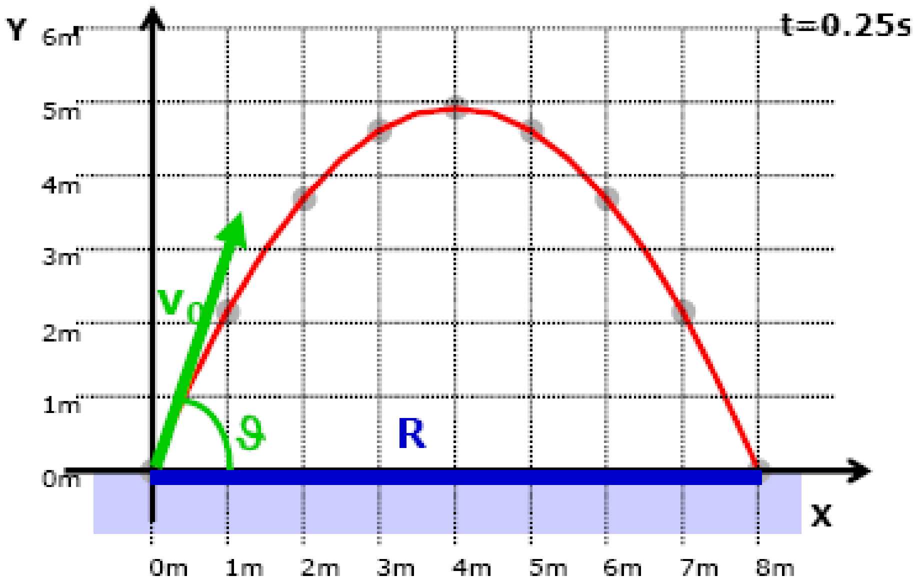
Un modo per calcolare la gittata è il seguente:

1) troviamo l'istante in cui il proiettile atterra ponendo y=0 nell'espressione

$$y = y_i + v_{iy}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 + v_i \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

2) sostituiamo il tempo trovato nell'equazione del moto lungo la direzione orizzontale.

Movimento di un proiettile (parabolico)



Gittata (R) di un proiettile è la distanza orizzontale percorsa prima di atterrare

$$v_{0x} = v_0 \cos\vartheta \qquad x_0 = 0$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\vartheta \qquad y_0 = 0$$

Troviamo l'istante in cui il proiettile atterra ponendo $y_f=0$ e sostituiamo il tempo trovato nell'equazione del moto x

$$(v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

$$t = \left(\frac{2v_0}{g}\right)\sin\vartheta$$

$$x = (v_0 \cos\vartheta)t = (v_0 \cos\vartheta)\left(\frac{2v_0}{g}\right)\sin\vartheta = \left(\frac{2v_0^2}{g}\right)\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$R = \left(\frac{v_0^2}{g}\right)\sin 2\vartheta$$

R è massima quando sin2θ è massimo, quindi quando 2θ è 90° ovvero **θ =45°**

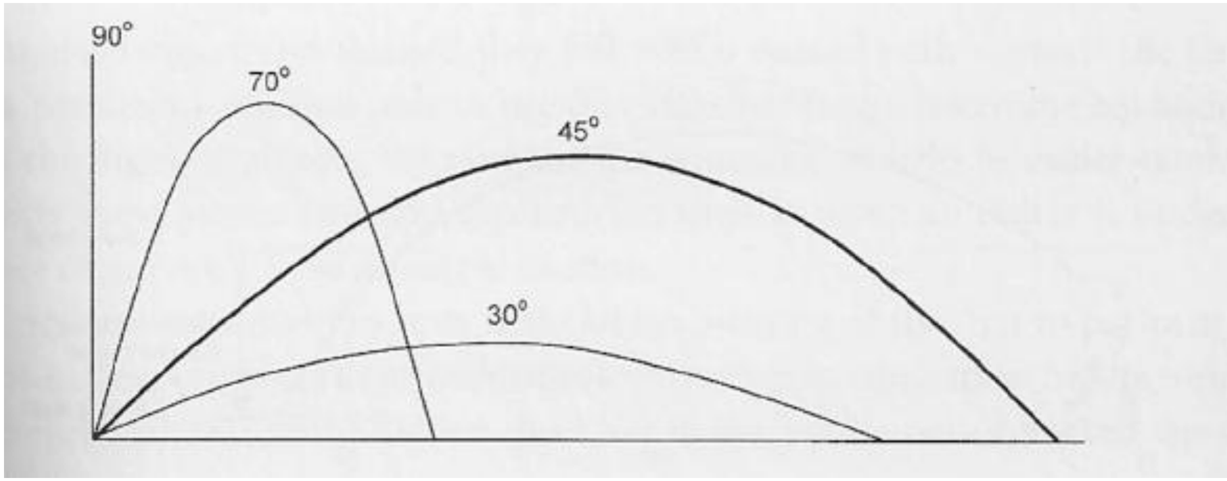
- Osserviamo che **R è inversamente proporzionale all'accelerazione di gravità g**, perciò minore è g maggiore è la gittata. Per esempio, un proiettile lanciato sulla Luna, dove l'accelerazione di gravità è circa 1/6 di quella terrestre, giunge circa sei volte più lontano di quanto arriverebbe sulla Terra. È per questa ragione che l'astronauta Alan Shepard non ha potuto resistere alla tentazione di portare con sé una mazza da golf e una pallina nella terza missione lunare nel 1971.
- Quale è l'**angolo** che permette la gittata maggiore?

  R varia con l'angolo come $\sin 2\theta$; perciò R è massima quando $\sin 2\theta$ è massimo cioè quando $\sin 2\theta=1$. Siccome $\sin 90°=1$, segue che $\theta=45°$ è l'angolo che rende massima la gittata.

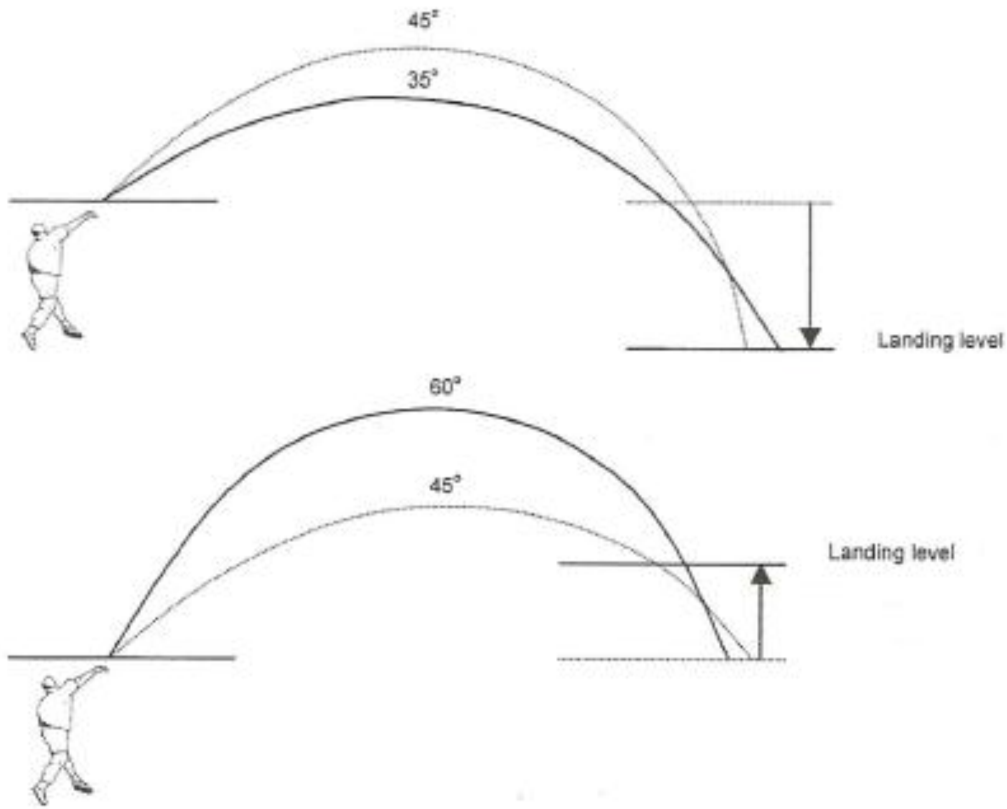
- Come ci aspettavamo, la gittata massima dipende fortemente dalla velocità scalare iniziale del proiettile; è proporzionale al quadrato della velocità scalare iniziale.
- Teniamo presente che questi risultati sono specifici per il caso in cui il proiettile atterra allo stesso livello dal quale è stato lanciato. Per esempio, se un proiettile atterra a un livello più alto, l'angolo di lancio che fornisce la massima gittata è maggiore di 45°, e se atterra a un livello più basso, l'angolo per la massima gittata è minore di 45°.
- Infine, la gittata discussa qui è valida solo nel caso ideale di assenza di resistenza dell'aria. Nei casi in cui la resistenza dell'aria è significativa, come nel volo di una palla da golf che si muove rapidamente, occorre un angolo di lancio minore di 45°. La ragione di ciò è che con un angolo di lancio minore la palla da golf rimane meno tempo in aria, dando alla resistenza dell'aria meno tempo per agire sul volo.

Gittata e angolo di lancio

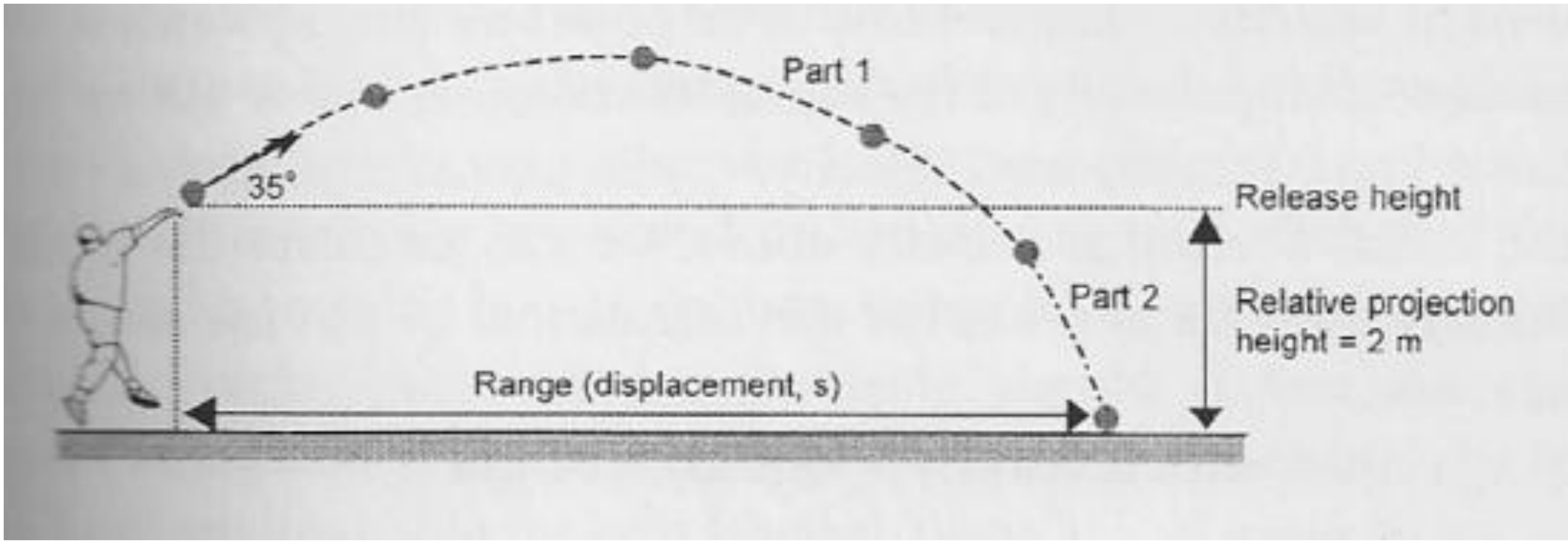
- La gittata massima di un proiettile dipende dall'angolo di proiezione. Con angoli maggiori (90° e 70°) l'oggetto raggiunge una elevata altezza verticale e una gittata minima; con angoli molto bassi (<30°) l'oggetto non ha una sufficiente velocità verticale per raggiungere gittate significative; a 45° con una uguale componente verticale e orizzontale della velocità, si ha la massima gittata.

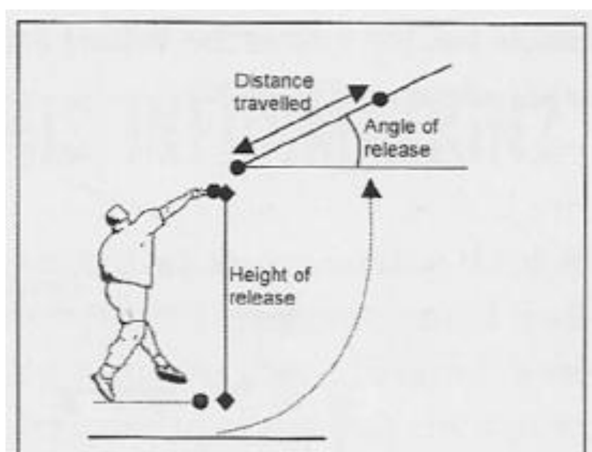


Gittata, altezza di rilascio e angolo di proiezione



Gittata e altezza di rilascio





- A questo punto possiamo verificare la **simmetria** sul tempo di volo precedentemente osservata.
- Nel punto più alto della sua traiettoria, il proiettile si muove orizzontalmente, perciò la componente y della velocità è zero. Troviamo l'istante in cui $v_y = 0$ e compariamolo con il tempo di atterraggio.

$$v_y = v_{iy} - gt = v_i \sin\theta - gt = 0$$

$$t = \frac{v_i}{g} \sin\theta$$

- Quindi il tempo che occorre al proiettile per raggiungere il suo punto più alto (in assenza di resistenza dell'aria) è la metà del tempo che occorre al proiettile per toccare terra.

L’obiettivo dell’atleta può essere rivolto a:

- Tempo di volo: massimizzare (ginnasti e tuffatori; angolo di proiezione < 45°) o minimizzare (pallavolo)
- Altezza del picco raggiunto (es. salto in alto; angolo di proiezione > 45°)
- Gittata (es. lanci)

Es. pallavolo

Palleggio

Un giocatore di pallavolo alza la palla allo schiacciatore. Quando la palla lascia le dita dell'alzatore, è alta 2 m e ha una velocità verticale di 5m/s verso l'alto. Quanto andrà in alto la palla?

soluzione

Primo passo: identificare quantità note e quantità che possono essere dedotte

$$Y_i=2m \quad V_i=5m/s \quad V_f=V_{picco}=0$$

Secondo passo: identificare l'incognita

$$H=Y_f=?$$

Terzo passo: identificare le equazioni appropriate che contenga quantità note e incognita

$$V_f^2= V_i^2-2g\Delta Y$$

Quarto passo: sostituire i valori e stimare l'incognita

$$0=(5m/s)^2-2*(9.81m/s^2)\ \Delta Y$$

$$\Delta Y=(5m/s)^2/[2*(9.81m/s^2)]=1.27m$$

$$\Delta Y=Y_f-Y_i=1.27m$$

$$Y_f=h=2m+1.27m=3.27m$$

Es. calcio di punizione

Un giocatore di calcio tira una punizione. Il pallone lascia il piede con una velocità verticale di 20m/s e una velocità orizzontale di 15 m/s. Quanto vale il tempo di volo del pallone? (Ipotizzare che la resistenza dell'aria non abbia effetto e che l'altezza all'atterraggio sia uguale a quella del rilascio quindi il tempo di salita è uguale al tempo di discesa)

soluzione

Primo passo: identificare quantità note e quantità che possono essere dedotte

$Yi=Yf$ $\quad Vy=20m/s$ $\quad Vx=15m/s$ $\quad V_{picco}=0$ $\quad \Delta t_{salita} = \Delta t_{discesa}$

Secondo passo: identificare l'incognita $\Delta t=?$

Terzo passo: identificare le equazioni appropriate che contengano quantità note e incognita

$Vf= Vi-g\Delta t$ $\qquad \Delta t=\Delta t_{salita} + \Delta t_{discesa}=2*\Delta t_{salita}$

Quarto passo: sostituire i valori e stimare l'incognita

$$Vf= Vi-g\Delta t$$

$$0=20m/s-9.81m/s^2 *\Delta t_{salita}$$

$$\Delta t_{salita} =(-20m/s)/(-9.81m/s^2)=2.04s$$

$$\Delta t \quad =2*2.04s=4.08s$$

Controllo di buon senso: 4 s sembrano un tempo ragionevole per una punizione

Es. Salto in alto

Un'atleta sta effettuando un salto in alto con l'asticella settata a 2.13m. All'istante di stacco la sua velocità verticale è 4.0m/s e il suo centro di gravità è alto 1.25m.

a) Quanto tempo passa dopo lo stacco prima che l'atleta raggiunga il picco in altezza?

b) Quanto vale il picco in altezza?

Soluzione

<u>Primo passo</u>: identificare quantità note e quantità che possono essere dedotte

$$Y_i=1.25m \quad V_i=4.0m/s \quad H_a=2.13m$$

<u>Secondo passo</u>: identificare le incognite

$$\Delta t=? \quad H=Y_f=?$$

<u>Terzo passo</u>: identificare le equazioni appropriate che contengano quantità note e incognita

a) $V_f= V_i-g\Delta t$ b) $Y_f=Y_i+V_i\, \Delta t -1/2*g\Delta t^2$

<u>Quarto passo</u>: sostituire i valori e stimare l'incognita

Da a) $0=4.0m/s-9.81m/s^2*\Delta t \quad \rightarrow \Delta t=0.4s$

Da b) $Y_f=1.25m+4.0m/s*0.4s -1/2*(9.81m/s^2)*(0.4s)^2=$

$=1.25m+1.6m-0.78m=2.07m$

Es. Tiro libero - Basket

Durante un tiro libero, la palla lascia le mani del giocatore con una velocità orizzontale pari a 2.8m/s, una verticale pari a 8.3m/s. Considerando l'altezza della palla al rilascio di 2.35m, l'altezza del canestro di 3.05m e la distanza giocatore canestro di 4.6m, valutare se il pallone finirà nel canestro?

Soluzione

Primo passo: identificare quantità note e quantità che possono essere dedotte

- Considero il sdr come da figura
- Y_0=0m; Y=3.05m-2.35m=0.7m; V_{y0}=8.3m/s; V_{x0}=2.8m/s; X=4.6m

Secondo passo: identificare le equazioni appropriate che contengano quantità note e incognita

a) $X=X_0+V_{0x}*t$ b) $Y=Y_0+V_{0y}t-1/2*g*t^2$

Terzo passo: sostituire i valori

Da a) si stima il tempo t

- 4.6m=0+2.8m/s*t
- t=4.6m /2.8m/s = 1.6s

Dati ed eq.

- Y_0=0m; Y=3.05m-2.35m=0.7m; V_{y0}=8.3m/s; V_{x0}=2.8m/s; X=4.6m
- a) $X=X_0+V_{0x}*t$
- b) $Y=Y_0+V_{0y}t-1/2*g*t^2$

Quarto passo: sostituire i valori

- t=1.6s
- Si sostituisce in b) e si ricava se Y vale l'altezza del canestro:
- $Y_0+V_{0y}t-1/2*g*t^2$=0m+8.3m/s*1.6s-1/2*9.81m/s^2*1.6s^2=13.3m-12.6m=0.7m
- 0.7=Y
- sì la palla entra nel canestro!

Applicazione

100 metri Olimpiadi Pechino 2008

Usain Bolt 9.69s

Quando mancavano 2 secondi e 20m al traguardo ha iniziato a celebrare!

Quale sarebbe stato il record mondiale se non avesse celebrato la vittoria negli ultimi 20 metri?

VELOCITY DISPERSIONS IN A CLUSTER OF STARS: HOW FAST COULD USAIN BOLT HAVE RUN?

H. K. ERIKSEN[1,5,6], J. R. KRISTIANSEN[2,5], Ø. LANGANGEN[3,5] AND I. K. WEHUS[4,7]

(Dated: Received - / Accepted -)
Draft version September 2, 2008

ABSTRACT

Since that very memorable day at the Beijing 2008 Olympics, a big question on every sports commentator's mind has been "What would the 100 meter dash world record have been, had Usain Bolt not celebrated at the end of his race?" Glen Mills, Bolt's coach suggested at a recent press conference that the time could have been 9.52 seconds or better. We revisit this question by measuring Bolt's position as a function of time using footage of the run, and then extrapolate into the last two seconds based on two different assumptions. First, we conservatively assume that Bolt could have maintained Richard Thompson's, the runner-up, acceleration during the end of the race. Second, based on the race development prior to the celebration, we assume that he could also have kept an acceleration of $0.5\ \mathrm{m/s^2}$ higher than Thompson. In these two cases, we find that the new world record would have been 9.61 ± 0.04 and 9.55 ± 0.04 seconds, respectively, where the uncertainties denote 95% statistical errors.

Subject headings: popular science — image analysis — Beijing 2008

TABLE 1
POSITION AS A FUNCTION OF TIME FOR BOLT AND THOMPSON

Uncalibrated elapsed time (s)	**Usain Bolt** Ticks (#)	Distance (m)	**Richard Thompson** Ticks (#)	Distance (m)	Uncertainty (m)	Data set
0.0*	-7.0	0.0	-7.0	0.0	0.0	None
(0.01	-7.0	0.0	-7.0	0.0	0.0	None)†
1.1	-2.0	5.0	-2.1	4.9	0.5	NRK
3.0	15.5	22.5	15.6	22.6	0.5	NRK
4.0	27.0	34.0	27.0	34.0	0.4	NRK
4.5	34.3	41.3	34.1	41.1	0.5	NRK
5.4	45.1	52.1	44.3	51.3	0.5	NBC
5.8	48.9	55.9	48.3	55.3	0.5	BBC
6.2	54.5	61.5	53.8	60.8	0.5	NBC
6.5	57.8	64.8	56.9	63.9	0.4	BBC
6.9	62.6	69.6	61.5	68.5	0.2	NBC
7.3	66.3	73.3	65.1	72.1	0.2	NBC
7.7	71.5	78.5	70.1	77.1	0.2	NBC
8.0	74.7	81.7	72.9	79.9	0.2	NBC
8.3	78.6	85.6	76.8	83.8	0.2	NBC
8.6	82.2	89.2	80.5	87.5	0.2	NBC
8.8	84.3	91.3	82.4	89.4	0.2	NBC
9.4	91.6	98.6	89.4	96.4	0.2	NBC
9.69*	93.0	100.	...	...	0.0	NRK
9.89*	...	...	93.0	100.	0.0	NRK
(13	105	112.	105.	112	5.0	NRK)†

NOTE. — Compilation of distance-vs-time observations for Usain Bolt and Richard Thompson in the 100 meter dash in Beijing 2008, obtained from screen shot prints of the race.

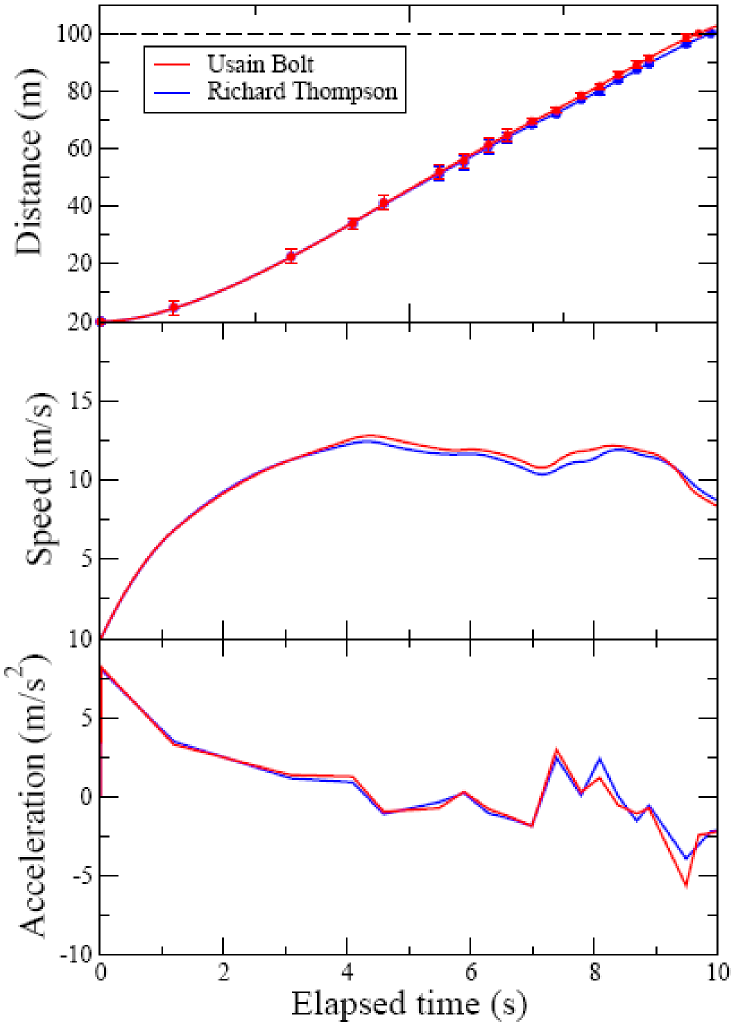


FIG. 2.— Estimated position (top), speed (middle) and acceleration (bottom) for Bolt (red curves) and Thompson (blue curves) as a function of time. Actual distance measurements are indicated in the top panel with 5σ error bars.

Osservazioni sui dati

Fino a 4s: Bolt e Thompson sono virtualmente spalla a spalla (circa 35m)

Da 4s a 8s: Bolt vince sostanzialmente la medaglia in questa frazione di gara

Dopo gli 8s: Bolt decelera notevolmente, Thompson uguaglia fino a superare la velocità di Bolt

Proiezioni:

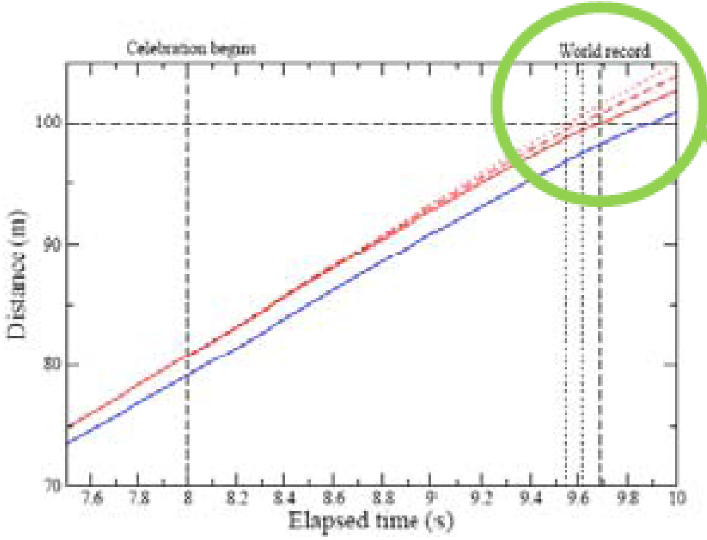
1) Dopo gli 8s, viene utilizzato il profilo di accelerazione di Thompson (9.61±0.04s)

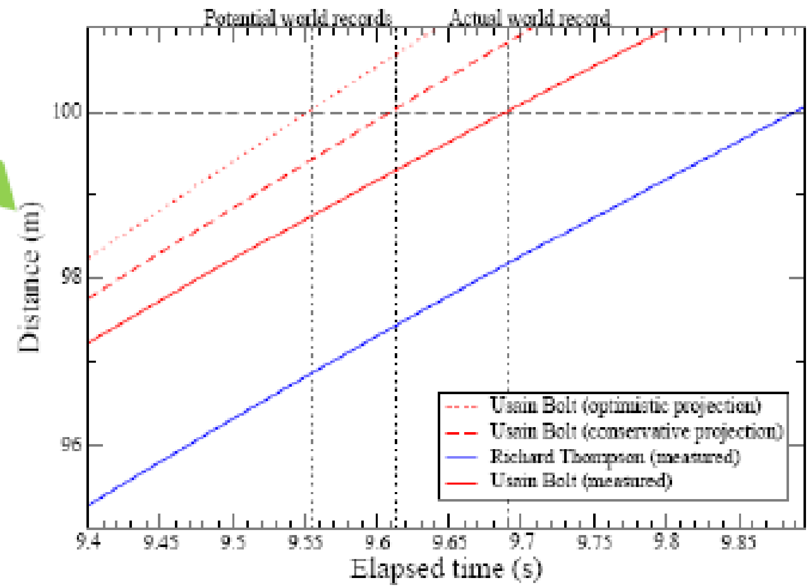
2) Dopo gli 8s, Bolt mantiene un accelerazione maggiore di 0.5m/s² rispetto a Thompson (9.55±0.04s)

3) Glen Mills (allenatore di Bolt) 9.52s!?!

$$\hat{s}(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} \hat{v}(t)dt$$

$$\hat{v}(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} \hat{a}(t)dt$$





Eriksen et al. 2008

Bolt detiene il record dei 100m in 9.69s

Qual è la velocità media del record?

- $V_m = s/t = 100m/9.69s = 10.32$ m/s

Convertiamo la velocità m/s in km/h:

- 10.32m/s x 3.6 = 37.15 km/h

Confrontiamo questo dato con i più veloci animali terrestri

Confronto

Animal	Speed ($m \cdot s^{-1}$)	Speed ($km \cdot h^{-1}$)	Animal	Acceleration ($m \cdot s^{-2}$)
Human[a]	12.1	43.6	Human[b]	3.5
Cheetah	29	104.5	Lion[c]	9.5
Lion	22	80	Gazelle[c]	4.5
Gazelle	22	80		
Hunting dog	20	72		
Ostrich	18	64		
Domestic cat	13	48		
Elephant	11	40		

Analisi biomeccanica: studio della corsa 100m

Disp. (m)	Cumulative time (s)	Time (s)	Average velocity (m/s) 10 m intervals
10	1.66	1.66	6.03
20	2.84	1.18	8.47
30	3.88	1.04	9.62
40	5.00	1.12	8.92
50	5.95	0.95	10.50
60	6.97	1.02	9.80
70	7.93	0.96	10.40
80	8.97	1.04	9.62
90	10.07	1.10	9.09
100	11.09	1.02	9.30

Average horizontal velocity over 100 m = 100/11.09 = 9.01 m/s

Fig. A2.6. Sprint data for university level 100 m athlete

Da Grimshaw et al., 2006 p.15
“colui che rallenta meno, vince la gara di velocità”

Grafico spostamento-tempo

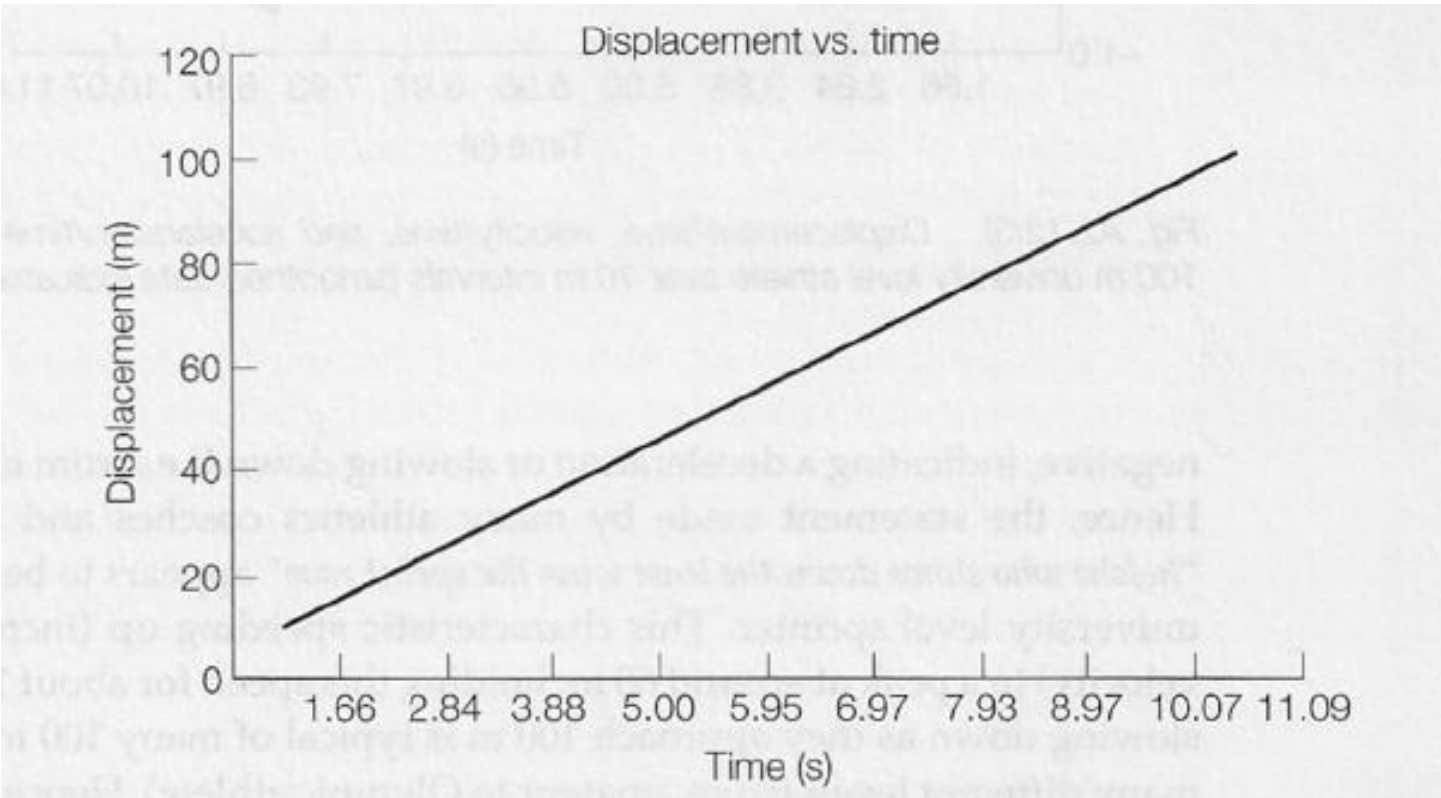
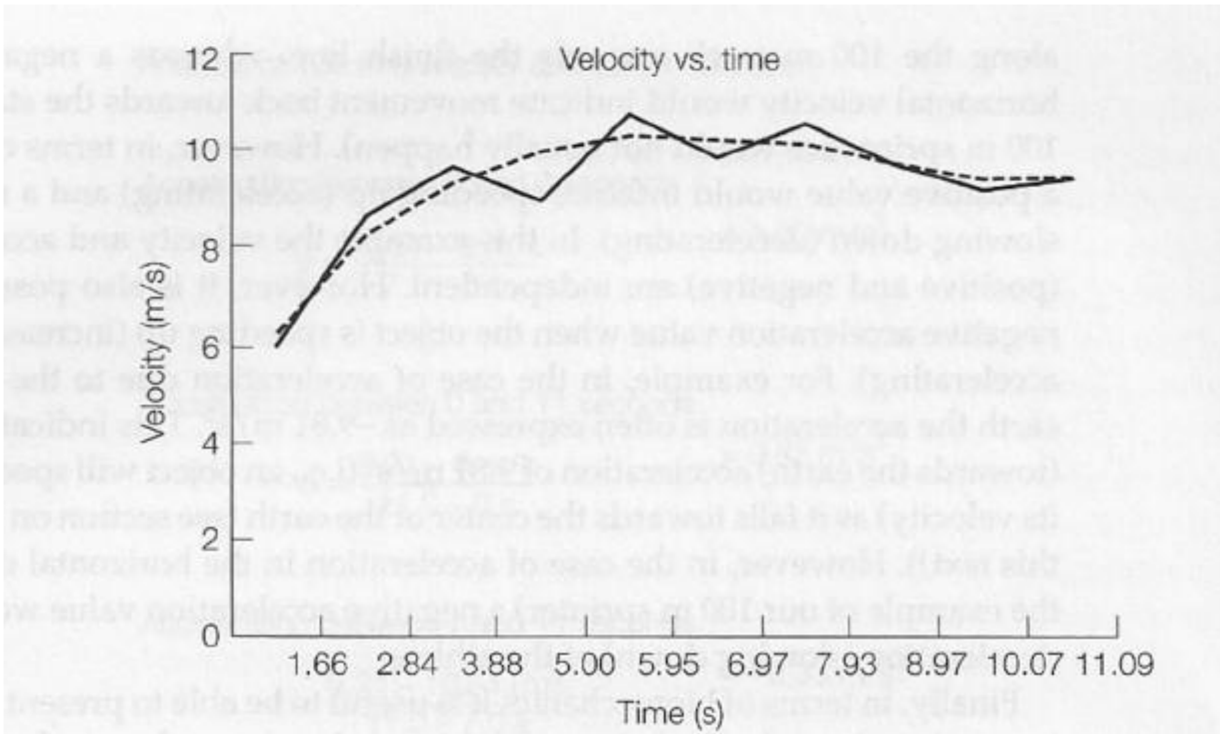


Grafico velocità-tempo

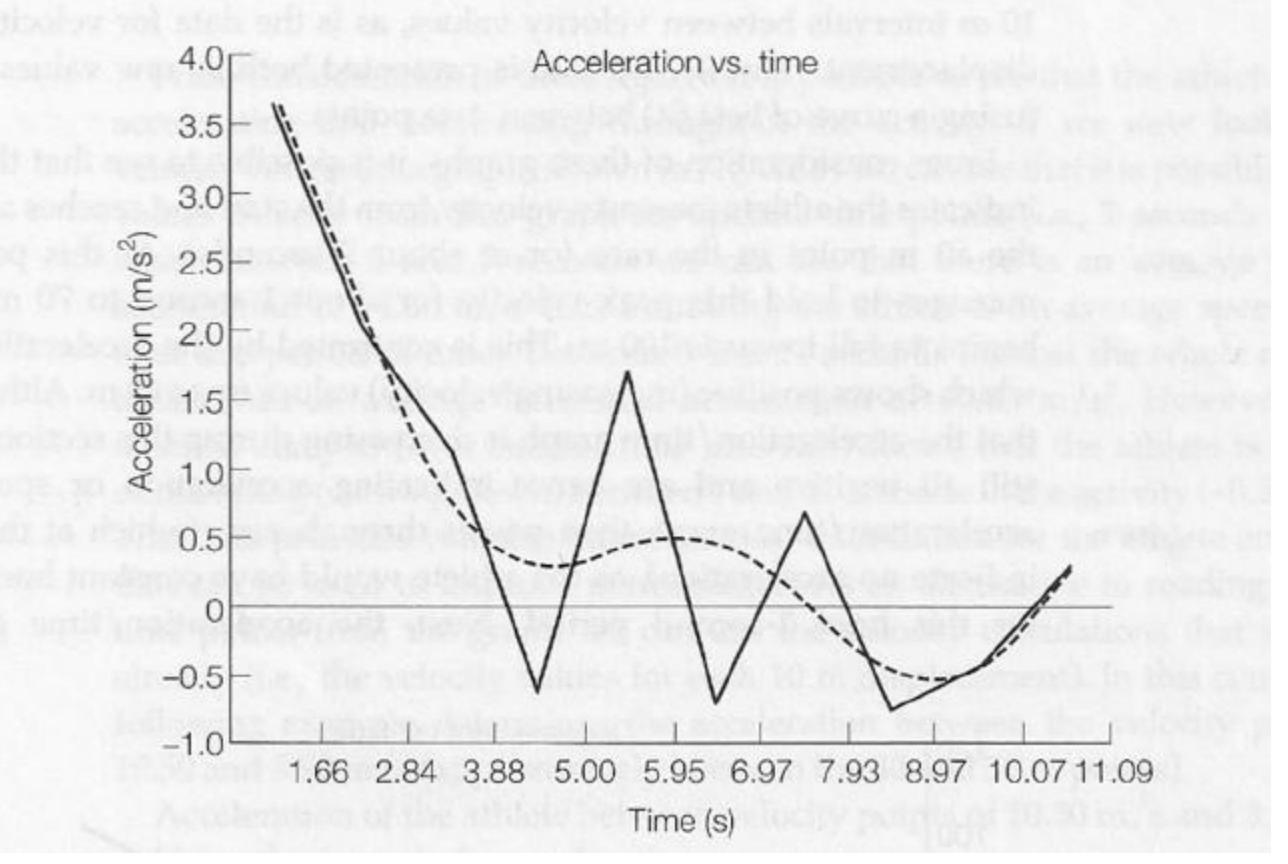


Analisi dati velocità: descrizione biomeccanica della gara

- L'atleta aumenta la velocità dalla partenza e raggiunge il picco intorno i 50 m (circa 6 s), mantiene la velocità per 2 sec fino ai 70 m poi inizia a calare la velocità.

- Questo andamento è confermato dal grafico dell'accelerazione che mostra valori positivi fino ai 7s e poi negativi.

Grafico accelerazione-tempo



Analisi dell'accelerazione

- 0-7 s $a = \dfrac{10.51-0 \ \text{m/s}}{7.0-0 \quad \text{s}} = +1,50 \ \text{m/s}^2$ (il segno + indica che v aumenta)
- 0-11s $a = \dfrac{9.21-0 \ \text{m/s}}{11.0-0 \ \text{s}} = +\ 0.83 \ \text{m/s}^2$
- 7-11s $a = \dfrac{9.21-10.51 \ \text{m/s}}{11.0-7.0 \ \text{s}} = -\ 0,33 \ \text{m/s}^2$ (- indica che v cala)
- $a_m = +\ 0,83 \ \text{m/s}^2$

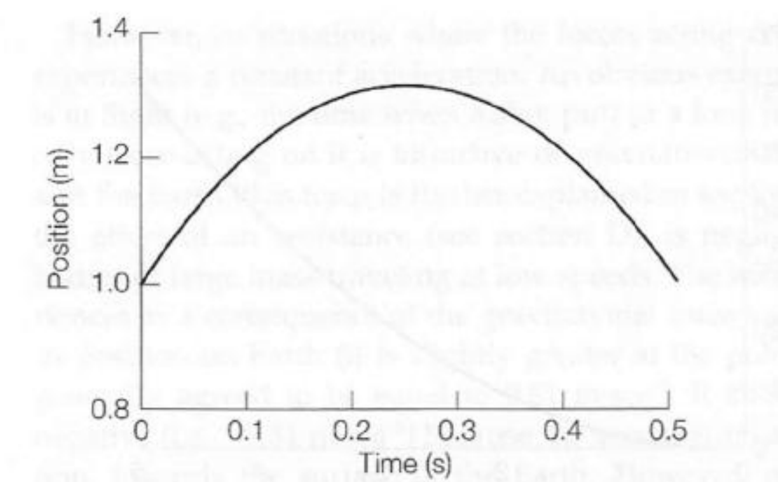
- Durante la gara l'atleta accelera e decelera. Dal grafico della velocità è possibile leggere i dati direttamente per specifici momenti
- Questi dati forniscono informazioni biomeccaniche all'allenatore e all'atleta che possono essere usate per migliorare la performance

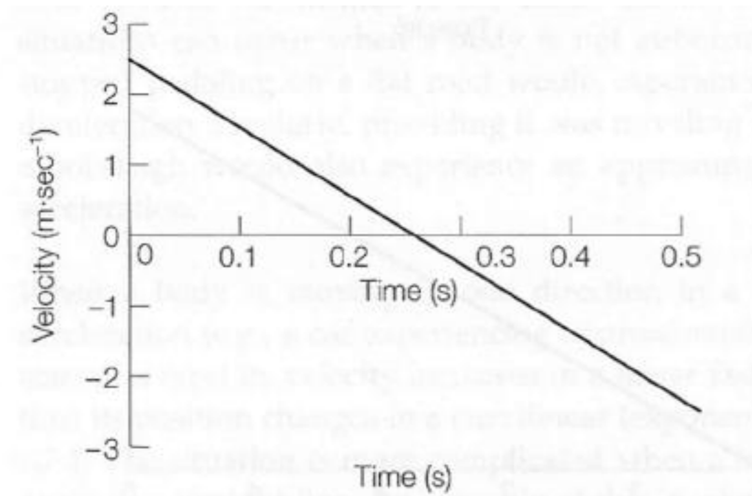
Applicazione: dati 1500m nuoto stile libero

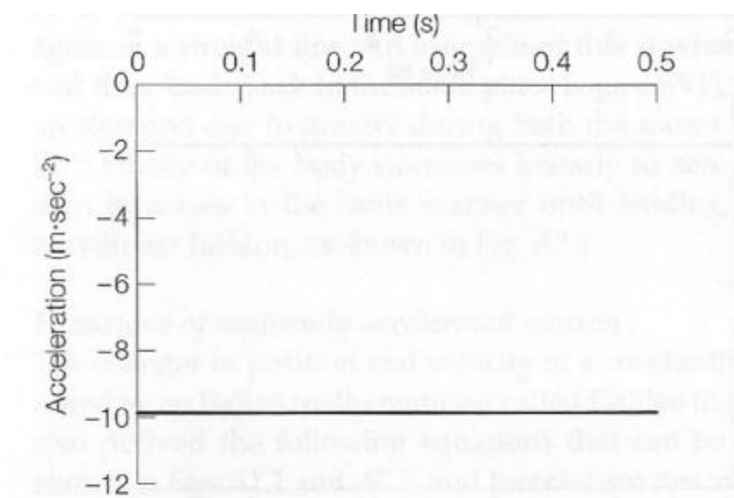
Disp (m)	1994 Perkins	2001 Hackett
100	54.81	54.19
200	1:52.91	1:52.45
300	2:51.48	2:51.29
400	3:50.37	3:50.18
500	4:49.04	4:48.82
600	5:48.51	5:47.45
700	6:47.72	6:45.96
800	7:46.00	7:44.47
900	8:45.28	8:43.05
1000	9:44.94	9:41.78
1100	10:44.63	10:40.56
1200	11:44.50	11:39.51
1300	12:44.70	12:38.51
1400	13:44.44	13:37.89
1500	14:41.66 WR	14:34.56 WR

Es: Fornire un'analisi della gara e calcolare la velocità media e l'acc. media per intervalli di distanza di 100 m.

Salto verticale da fermo







Posizione, velocità e accelerazione del baricentro durante la fase di volo in un salto verticale da fermo.

- Passando dal caso teorico al caso reale, in qualunque tipo di *salto* la prestazione dipende sia dalla velocità allo stacco che dall'angolo che il vettore velocità (applicato nel baricentro del corpo dell'atleta) forma con il piano orizzontale. La parabola teorica, deformata dall'azione frenante dell'aria, sarà più o meno alta o lunga a seconda della combinazione di questi due parametri.

- Nei *lanci* (peso, giavellotto, martello e disco*)* la gittata dipende anche dall'altezza di rilascio dell'attrezzo. Questa a sua volta dipende dalle caratteristiche individuali dell'atleta tecnica personale, statura, ecc).

- Sia nei lanci che nei salti la traiettoria del proiettile dipenderà sempre dalle sue caratteristiche aerodinamiche in relazione agli effetti del moto dei filetti fluidi che si determinano attorno ad esso.

Es. salto in lungo

- Supponiamo che un atleta esegua un salto lungo 8.10 metri staccando da terra con una velocità iniziale di 9.2 m/s. Calcoliamo la differenza tra il salto reale in presenza della resistenza dell'aria e la gittata teorica.

- La massima gittata teorica risulta (per $\theta=45°$):
- $d_{max} = V^2/g = 9.2^2/9.81 = 8.63$ m

La differenza 8.63 - 8.10 = 0.53 m = 53 cm è da mettere in relazione con l'azione frenante esercitata dall'aria sul corpo dell'atleta (attrito del mezzo).

Cinematica angolare

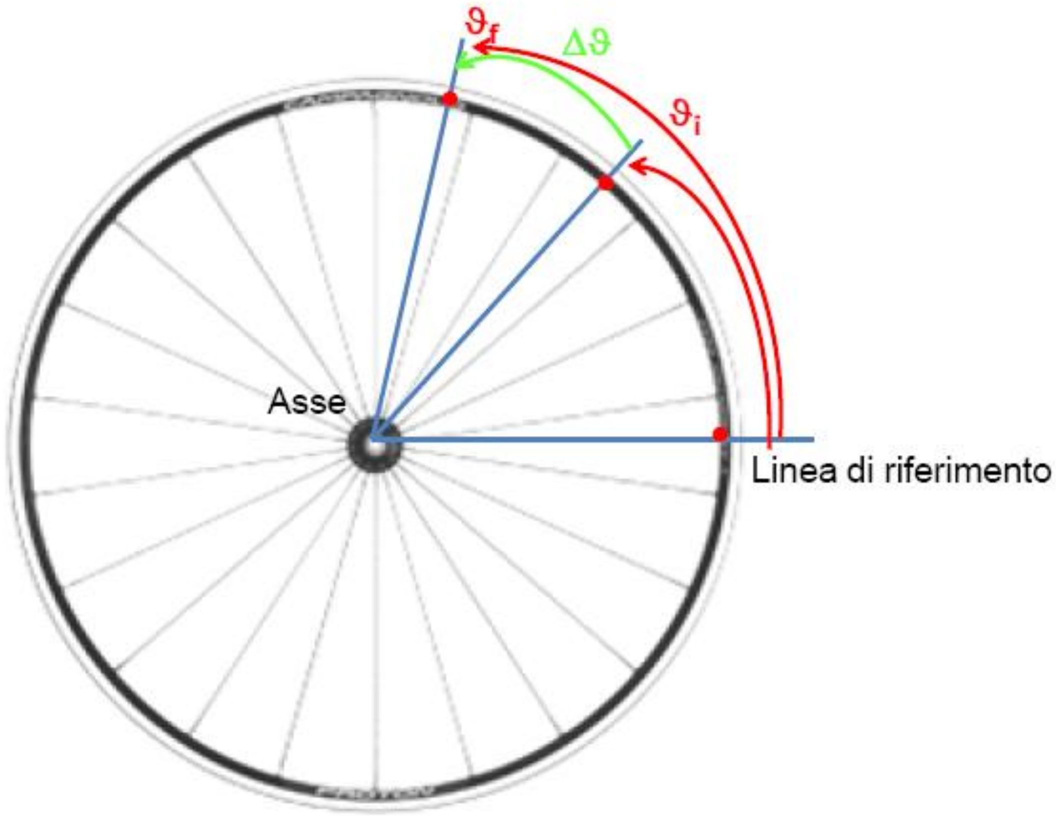
- Per descrivere il moto di un oggetto che si muove lungo una retta, è utile stabilite un sistema di coordinate con un'origine definita e un verso positivo, che ci permette di determinare la posizione dell'oggetto, la sua velocità e la sua accelerazione. In modo simile, per descrivere il moto di rotazione, definiamo delle grandezze "angolari" analoghe alla posizione, alla velocità e all'accelerazione definite per il moto su una retta. La grandezza angolare fondamentale è la posizione angolare.

POSIZIONE ANGOLARE

- Consideriamo una ruota di bicicletta, libera di ruotare attorno al proprio asse. Supponiamo che ci sia un puntino di vernice rossa sulla gomma e che vogliamo descrivere il suo moto di rotazione. La **posizione angolare del puntino è definita come l'angolo θ** , formato da una linea (o più precisamente una semiretta) che va dall'asse al puntino rosso rispetto a una semiretta di riferimento

θ= angolo misurato rispetto alla semiretta di riferimento

Posizione angolare

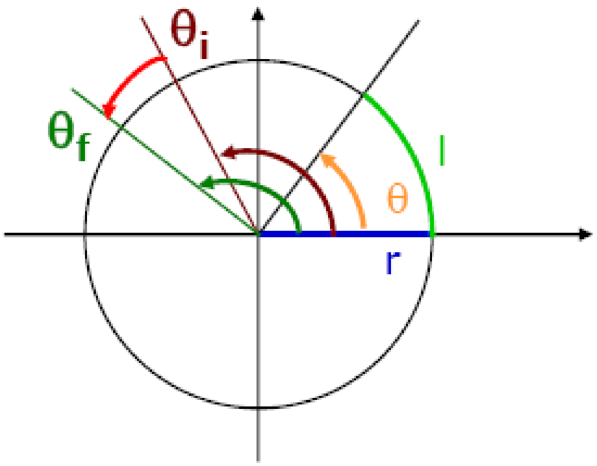


Cinematica angolare

Posizione angolare angolo misurato rispetto alla semiretta di riferimento (definiamo origine e verso). Per convenzione $\theta > 0$ rotazione antioraria rispetto alla linea di riferimento; $\theta < 0$ rotazione oraria rispetto alla linea di rif

Spostamento angolare cambiamento di posizione angolare

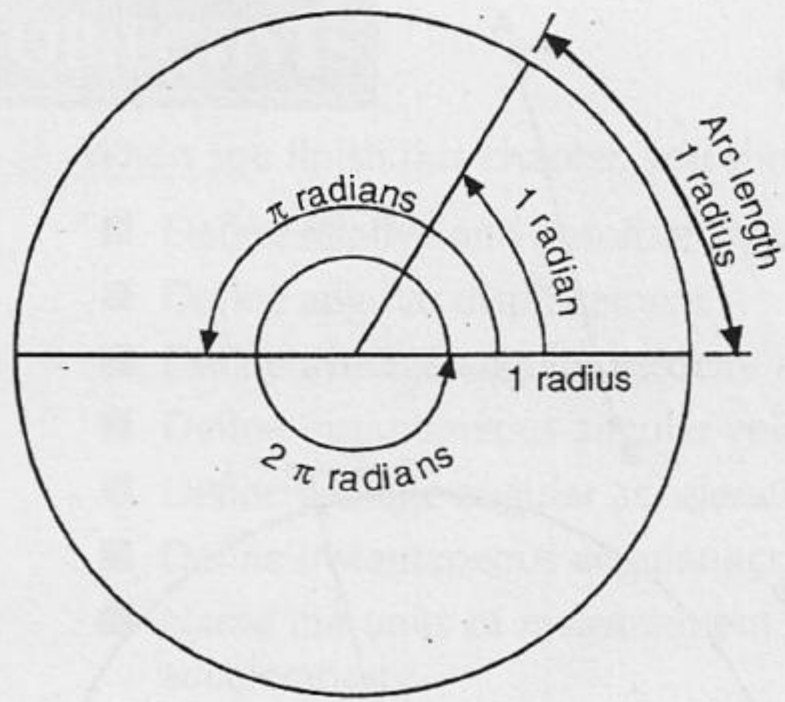
=orientamento finale-orientamento iniziale $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$



θ =1 radiante quando $l = r$

Spostamento angolare e spostamento lineare

$$\Delta\vartheta = \frac{l}{r}$$



Arc length
1 radius
1 radian
π radians
1 radius
2 π radians

- La linea di riferimento definisce semplicemente θ= 0; essa ha la stessa funzione dell’origine in un sistema di coordinate su una retta. La linea di riferimento inizia dall’asse di rotazione e si può scegliere in modo che punti in un verso qualsiasi, proprio come l’origine può essere posizionata in un qualunque punto dell’asse delle coordinate. Una volta scelta, però, deve essere utilizzata in maniera coerente. Osserviamo che il puntino di vernice è ruotato nel **verso antiorario** di un angolo θ. Per convenzione, diciamo che questo **angolo è positivo**. Analogamente, **rotazioni nel verso orario corrispondono ad angoli negativi**. Ora che abbiamo stabilito una linea di riferimento e un verso di rotazione positivo (antiorario), dobbiamo scegliere un’unità di misura nella quale esprimere gli angoli. L’unità di misura più comunemente utilizzata è il grado (°), ma per i calcoli scientifici quella più conveniente è il radiante (**rad**).

Velocità angolare

- Mentre la ruota di bicicletta gira, la posizione angolare del puntino di vernice rossa cambia. Lo spostamento angolare del puntino è: $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$
- Se dividiamo lo spostamento angolare per l'intervallo di tempo Δt durante il quale avviene lo spostamento, otteniamo la **velocità angolare media,** $\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$
- Questa definizione è analoga a quella della velocità media lineare, $v_m = \Delta x / \Delta t$. Osserviamo che le unità di misura della velocità lineare sono m/s, mentre quelle della velocità angolare sono **rad/s.**
- Possiamo poi definire la **velocità angolare istantanea** come il limite di ω_m, quando l'intervallo di tempo Δt si avvicina a zero. La velocità angolare istantanea è quindi:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

- Dalla convenzione sul segno di θ, segue che **$\omega > 0$ per rotazione antiorarie,** ω**< 0 per rotazione orarie**. ω ha natura vettoriale, in analogia con il moto lineare, l'intensità della velocità angolare viene chiamata modulo della velocità angolare. Come semplice applicazione della velocità angolare, rispondiamo al quesito: quanto tempo occorre ad un oggetto, che ruota con velocità angolare ω costante, per effettuare un giro completo? Poiché ω è costante, la velocità angolare istantanea è uguale alla velocità angolare media. Perciò:

$$\omega = \omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

- In un giro sappiamo che $\Delta\theta=2\pi$ e $\Delta t=T$. Pertanto:
- $\omega= 2\pi/T$
- Il tempo necessario a fare un ciclo completo viene detto **Periodo**
- $T= 2\pi/\omega$

ACCELERAZIONE ANGOLARE

- Se la velocità angolare della ruota della bicicletta aumenta o diminuisce nel tempo diciamo che la ruota ha un'**accelerazione angolare, α.** L'accelerazione angolare media è uguale al rapporto tra la variazione della velocità angolare Δω, e l'intervallo di tempo Δt in cui essa avviene $\alpha_m = \Delta\omega/\Delta t$
- L'unità di misura di α è **rad/s², ** ma essendo il rad adimensionale si riduce a $1/s^2$.
- L'accelerazione angolare istantanea è il limite di α_m, quando l'intervallo di tempo si avvicina a zero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

- Il segno dell'accelerazione angolare è determinato dal fatto che la variazione della velocità angolare sia positiva o negativa: **se $\omega_f > \omega_i$, α è positiva, se $\omega_f <$ di ω_i, α è negativa.** Pertanto, se ω e α hanno lo stesso segno, il modulo della velocità angolare aumenta; se ω e α hanno segno opposto il modulo diminuisce.

CINEMATICA ROTAZIONALE

- Nella cinematica rotazionale analizzando un sistema con accelerazione angolare costante, poiché α è costante, le accelerazioni media e istantanea sono uguali, quindi:

  $$\alpha = \alpha_m = \Delta\omega/\Delta t$$

- Consideriamo ω_i, la velocità angolare iniziale al tempo $t=0$, e che al tempo successivo t la sua velocità angolare sia ω.

  Sostituendo questi valori nella precedente espressione di α abbiamo:

  $$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_i}{t - 0} = \frac{\omega - \omega_i}{t}$$

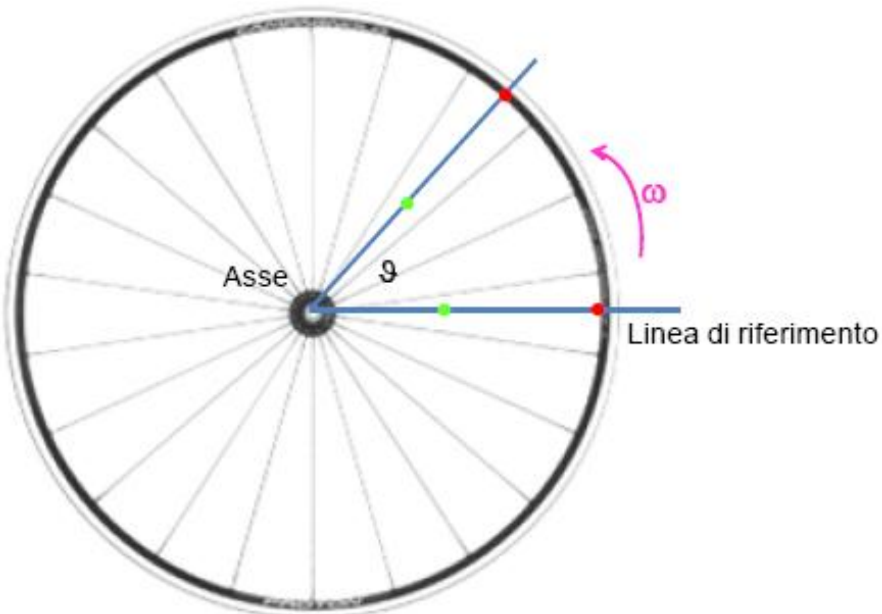
- Da cui si ricava: $\omega = \omega_i + \alpha t$

- Analogia con: $v = v_i + at$

LEGAME GRANDEZZE LINEARI e ANGOLARI

- Supponiamo di considerare il puntino di vernice rossa, consideriamo che la ruota effettui un giro completo ogni 7.50s, e quindi la velocità angolare del punto rosso è

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{7.50s} = 0.838 rad/s$$



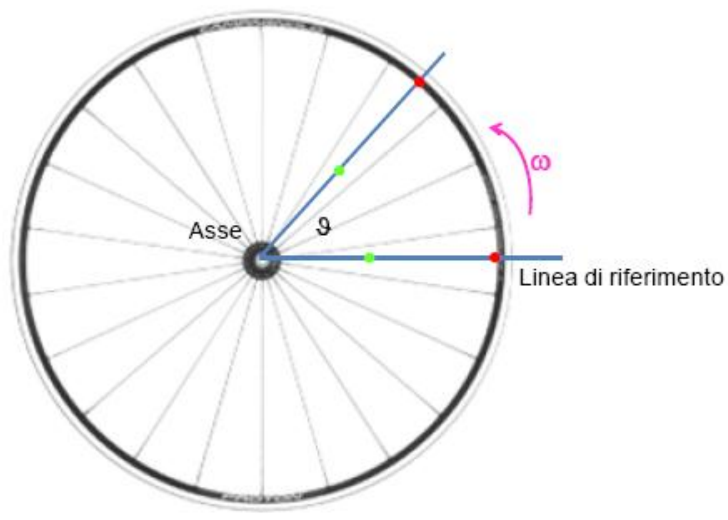
- Il percorso seguito dal punto è circolare, con il centro della circonferenza sull'asse di rotazione della ruota, in ogni istante il punto si muove nella direzione tangenziale al percorso circolare. Per trovare il modulo della velocità tangenziale v_t del punto, dividiamo lo spazio percorso in un giro, $2\pi r$ (dove r è il raggio della circonferenza) per il tempo T impiegato a percorrerlo. Otteniamo:

$$v_t = \frac{2\pi r}{T} = r\frac{2\pi}{T} = r\,\omega$$

- Ricordiamo che ω deve essere espresso in rad/s.

  Se il raggio della bicicletta è di 0.45m, il modulo della velocità tangenziale è di: $v_t = r\,\omega = 0.45m \cdot 0.838\,rad/s = 0.38m/s$

- Consideriamo sempre la solita ruota della bicicletta questa volta con un punto verde che si trova ad una distanza minore dal raggio, l’angolo percorso è in ogni istante lo stesso per i due punti, quindi tutti i punti della ruota hanno esattamente lo stesso modulo della velocità angolare.
- I moduli delle velocità tangenziali cambiano in quanto devono essere moltiplicati per il raggio (la distanza del punto dall’asse di rotazione).



Accelerazione tangenziale e centripeta

- Entrambi i punti risentono di un'**accelerazione tangenziale α_t e di un'accelerazione centripeta α_{cp} .** La prima è causata da una variazione del modulo della velocità tangenziale, mentre la seconda è causata da una variazione della direzione del moto, anche se il modulo della velocità tangenziale rimane costante.
- Quando sono presenti sia l'accelerazione tangenziale sia l'accelerazione centripeta , l'accelerazione totale è il vettore somma. Osserviamo che le due accelerazioni sono perpendicolari l'una all'altra, quindi il modulo dell'accelerazione totale è:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_{CP}^2}$$

accelerazione tangenziale

Richiamiamo il legame fra velocità tangenziale e velocità angolare $v_t=r\omega$. Se ω varia di una quantità Δ ω, con r costante, la corrispondente variazione del modulo della velocità tangenziale è: $\Delta v_t= r\Delta\omega$.

Se questa variazione di ω avviene in un tempo Δt, l'accelerazione tangenziale è:

$$a_t = \frac{\Delta v_t}{\Delta t} = r\,\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

- Ricordando la definizione di accelerazione angolare otteniamo: $\alpha_t = r\alpha$

Accelerazione centripeta

- Per far muovere un oggetto lungo una circonferenza con velocità scalare costante, deve agire su questo una forza diretta verso il centro della circonferenza. Poiché la palla è spinta da una forza diretta verso il centro della circonferenza, essa deve subire un'accelerazione anche essa diretta verso il centro. Ciò può sembrare strano a prima vista: come può una palla che si muove con velocità di modulo costante avere un'accelerazione? La risposta è che si ha un'accelerazione ogni qualvolta il **modulo** della velocità o la **direzione** del vettore velocità cambiano, e **in un moto circolare la direzione cambia continuamente**.
- l'accelerazione è diretta lungo il raggio verso il centro della circonferenza:

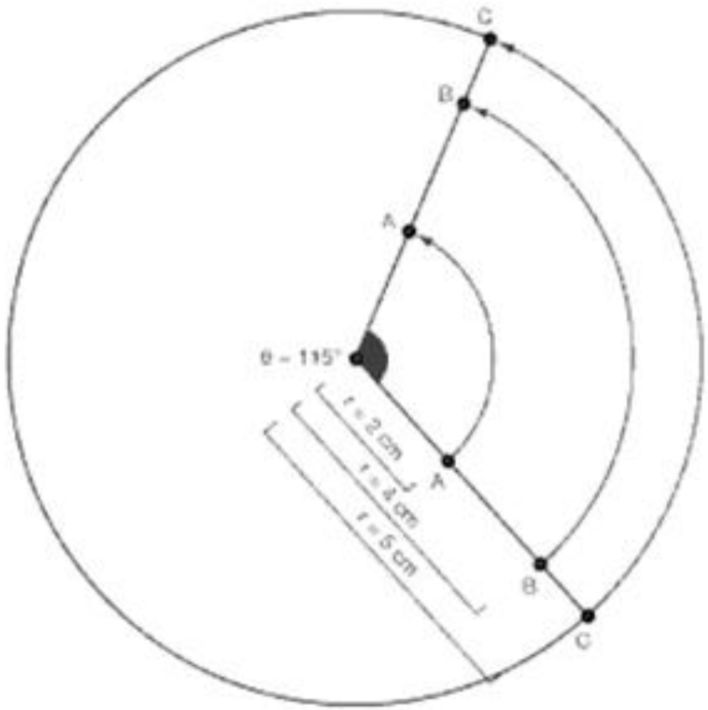
$$a_{CP} = \frac{v^2}{r}$$

- Poiché il modulo della velocità in questa espressione è il modulo della velocità tangenziale, $v_t=r\omega$, l'accelerazione centripeta in funzione di ω è:

$$a_{CP} = \frac{(r\,\omega)^2}{r} = r\omega^2$$

- La velocità angolare è legata alla velocità lineare dalla seguente notevole relazione:
- $V=\omega R$
- dove R rappresenta il raggio o la distanza del punto dal centro di rotazione.
- Dalla relazione $V= \omega R$ risulta che nei moti di rotazione la velocità (V) dei punti del corpo cresce proporzionalmente alla distanza dal centro di rotazione (unico punto a velocità nulla).
- Per quanto riguarda direzione e verso del vettore velocità, in generale occorre ricordare che per qualunque moto curvilineo, la velocità è sempre tangente alla traiettoria

Raggio di rotazione e spostamento curvilineo

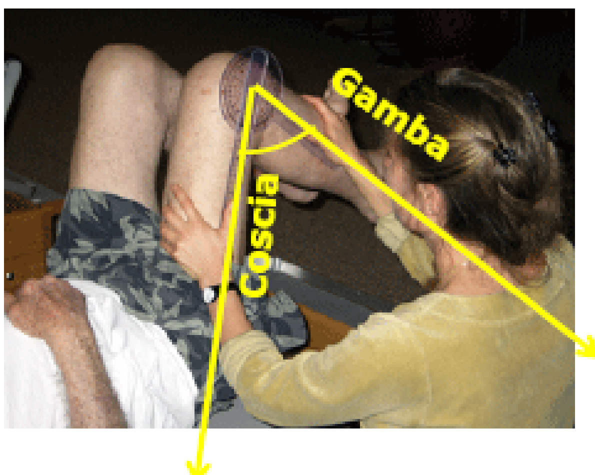


Es.1 Escursione articolare

Un terapista esamina l'escursione articolare del ginocchio di un atleta durante la riabilitazione da un infortunio al ginocchio. A piena estensione, l'angolo fra gamba e coscia è di 178°. A piena flessione, l'angolo fra gamba e coscia è di 82°. Durante il test la coscia è tenuta ferma e solo la gamba si muove.

Quale è lo spostamento angolare della gamba dalla piena estensione alla piena flessione?

Riportare il risultato in gradi e radianti.



Soluzione

$\theta_f = 178°$, $\theta_i = 82°$

$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i = 178° - 82° = 96°$

in radianti

$96°/180° * \pi \text{rad} = 1.67$ rad

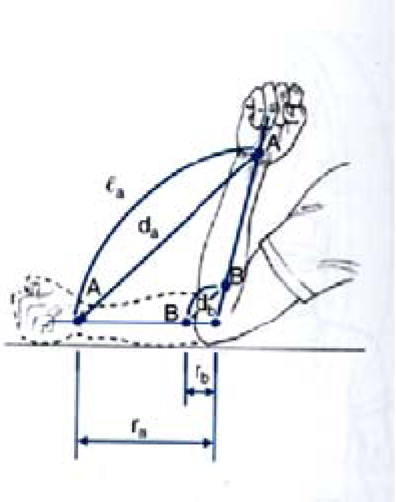
$$\theta_g : \theta_r = 360 : 2\pi \text{ quindi } \theta_r = \theta_g \cdot \frac{\pi}{180}$$

- I muscoli devono produrre forze intense per sollevare carichi modesti. Questo perché i muscoli si attaccano alle ossa vicino alle articolazioni e hanno un corto braccio del momento.

  Quindi i muscoli hanno uno svantaggio meccanico per produrre momenti ma qual è il vantaggio in questa disposizione?
- Un punto del braccio si muove nella flessione in misura dipendente dalla sua distanza dal gomito e la relazione è insita nella definizione della misura dell'angolo in radianti
- $\Delta\theta$= lunghezza arco/r = l /r

Es. 2

Posizionare l’avambraccio sulla scrivania e flettere il gomito portando la mano verso la spalla mantenendo il gomito appoggiato. Tutte le parti dell’avambraccio subiscono lo stesso spostamento angolare, ma chi si è mosso maggiormente, la mano o il punto di inserzione del bicipite?

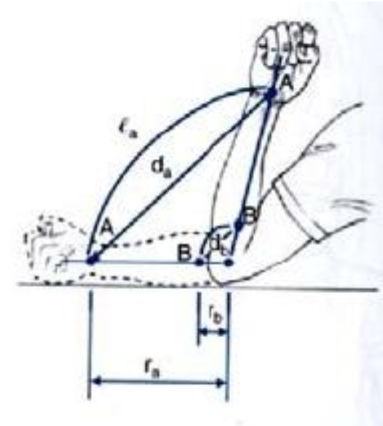


Soluzione

La distanza lineare (ℓ_a) e lo spostamento lineare (d_a) che la mano ha percorso sono maggiori di quelli percorsi dall’inserzione del bicipite (ℓ_b , d_b)

N.B. Il rapporto ℓ_a / ℓ_b e d_a/d_b è lo stesso di r_a/r_b.

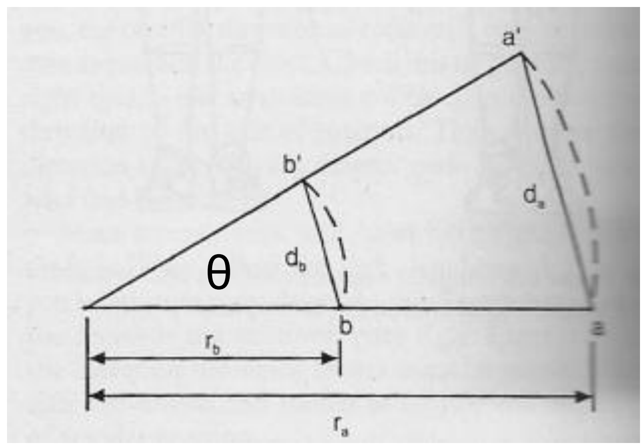
…passiamo ai numeri



Se $\Delta\theta$= 1 rad, r_a=25 cm r_b = 2,5 cm

- $\Delta\theta = \ell / r$
- $\ell_a = \Delta\theta . r_a$ = (1 rad).(25 cm)= 25 cm
- $\ell_a / \ell_b = r_a / r_b$
- $\ell_b = \ell_a (r_b / r_a)$ = 25cm (2,5cm/25cm) = 2,5 cm
- Quindi la mano si muove 10 volte rispetto all'inserzione del bicipite
- La distanza lineare ℓ (lunghezza dell'arco) percorsa da un punto su un oggetto che ruota è direttamente proporzionale allo spostamento angolare dell'oggetto e al raggio, cioè alla sua distanza dall'asse di rotazione

- Se lo spostamento angolare è misurato in radianti, la distanza lineare percorsa (ℓ) è uguale al prodotto di θ (in radianti) per il raggio:
- $\ell = \Delta\theta . r$



- $r_a/r_b=d_a/d_b$

Risposta

Il vantaggio dell’inserzione muscolare vicino all’articolazione è chiara:

- Il muscolo si contrae e si accorcia di una breve distanza per produrre un ampio movimento alla fine dell’arto.
- Poiché un muscolo può accorciarsi solo al 50% della sua lunghezza a riposo, il movimento dell’articolazione sarebbe ulteriormente limitata se il muscolo si inserisse lontano dall’articolazione
- Questo concetto diventa fondamentale negli sport che usano attrezzi come il golf, tennis, hockey, pesca in cui piccoli movimenti della mano producono ampi spostamenti lineari della mazza, racchetta, canna.

Es. 3

Le mani di un golfista si muovono di un arco lungo 10 cm durante un putt.

Quale lunghezza dell'arco descrive la testa del putter se le mani distano 50 cm dall'asse di rotazione e la testa del putter dista 150 cm dall'asse di rotazione?

Passo 1: identificare le grandezze note e le relazioni

ℓ_m = 10 cm r_m = 50 cm r_p = 150 cm

Mani, braccia e putter si muovono insieme così $\Delta\theta_m = \Delta\theta_p$

Passo 2: identificare la grandezza incognita: ℓ_p

Passo 3: identificare le equazioni appropriate: $\ell = \Delta\theta . r$

- $\Delta\theta = \ell / r = \Delta\theta_m = \Delta\theta_p$
- $\ell_m / r_m = = \ell_p / r_p$

Passo 4: sostituire i valori e stimare l'incognita

- 10cm : 50 cm = ℓ_p : 150cm
- ℓ_p = 150 cm . 10 cm /50 cm = 30 cm

<u>Controllo di buon senso</u>: la testa del putter si muove di più delle mani e i 30 cm trovati sono un movimento ragionevole per la testa del putter

Velocità angolare

Velocità angolare

$$\omega_m = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_i}{\Delta t} \qquad \omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}$$

Per convenzione $\omega > 0$ rotazioni antiorarie; $\omega < 0$ rotazioni orarie

se ω costante

$$\omega = \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

Velocità angolare e velocità lineare

$$\boxed{v_T = \frac{2\pi r}{T} = \omega r}$$

v_T è la velocità istantanea tangente al percorso circolare del punto
ω è la velocità angolare istantanea (misurata in radianti al secondo)
r è il raggio

Es. Baseball

Il punto di battuta su una mazza da baseball dista 120 cm dall'asse di rotazione. Se questo punto si muove di 40 m/s qual è la velocità angolare della mazza?

Soluzione

1) Rm = 120 cm =1,2 m V m = 40 m/s

2) ω=?

3) $v = \omega r$

4) $40 m/s = \omega(1,2 m)$

$\omega = 40 m/s / 1,2 m = 33,3 rad/s$

Controllo di buon senso:

33,3 rad/s equivale circa a 5 giri /s

33x 57° =1881°:360° = 5 giri

Sembra veloce, ma lo è anche 40 m/s (144km/h).

Accelerazione angolare

Accelerazione angolare

Se la velocità angolare aumenta o diminuisce nel tempo abbiamo acc. ang.

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{\Delta t} \qquad \alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Relazione fra grandezze lineari e angolari

accelerazione tangenziale

$$\boxed{a_T = \alpha r}$$

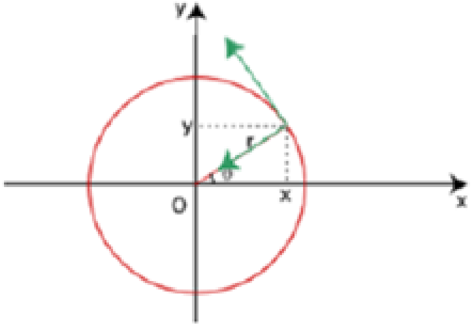
Causata dalla variazione del modulo della velocità

accelerazione centripeta

$$\boxed{a_r = \omega^2 r}$$

Causata dalla variazione della direzione della velocità

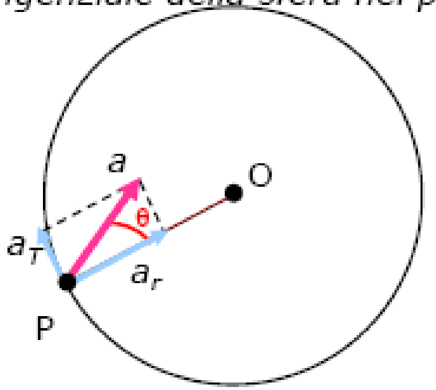
v_T è la velocità istantanea tangente al percorso circolare del punto
ω è la velocità angolare istantanea (misurata in radianti al secondo)
r è il raggio
α è l'accelerazione istantanea angolare (misurata in radianti/s^2)



$$\boxed{a = \sqrt{a_r^2 + a_T^2}}$$

Es.1: Lancio del martello

La sfera metallica, assimilabile a un punto, legata al cavo di acciaio nel lancio del martello si muove su di una circonferenza di raggio R=1,5m. Nella posizione P il vettore accelerazione, ha modulo a=15 m/s² e forma un angolo θ=30° con la direzione radiale. Determinare i moduli a_T e a_r delle componenti tangenziale e centripeta del vettore accelerazione e il modulo della velocità tangenziale della sfera nel punto P.



Il vettore **a** è il risultante di due vettori (accelerazione tangenziale e centripeta), scomponendo l'accelerazione nelle due componenti:

$$a_T = a \cdot \sin\theta = 15 \cdot \sin 30° = 7{,}5\, m/s^2$$

$$a_r = a \cdot \cos\theta = 15 \cdot \cos 30° = 13{,}0\, m/s^2$$

Ricordando il legame fra accelerazione centripeta e velocità tangenziale

$$a_r = \frac{v_t^2}{R}$$

$$v_t = \sqrt{a_r \cdot R} = \sqrt{13 \cdot 1.5} = 4{,}4 m/s$$

$v_t = \omega . r$ e $a_r = \omega^2 . r$

Es.2: lancio del disco

Un lanciatore del disco parte da fermo e comincia a ruotare con un'accelerazione angolare costante di 2.2 rad/s². A) quanti giri sono necessari perché la velocità angolare del lanciatore del disco raggiunga i 6.3 rad/s? B) quanto tempo ci vuole?

A) Convertiamo la velocità e l'accelerazione da rad/s a giri/s, considerando che un giro equivale a 2π.

$$\omega_f = 6.3/_{2\pi} = 1.0\, giri/s$$

$$\alpha = 2.2/_{2\pi} = 0.35\, giri/s^2$$

In analogia con la cinematica lineare si può dimostrare che esiste la seguente relazione (se l'accelerazione è costante)

$$\omega_f^{\ 2} - \omega_i^2 = 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$$

considerando che la velocità iniziale è nulla e considerando una posizione angolare iniziale nulla

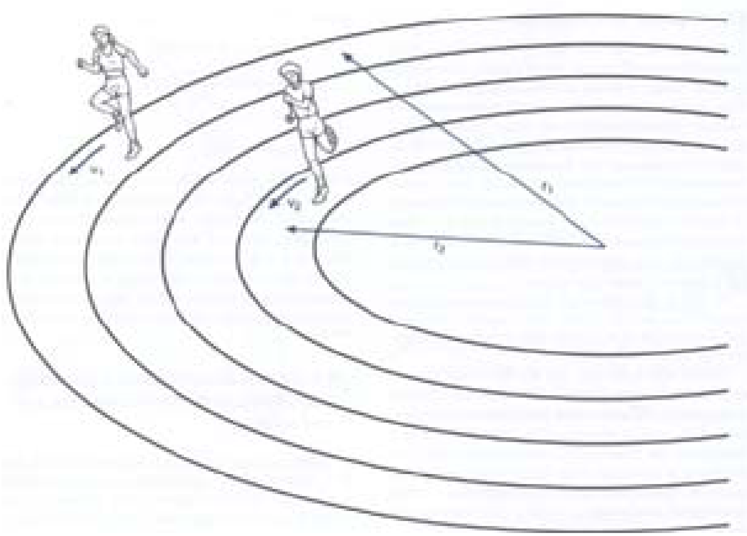
$$\theta_f = \omega_f^{\ 2}/2\alpha = 1.0^2/2 \cdot 0.35 = 1.4 giri$$

B) considerando il legame fra tempo, velocità e accelerazione, e considerando velocità iniziale nulla e istante iniziale nullo

$$t = \omega_f/\alpha = 6.3/2.2 = 2.9s$$

Es.3: corsa

Due atleti, Giulia e Marco, stanno correndo sulla pista di atletica. In curva Giulia (1) corre in una corsia che si trova ad una distanza pari al doppio della corsia di Marco (2) dall'asse di rotazione mantenendo lo stesso spostamento angolare nello stesso intervallo di tempo. Che rapporto c'è fra la velocità angolare di Giulia e quella di Marco? Che rapporto c'è fra la velocità tangenziale di Giulia e quella di Marco?



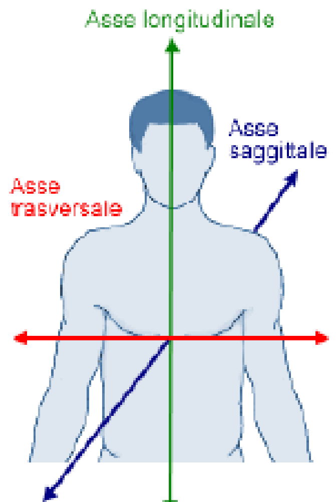
Riguardo alla velocità angolare, poiché $\Delta\theta$ e Δt sono uguali per i due atleti, il modulo della velocità angolare è uguale.

$$\omega_1 = \omega_2$$

Riguardo alla velocità tangenziale, considerando che r_1=2 r_2

$$v_{T1} = r_1\omega_1 = 2r_2\omega_2 = 2v_{T2}$$

Cinematica del corpo umano



Assi anatomici:

gli assi anatomici possono essere paragonati a degli spiedini che passano attraverso il corpo. Essi vengono utilizzati per tracciare l'asse sul quale si svolgono i movimenti di rotazione. Un po' come succede per i cardini di una porta. La porta si muove in un piano attorno ad un asse. Il piano (la porta) è determinato dall'orientamento del perno nel cardine (asse).

Assi principali:

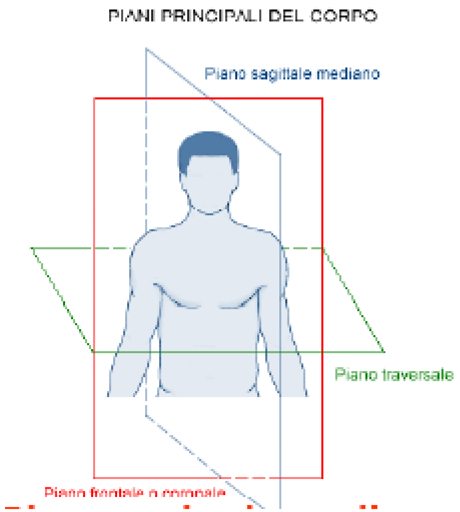
Longitudinale (verticale): Misura la lunghezza del solido umano (altezza o statura) e congiunge il vertice del capo con il suolo fra i due talloni; è perpendicolore alla base di appoggio, quando il corpo è in posizione eretta.

Trasversale (orizzontale): Misura la larghezza del solido umano e viene considerato tra acromion e acromion o fra le creste iliache a seconda che l'uno o l'altro costituiscano il punto di maggior larghezza; è diretto da sinistra a destra ed è perpendicolare all'asse longitudinale.

Sagittale (antero-posteriore): Misura la profondità del solido e congiunge l'apofisi xifoidea con la vertebra direttamente opposta attraversando il solido nella parte, normalmente, più profonda; è diretto dalla superficie posteriore alla superficie anteriore del corpo. Questo asse è perpendicolare agli altri due assi

Piani cardinali

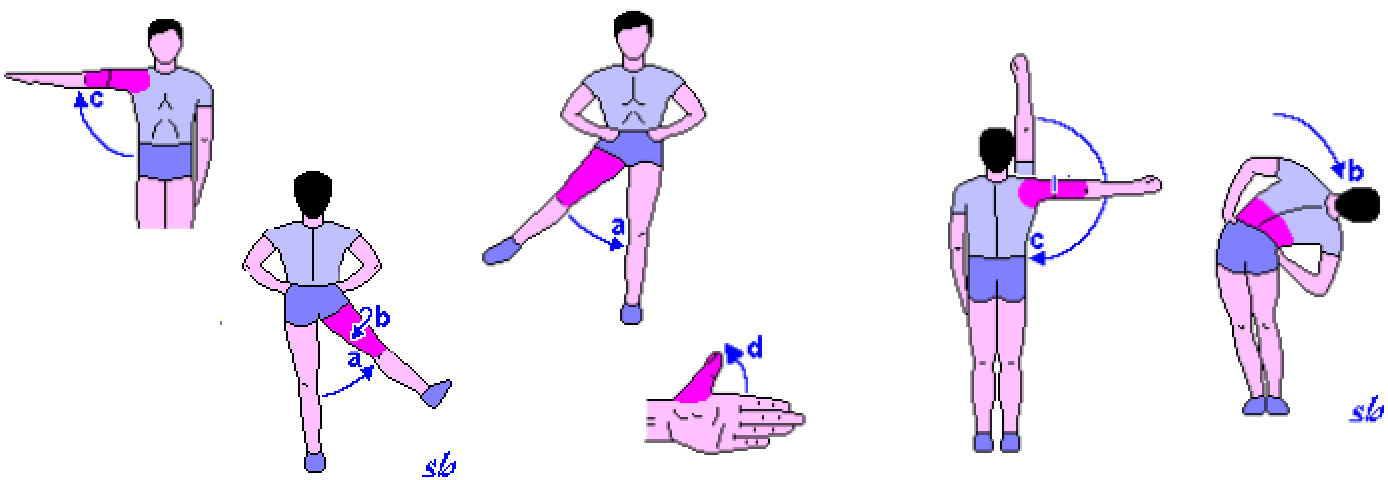
- Piani cardinali = piani immaginari definiti da due assi ortogonali fra loro. Se gli assi forniscono indicazioni sulla direzione del movimento, i piani forniscono informazioni sull’ampiezza dei movimenti stessi.
- **Piano sagittale mediano:** è un piano verticale immaginario che passa attraverso il centro del corpo (definito dagli assi longitudinale e sagittale), dividendolo in due metà (di destra e di sinistra) uguali o antimeri.
- **Piano frontale o coronale:** è un piano verticale parallelo alla fronte e perpendicolare al piano mediano (definito dagli assi trasversale e longitudinale). Divide il corpo in parte anteriore e parte posteriore.
- **Piano orizzontale o trasversale:** è un piano che divide il corpo in due metà superiore e inferiore.



Movimenti nel piano frontale

Adduzione - Abduzione

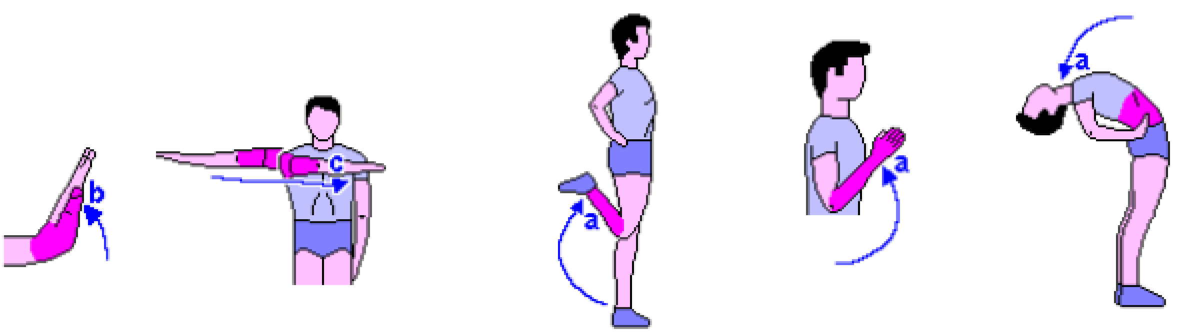
I movimenti eseguiti sul piano frontale si definiscono di **abduzione** (quando un arto si allontana dal piano sagittale del corpo) e di **adduzione** (quando un arto si avvicina al piano sagittale del corpo).



Movimenti nel piano sagittale

Flessione - Estensione

I movimenti eseguiti sul piano sagittale si definiscono di **flessione** (quando un arto si avvicina al tronco–piano frontale-) e di **estensione** (quando l'arto si allontana dal tronco–piano frontale-).



Movimenti nel piano trasversale

Rotazioni interna e esterna

I movimenti eseguiti sul piano trasversale sono tutti quelli che prevedono una rotazione assiale, quindi **intrarotazione** (quando avviene una rotazione verso l'interno del tronco) **ed extrarotazione** (quando la rotazione avviene vero l'esterno del tronco).