Programma di Matematica a.a. 2018/2019

LIMITI

- Concetto di intorno e di limite di una funzione
- Definizione di limite finito di una funzione in un punto, limite infinito in un punto, limite finito all'infinito e limite infinito all'infinito
- Esempi di funzioni che non ammettono limite in un punto
- Dimostrazione limite fondamentale $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

DERIVATE

- Concetto di derivata e significato geometrico di derivata
- Calcolo dell'equazione della retta tangente e della retta normale al grafico di una funzione continua in un punto
- Derivata di una funzione in un punto, derivata destra e sinistra
- Derivate delle funzioni elementari
- Dimostrazione della derivata della funzione $sinx$
- Derivata di una somma, di un prodotto, di un rapporto e di una funzione di funzione
- Teorema: funzione derivabile → funzione continua
- Differenziale di una funzione e significato geometrico del differenziale

INTEGRALI

- Funzione primitiva
- Integrale indefinito e sue proprietà
- Integrali indefiniti delle funzioni più comuni
- Regole di derivazione delle funzioni composte
- Integrale definito, proprietà dell'integrale definito
- Teorema della media
- Teorema fondamentale del calcolo integrale (Torricelli)
- Formula fondamentale del calcolo integrale
- Calcolo dell'integrale di $\sin^2 x$ e sue applicazioni in fisica

LIMITI

Alcune definizioni preliminari:

- ✓ Intorno completo di un punto → dato un numero reale x_0 si chiama intorno di x_0 un qualunque intervallo aperto $I(x_0)$ contenente x_0:
$$I(x_0) =]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2[$$
con δ_1 e δ_2 numeri reali positivi.

- ✓ Intorno circolare di x_0 → quando $\delta_1 = \delta_2$ il punto x_0 è il punto medio dell'intervallo: $I(x_0) =]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$

- ✓ Intorno destro di x_0 → $I_\delta^+(x_0) =]x_0; x_0 + \delta[$

- ✓ Intorno sinistro di x_0 → $I_\delta^-(x_0) =]x_0 - \delta; x_0[$

Per introdurre il concetto di limite consideriamo un esempio:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x - 2} \qquad con\ D = R - \{2\}$$

In questo caso non esiste il valore della funzione *f(2)* ma si possono attribuire ad *x* valori che si avvicinano sempre di più al punto 2 ottenendo:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	6	3	10
1,5	7	2,6	9,2
1,6	7,2	2,5	9
1,7	7,4	2,2	8,4
1,8	7,6	2,1	8,2
1,9	7,8	2,01	8,02
1,95	7,9	2,001	8,002
1,995	7,99	2,0004	8,0008
1,9991	7,9982	2,00001	8,00002
...	...	...	...

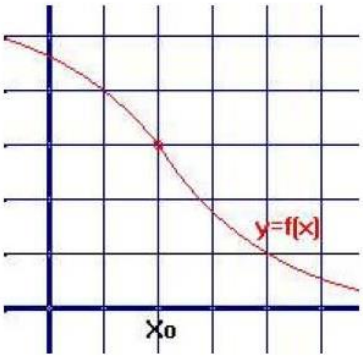
Intuitivamente si capisce che attribuendo ad *x* valori sempre più vicini a 2 la funzione assume valori sempre più vicini a 8.
In matematica, il concetto di limite serve a descrivere l'andamento di una funzione

all'avvicinarsi del suo argomento a un dato valore, oppure al crescere illimitato di tale argomento.

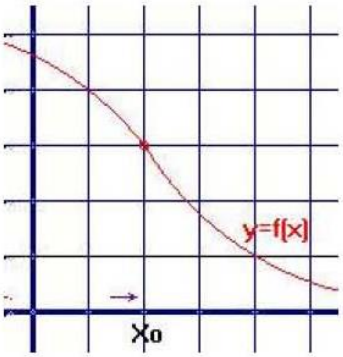
Esistono essenzialmente 4 tipi di limiti che andremo ad illustrare.

1. Limite finito per *x* che tende a un'ascissa finita:

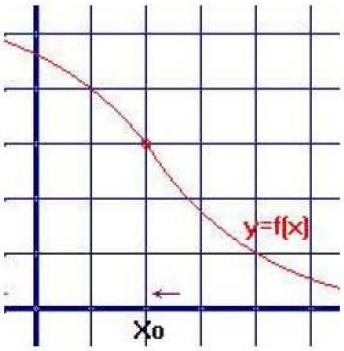
Consideriamo una funzione y = f(x) e sia x_0 un'ascissa fissata (il pallino indica che in quel punto la funzione non è definita)



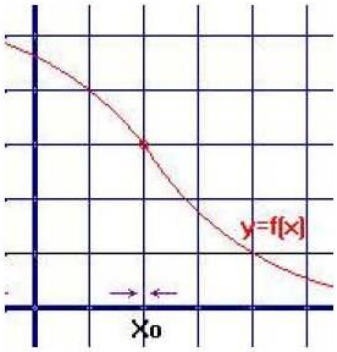
"**Far tendere x a x_0**" significa far assumere a x valori sempre più vicini a x_0.



Possiamo far tendere x a x_0 da sinistra (scriveremo $x \to x_0^-$)



Possiamo far tendere x a x_0 da destra (scriveremo $x \to x_0^+$)



o, ancora, quando non abbia importanza distinguere il caso dal caso , "bilateralmente"

(scriveremo $x \to x_0$)

Mentre si sta facendo tendere x a x_0, interessa stabilire a cosa tende (si avvicina) il valore corrispondente di y. Se accade che quando x è molto prossimo a x_0, l'ordinata corrispondente è molto prossima ad un certo valore l (come nel caso d'esempio, in cui per x prossimo a 2 $f(x)$ è prossima a 8) allora si scriverà:

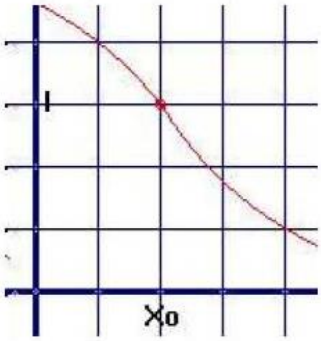
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Che si legge " il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ è uguale a l ".

E' IMPORTANTE PUNTUALIZZARE CHE:

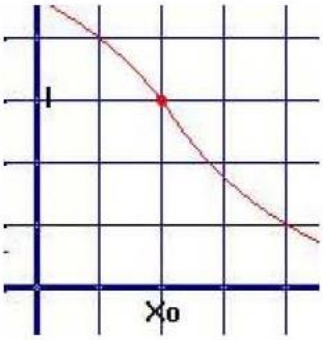
- Quando pensiamo $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non ci interessa minimamente cosa succede per $x = x_0$, anzi, la funzione in $x = x_0$ potrebbe anche non esistere
- E' in esame il comportamento della funzione in **prossimità** di x_0, ma **non** in x_0

Perciò le 3 funzioni seguenti sono perfettamente equivalenti dal punto di vista del limite.



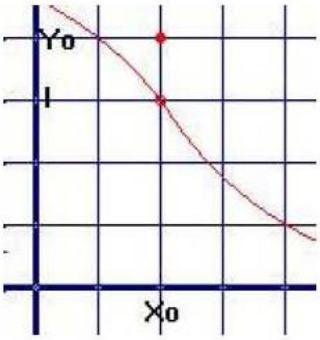
$f_1(x_0)$ NON ESISTE

$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = l$



$\exists f_2(x_0) = l$

$\lim_{x \to x_0} f_2(x) = l$

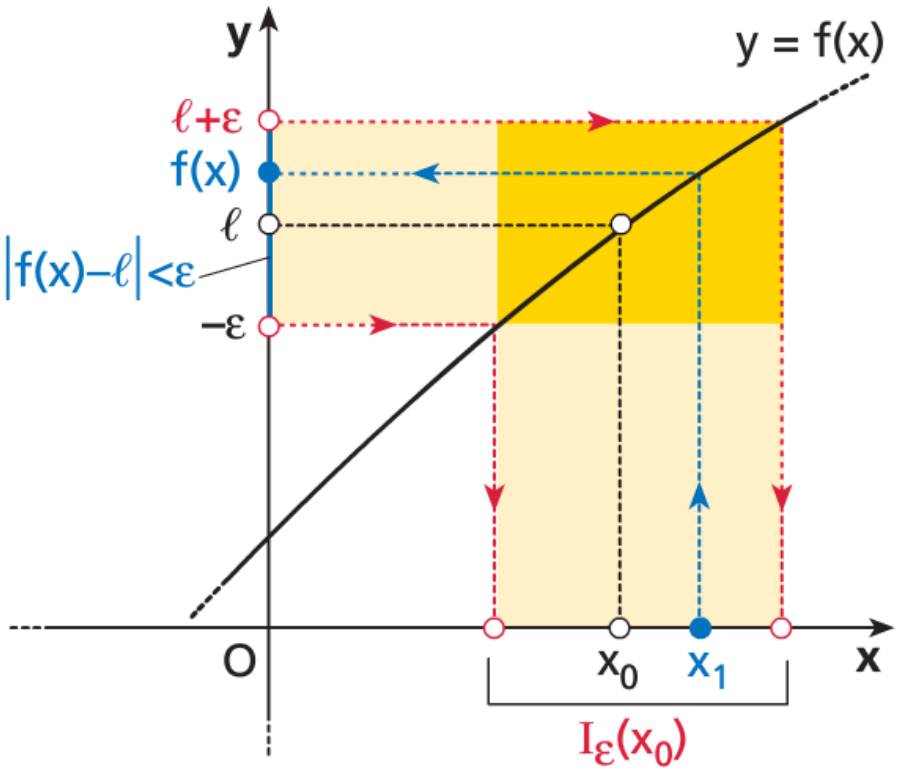


$\exists f_3(x_0) = y_0 \neq l$

$\lim_{x \to x_0} f_3(x) = l$

Non possiamo tuttavia a questo punto pretendere di aver DEFINITO in modo rigoroso cosa si intenda per "limite".

Il formalismo matematico traduce questi concetti nel modo seguente:



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) - \{x_0\}, |f(x) - l| < \varepsilon$$

Si dice che il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ è uguale ad l se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$, dove ε è un numero piccolo a piacere, esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni x appartenente all'intervallo $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, escluso al più x_0, la funzione $f(x)$ appartiene all'intervallo $(l - \varepsilon; l + \varepsilon)$

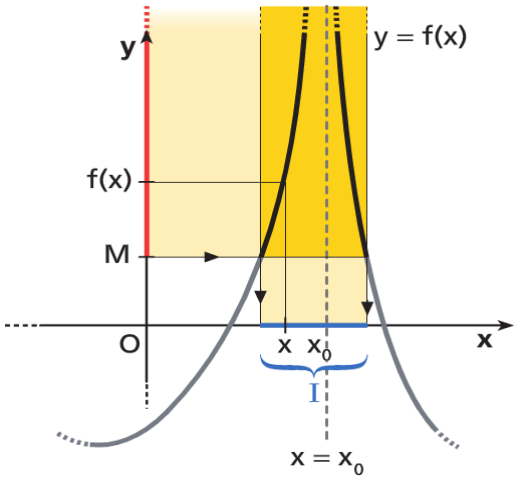
Limite destro

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) - \{x_0\}, |f(x) - l| < \varepsilon$$

Limite sinistro

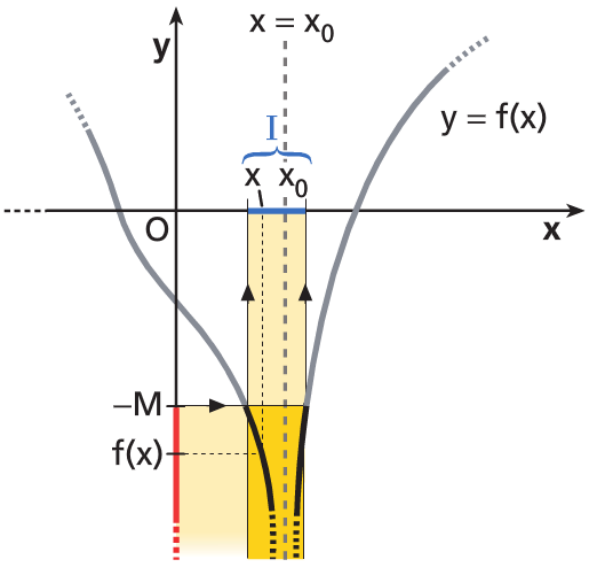
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) - \{x_0\}, |f(x) - l| < \varepsilon$$

2. Limite infinito per x che tende a un'ascissa finita: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \leftrightarrow \forall M > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) - \{x_0\}, f(x) > M$$

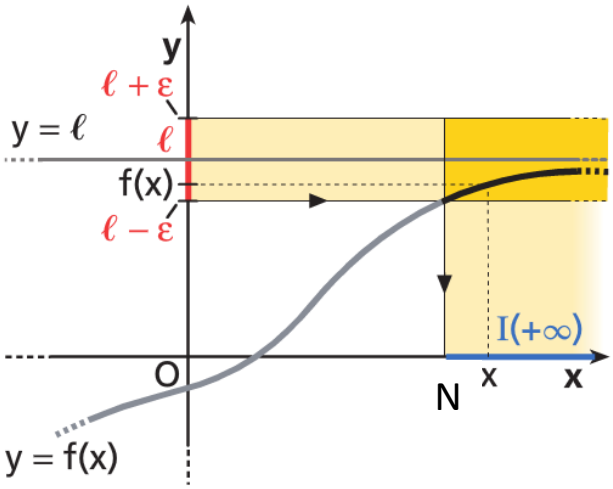
Si dice che il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ tende a $+\infty$ se e solo se per ogni $M > 0$, dove M è un numero grande a piacere, esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni x appartenente all'intervallo $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, escluso al più x_0, la funzione $f(x)$ risulta maggiore di M



Analogamente si dice:

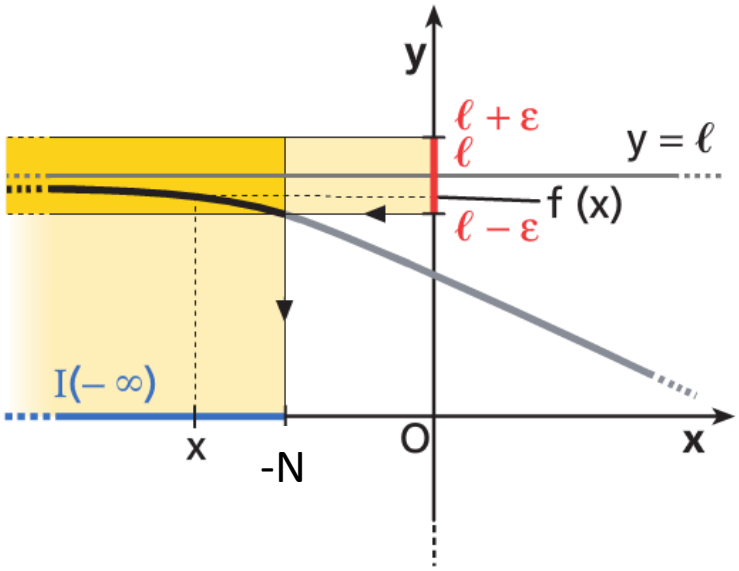
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \leftrightarrow \forall M > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) - \{x_0\}, f(x) < -M$$

3. Limite finito per x che tende ad infinito: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N > 0 \mid \forall x \in (N; +\infty), |f(x) - l| < \varepsilon$$

Si dice che il limite per x che tende a $+\infty$ di $f(x)$ è uguale a l se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$, dove ε è un numero piccolo a piacere, esiste un $N > 0$ tale che per ogni x appartenente all'intervallo $(N; +\infty)$
la funzione $f(x)$ appartiene all'intervallo $(l - \varepsilon; l + \varepsilon)$

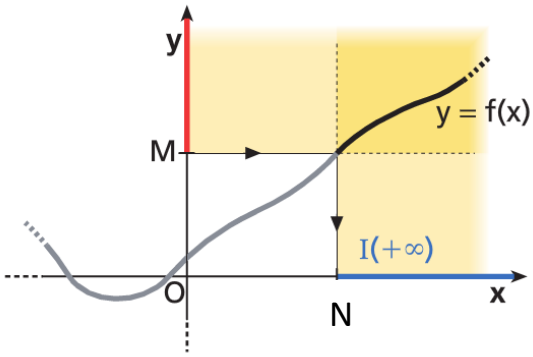


Analogamente si dice:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N > 0 \mid \forall x \in (-\infty; -N), |f(x) - l| < \varepsilon$$

4. Limite infinito per x che tende ad infinito: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

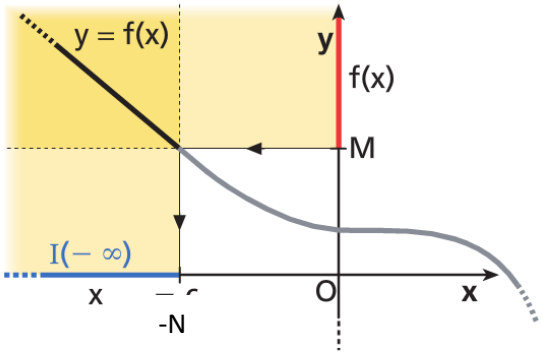
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \leftrightarrow \forall M > 0\ \exists N > 0 \mid \forall x \in (N; +\infty), f(x) > M$$

Si dice che il limite per x che tende a $+\infty$ di $f(x)$ è tende a $+\infty$ se e solo se per ogni $M > 0$, dove M è un numero grande a piacere, esiste un $N > 0$ tale che per ogni x appartenente all'intervallo $(N; +\infty)$ la funzione $f(x)$ appartiene all'intervallo $(M; +\infty)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \leftrightarrow \forall M > 0\ \exists N > 0 \mid \forall x \in (-\infty; -N), f(x) > M$$

Si dice che il limite per x che tende a $-\infty$ di $f(x)$ è tende a $+\infty$ se e solo se per ogni $M > 0$, dove M è un numero grande a piacere, esiste un $N > 0$ tale che per ogni x appartenente all'intervallo $(-\infty; -N)$ la funzione $f(x)$ appartiene all'intervallo $(M; +\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \leftrightarrow \forall M > 0\ \exists N > 0 \mid \forall x \in (N; +\infty), f(x) < -M$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \leftrightarrow \forall M > 0\ \exists N > 0 \mid \forall x \in (-\infty; -N), f(x) < -M$$

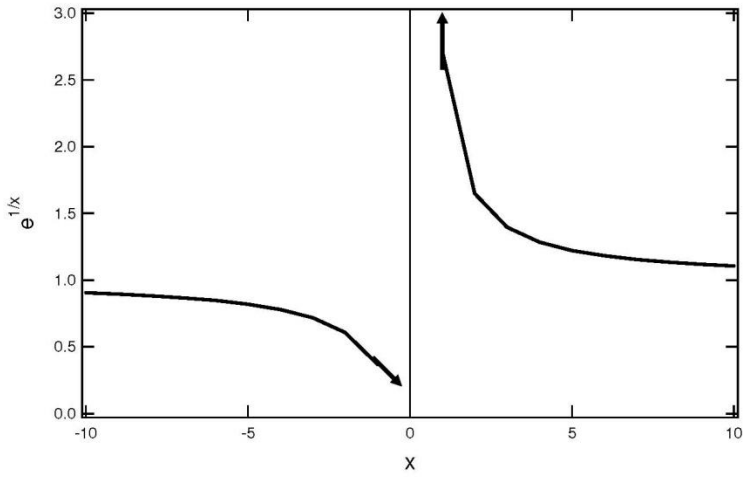
Esempi di funzioni che non ammettono limite:

Una funzione non ammette limite se:

- ✓ esiste il limite destro e limite sinistro della funzione per $x \to x_0$ ma sono diversi tra loro quindi la funzione non ammette il limite per $x \to x_0$

Esempio: $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} e^{1/x} = ?$

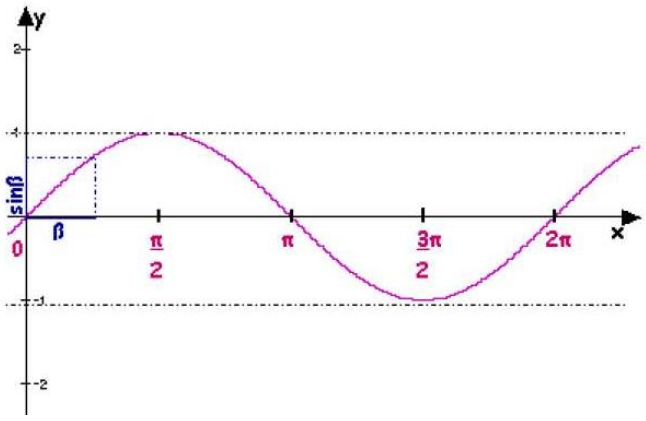
$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0 \qquad\qquad \lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty$$



- ✓ il limite non esiste

Esempio: $f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \sin x = non\ esiste$

La funzione continua ad oscillare tra +1 e -1



Calcolo dei limiti

1) Sfruttando il teorema per cui il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti posso risolvere esercizi del tipo:

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2 - x + 1\right) = 1 - 1 + 1 = 1$$

2) Sfruttando il teorema per cui il limite di un prodotto è uguale al prodotto dei limiti posso risolvere esercizi del tipo:

$$\lim_{x\to 3} x^2\left(1 + x\right) = 9 \cdot 4 = 36$$

3) Sfruttando il teorema per cui il limite di un quoziente è uguale al quoziente dei limiti posso risolvere esercizi del tipo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2 - 3x + 1}{1 - 2x} = 1$$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{x - a} = \infty$$

! Ricorda $\frac{\infty}{0} = \infty, \quad \frac{0}{\infty} = 0, \quad \frac{n}{0} = \infty, \quad \frac{\infty}{n} = \infty, \quad \frac{n}{\infty} = 0, \quad \frac{0}{n} = 0$

Forme indeterminate

Si considerano invece forme indeterminate le forme del tipo:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad +\infty - \infty$$

Ogni volta che il calcolo del limite conduce a una forma indeterminata, si dovrà cercare di trasformare la funzione in modo adeguato, senza ovviamente modificare il limite e allo scopo di rimuovere, nella nuova forma, l'indeterminazione.

Dimostrazione del limite fondamentale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

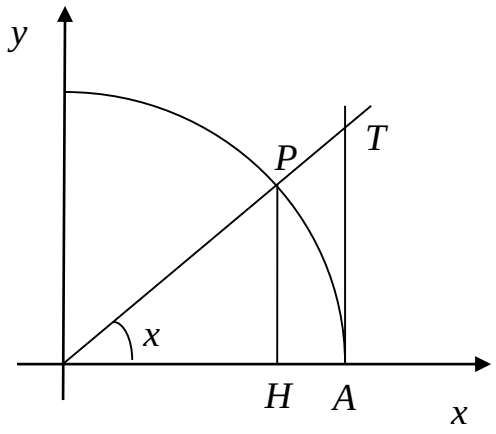
Consideriamo il limite destro $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$ e il limite sinistro $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x}$.

Se $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x}$ allora esiste il limite bilaterale.

Se prendiamo il limite sinistro, poiché la funzione seno è una funzione dispari:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$$

Quindi limite destro e limite sinistro sono uguali. Posso quindi limitarmi a dimostrare il limite destro.
Dimostriamo questo limite in modo geometrico utilizzando la circonferenza goniometrica (r=1) e considerando un angolo x nel primo quadrante: guardando la figura si vede che il segmento $\overline{PH}$ è minore dell'arco $\widehat{PA}$ che è a sua volta minore del segmento $\overline{TA}$.



$$\overline{PH} < \widehat{PA} < \overline{TA}$$

Ma i segmenti $\overline{PH}$ e $\overline{TA}$non sono altro che rispettivamente il seno e la tangente dell'angolo x mentre l'arco $\widehat{PA}$ corrisponde all'angolo x misurato in radianti

$$x_{rad} = \frac{\widehat{PA}}{\overline{OP}} \quad \text{ma } \overline{OP} = 1$$

$$\sin x < x < \tan x$$

Divido tutto per $sin\ x$ che nel primo quadrante è positivo:

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Faccio i reciproci, cambiando il verso della disequazione:

$$\cos x < \frac{sin\ x}{x} < 1$$

Passo ai limiti:

$$\lim_{x\to 0} \cos x < \lim_{x\to 0} \frac{sin\ x}{x} < \lim_{x\to 0} 1$$

$$1 < \lim_{x\to 0} \frac{sin\ x}{x} < 1$$

Quindi $\lim_{x\to 0} \frac{sin\ x}{x} = 1$ poiché compreso tra 1 e 1

Concetto di derivata di una funzione

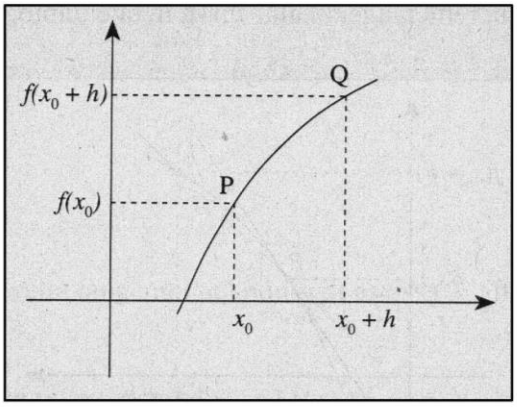
Sia $y=f(x)$ una funzione definita in un intervallo [a,b] e indichiamo con x_0 un punto interno a questo intervallo. Se da x_0 si passa ad un altro punto qualunque x_0+h, dell'intervallo [a,b], si dice che si è dato alla variabile x **l'incremento** (positivo o negativo) h.

La differenza $f(x_0+h)-f(x_0)$, tra i valori che la funzione assume quando la variabile x passa dal valore x_0 al valore x_0+h, si chiama **incremento della funzione** e può avere valore positivo, negativo o nullo.

Il rapporto:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

si chiama **rapporto incrementale** della funzione $f(x)$ relativo al punto x_0 e all'incremento h. Questo rapporto una volta fissato x_0, varia al variare di h, cioè esso è una funzione della variabile h definita per ogni valore di h diverso da 0, purchè, s'intende, il punto x_0+h non esca dall'intervallo [a,b], in cui è definita la $f(x)$.



Si dà a questo punto la seguente definizione:

> Si chiama derivata della funzione f(x) nel punto x_0 il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale al tendere a zero dell'incremento h.

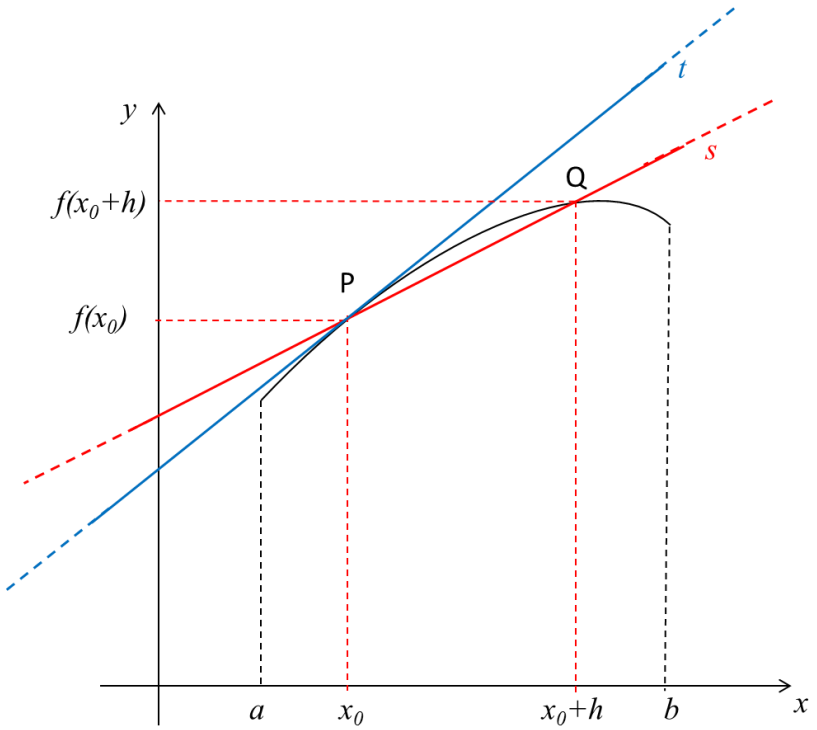
La derivata si indica generalmente con le seguenti notazioni:

$$f'(x_0) \qquad o \qquad y'(x_0)$$

ed è quindi definita dalla relazione:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Significato geometrico della derivata:



Consideriamo una funzione $y = f(x)$ continua in un intervallo $[a, b]$ e considero due punti P e Q interni all'intervallo $[a, b]$. Il punto P ha coordinate $\left(x_0; f(x_0)\right)$, quelle di Q sono $\left(x_0 + h; f(x_0 + h)\right)$.

Se considero la retta s passante per P e Q questa è secante alla funzione e il suo coefficiente angolare è:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Quindi il coefficiente angolare della retta secante è il rapporto incrementale della funzione $f(x)$ relativo al punto x_0 e all'incremento h.

Se ora facciamo il limite per $h \to 0$ graficamente il punto Q va a coincidere con il punto P e la retta secante, passante per P e Q, diventa la retta passante solo per P e quindi tangente alla funzione nel punto P. Se faccio il limite per $h \to 0$ del coefficiente angolare della retta

secante ottengo quindi il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione nel punto P nonché la derivata della funzione nel punto P di coordinate $\left(x_0; f(x_0)\right)$

$$m_{tg} = \lim_{h\to 0} m_{sec} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

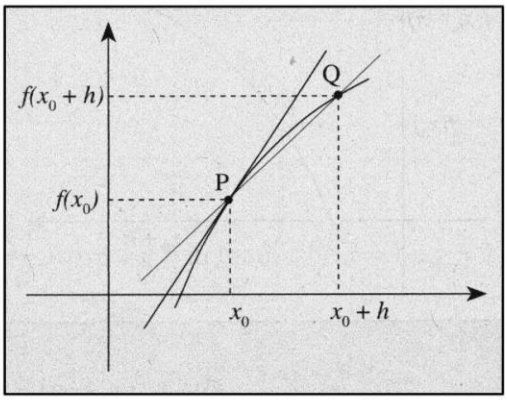
Quindi la derivata di $y = f(x)$ calcolata nel punto x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione nel punto x_0.

Osserviamo che:

a) Se il limite non esiste, si dice che "la f non è derivabile nel punto x"

b) Se il limite esiste, ma è infinito, si dice ancora che "la f non è derivabile in x",

Equazione della tangente a una curva in un punto:



Consideriamo una curva generica ***y=f(x)***. La retta tangente alla curva in un punto P_0 di ascissa x_0 ha come *coefficiente angolare m* la derivata della funzione calcolata nello stesso punto di ascissa x_0, ossia $f'(x_0)$

Quindi possiamo scrivere: $m = f'(x_0)$

L'equazione della *tangente a una curva* ***y=f(x)*** in un punto $P_0(x_0,y_0)$, è data dalla formula *[ottenuta sostituendo al posto di m, $f'(x_0)$]*:

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Equazione della normale a una curva in un punto:

La *retta normale* a una curva in un punto P_0 di ascissa x_0 è la retta perpendicolare alla tangente alla curva in P_0. Ricordando che la condizione di perpendicolarità di due rette è:

$$m' = -\frac{1}{m}$$

si ha che l'equazione della normale a una curva $y=f(x)$ in un punto $P_0(x_0,y_0)$, è data dalla formula:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Un esempio di calcolo della derivata di una funzione

Calcoliamo nel punto $x=3$ la derivata della funzione $f(x) = x^2 - x$.

Si procede prima al calcolo del **rapporto incrementale**:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \frac{[(3 + h)^2 - (3 + h)] - [(3)^2 - (3)]}{h} =$$

$$= \frac{9 + 6h + h^2 - 3 - h - 9 + 3}{h} = \frac{h^2 + 5h}{h} = \frac{h(h + 5)}{h} = h + 5.$$

Si calcola successivamente il limite del **rapporto incrementale** per $h \to 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} (h+5) = 5.$$

Si conclude affermando che la funzione è derivabile per $x=3$ e la derivata in tale punto vale 5.

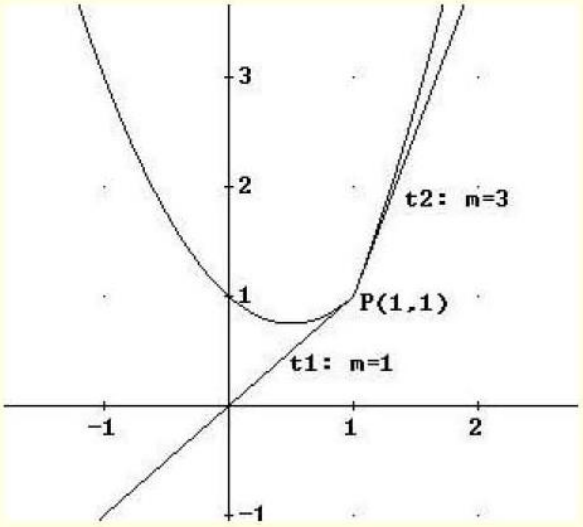
Derivata di una funzione in un punto, derivata destra e sinistra

Consideriamo la funzione

$$y = f(x) = x^2 + |x-1|.$$

Avremo $\begin{cases} con\ x \le 1, & f(x) = x^2 - x + 1 \\ con\ x \ge 1, & f(x) = x^2 + x - 1 \end{cases}$

Il grafico della funzione è costituito da due "archi di parabola che si tengono per mano":



Nel passaggio dalla sinistra alla destra dell'ascissa x=1, cambia l'espressione analitica della funzione:

tale espressione è $x^2 - x + 1$ con $x \le 1$, diventa invece $x^2 + x - 1$ con $x \ge 1$.

Il brusco cambiamento di espressione determina un altrettanto brusco cambiamento nell'inclinazione della curva. Si dice che il punto P, di ascissa 1, è un "punto angoloso".

La curva, per via dell' "angolosità", non ammette retta tangente nel punto P(1,1) in cui si passa da un'espressione all'altra.

Potremmo però dire che, se consideriamo soltanto la parte del grafico che si trova "da P verso sinistra", abbiamo una retta tangente in P con una certa inclinazione; se invece consideriamo soltanto la parte di grafico che va "da P verso destra", avremo UN'ALTRA retta tangente con un'altra inclinazione.

Per questo motivo, nella figura abbiamo preferito disegnare solo due SEMIrette, la semiretta t_1 "tangente in P verso sinistra" e la semiretta t_2 "tangente in P verso destra".

Quali saranno i coefficienti angolari di queste due semirette?

Per rispondere, osserviamo che t_1 può essere pensata come la posizione che una semiretta secante, con origine in P e passante per un altro punto Q del grafico, situato A SINISTRA di P, tende ad assumere quando Q viene fatto tendere a P; e analogamente, t_2 può essere pensata come la posizione limite di una semiretta secante PQ, con Q situato sul grafico, A DESTRA di P, e fatto tendere a P.

E' allora evidente che il coefficiente angolare di t_1 ("semitangente in P verso sinistra"), potrà essere determinato calcolando il

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

mentre il coefficiente angolare di t_2 ("semitangente in P verso destra"), coinciderà col

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Si parla, in casi come questo, di

"rapporto incrementale sinistro" e "derivata sinistra",

"rapporto incrementale destro" e "derivata destra".

In generale:

Sia data una funzione $y = f(x)$, e un punto x_0 nel quale la funzione sia definita e continua.

Si dice "**rapporto incrementale sinistro**" della f(x) in x_0, l'espressione

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$ **con h<0**

Si dice "**rapporto incrementale destro**" della f(x) in x_0, l'espressione

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$ **con h>0**

Se esiste finito il

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

esso viene detto "**derivata sinistra** della f(x) in x_0", e indicato con $f'_-(x_0)$

Se esiste finito il

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

esso viene detto "**derivata destra** della f(x) in x_0", e indicato con $f'_+(x_0)$

E' conseguenza immediata della definizione di "derivata" il teorema seguente:

f(x) è derivabile in x_0 se e solo se ammette, in x_0, tanto la derivata sinistra quanto la derivata destra, e queste sono uguali fra loro:

$$\exists f'(x_0) \quad \leftrightarrow \quad \exists f'_-(x_0) \wedge \exists f'_+(x_0) \wedge f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

- Ritornando ora all'esempio da cui eravamo partiti:

$$f(x) = x^2 + |x-1| = \begin{cases} x^2 - x + 1 & con\ x \le 1 \\ x^2 + x - 1 & con\ x \ge 1 \end{cases}$$

avremo:

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \overset{NOTA\ 1}{=} \lim_{h\to 0-} \frac{\left((1+h)^2 - (1+h) + 1\right) - 1}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h\to 0-} (h+1) = 1$$

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \overset{NOTA\ 2}{=} \lim_{h\to 0+} \frac{\left((1+h)^2 + (1+h) - 1\right) - 1}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h^2 + 3h}{h} = \lim_{h\to 0+} (h+3) = 3$$

NOTA 1 _ Qui per il calcolo di f(1+h) utilizziamo l'espressione x^2-x+1, che vale a sinistra dell'ascissa 1, perché, essendo h negativo, 1+h si trova appunto a sinistra di 1

NOTA 2 _ Qui per il calcolo di f(1+h) utilizziamo l'espressione x^2+x-1, che vale a destra dell'ascissa 1, perché, essendo h positivo, 1+h si trova appunto a destra di 1

DERIVATE DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

Tenendo conto di quanto affermato alla fine del precedente paragrafo, proviamo a calcolare la derivata di alcune funzioni elementari.

Indicheremo con x (invece che con x_0) il punto iniziale e con $x+h$ quello variato (cioè incrementato di h).

1. *La derivata di una costante, **y=K**, vale zero, cioè:* D(k)=0

Infatti è:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

2. *La derivata della funzione **y=x*** vale **1**, cioè: D(x)=1

Infatti:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

3. *La derivata della funzione **$y=x^2$** vale **2x**, cioè:* $D(x^2)=2x$

Infatti:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x.$$

4. *La derivata del prodotto di una costante **k** per una funzione **y=f(x)** è uguale alla costante per la derivata della funzione, cioè:* $\Delta k \cdot f(x) = k \cdot \Delta f(x)$

Infatti: D[kf(x)]=kD[f(x)]

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{k\cdot f(x+h) - k\cdot f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k\cdot[f(x+h)-f(x)]}{h} = k\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = k\cdot \Delta f(x).$$

Dimostrazione del calcolo della derivata della funzione *f(x) = sin x*

Calcoliamo la derivata attraverso il limite per incremento che tende a zero del rapporto incrementale:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=$$

Applico la formula di addizione $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h}=$$

Raccolgo *sin x* a fattor comune e divido il limite nella somma di due limiti:

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\sin h\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\sin h\cos x}{h}=$$

sin x e *cos x* posso portarli fuori dal limite poiché non dipendono da h:

$$=\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=$$

Limite fondamentale uguale ad 1

Risolviamo questo limite:

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=$$

Moltiplico e divido per $\cos h+1$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)(\cos h+1)}{h(\cos h+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos^2 h-1}{h(\cos h+1)}=$$

Per la relazione fondamentale della trigonometria $\cos^2 h-1=-\sin^2 h$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{-\sin h}{h}\right) * \left(\frac{\sin h}{\cos h + 1}\right) =$$

Divido il limite come il prodotto di due limiti:

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{-\sin h}{h}\right) * \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin h}{\cos h + 1}\right) = 0$$

Poiché il primo è il limite fondamentale che vale 1 mentre il secondo se si sostituisce $h = 0$ si ottiene 0.

Quindi riprendendo il limite del rapporto incrementale:

$$= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \sin x * 0 + \cos x * 1 = \cos x$$

In modo analogo si può dimostrare la derivata del cos x**.**

DERIVATE DELLE FUNZIONI PIU' COMUNI

$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
Funz. costante $y = k$	$y' = 0$
Funz. potenza $y = x^n$ In particolare:	$y' = nx^{n-1}$
$y = x$	$y' = 1$
$y = \lvert x \rvert$	$y' = \frac{x}{\lvert x \rvert}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = \frac{1}{x}$	$y = -\frac{1}{x^2}$
Funz. goniometriche $y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
Funz. logaritmica $y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
Funz. esponenziale $y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$

Derivata di una somma

Per la derivata di una funzione somma di più funzioni derivabili vale il seguente teorema:
⇒ *La derivata della somma di due (o più) funzioni derivabili esiste ed e uguale alla somma delle derivate delle singole funzioni.*

$$y(x) = f(x) + g(x)$$

con $f(x)$ e $g(x)$ funzioni derivabili in x, per il teorema enunciato sarà:

$$y'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Derivata di un prodotto

Per la derivata di una funzione prodotto di due funzioni derivabili vale, invece, il teorema:
⇒ *La derivata del prodotto di due funzioni derivabili esiste ed è uguale al prodotto della derivata del primo fattore per il secondo più il prodotto del primo fattore per la derivata del secondo.*

$$y(x) = f(x) * g(x)$$

con $f(x)$ e $g(x)$ funzioni derivabili in x, per il teorema enunciato sarà:

$$y'(x) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

Derivata di un rapporto

Per la derivata di una funzione quoziente di due funzioni derivabili vale il teorema:
⇒ *La derivata del quoziente di due funzioni derivabili esiste ed è uguale al rapporto tra la differenza tra il prodotto del denominatore per la derivata del numeratore e il prodotto del numeratore per la derivata del denominatore e il quadrato del denominatore.*

$$y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

con $f(x)$ e $g(x)$ funzioni derivabili in x, per il teorema enunciato sarà:

$$y'(x) = \frac{f'^{(x)} * g(x) - f(x) * g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Derivata di una funzione di funzione

⇒ *Se la funzione* $g(x)$ *è derivabile nel punto* x *e funzione* f *è derivabile nel punto* $g(x)$ *allora la funzione composta* $y(x) = f(g(x))$ *è derivabile in* x *e la sua derivata è il prodotto delle derivate di* f *rispetto a* $g(x)$ *e di* $g(x)$ *rispetto ad* x.

$$y(x) = f(g(x))$$

con f funzione derivabile in $g(x)$ e $g(x)$ derivabile in x per il teorema enunciato sarà:

$$y'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$$

Questa è forse l'operazione più importante per saper calcolare esattamente la derivata. Per fare la derivata di una funzione di funzione prima faccio la derivata della funzione esterna senza toccare quella interna e poi moltiplico per la derivata di quella interna.

Vediamo di capire meglio con un esempio:

- $y(x) = \sin(\log x)$

prima devo fare la derivata della funzione esterna che è sin la cui derivata è cos

$f\big(g(x)\big) = \sin(\log x) \rightarrow\ f'\big(g(x)\big) = \cos(\log x)$

Poi devo fare la derivata della funzione interna $g(x)$

$$g(x) = \log x \rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

La derivata della funzione composta sarà quindi il prodotto di queste due:

$$y(x) = \sin(\log x) \Longrightarrow\ y'(x) = \cos(\log x) * \frac{1}{x} = \frac{\cos(\log x)}{x}$$

Altre regole di derivazione ricavabili da queste:

$$y(x) = [f(x)]^n \quad \rightarrow \quad y'(x) = n[f(x)]^{n-1} * f'(x)$$

$$y(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \rightarrow \quad y'(x) = \frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$$

Teorema (derivabilità → continuità)

Se una funzione $f(x)$ è derivabile in un punto x_0 allora è continua in quel punto.

Ipotesi: la funzione è derivabile quindi esiste ed è finito il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Tesi: la funzione è continua:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE:

Il teorema non è invertibile: non è detto che se una funzione è continua in un punto x_0 sia anche derivabile in quel punto.

Esempio:

■ $y = \sqrt[3]{x}$ è continua in $x_0 = 0$ ma non è derivabile. Verifichiamolo applicando il limite del rapporto incrementale per incremento che tende a 0:

$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} =$

se lo calcoliamo in $x_0 = 0$ diventa:

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h^{1/3} \cdot h^{-1} = \lim_{h \to 0} h^{-\frac{2}{3}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

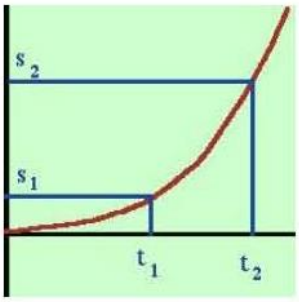
Quindi non è derivabile in $x_0 = 0$ poiché la derivata risulta ∞.

Quindi *la continuità in un punto è condizione necessaria, ma non sufficiente, per la derivabilità in quel punto.*

Applicazione in fisica della derivata: velocità e accelerazione

Questo veramente sarebbe un argomento di fisica, ma storicamente e' stato questo che ha portato Newton a costruire il concetto di derivata di una funzione in un punto.

In fisica, la velocità indica la rapidità di moto e la direzione di un corpo in movimento. Generalmente si fa distinzione tra : velocità media e velocità istantanea.



Consideriamo un punto che si muova su una traiettoria di moto vario ed il suo moto sia descrivibile con un'equazione del tipo

$$S = f(t)$$

ora se voglio la velocita' media nell'intervallo di tempo da t_1 a t_2 dovro' calcolare il rapporto

$$\vec{v} = \frac{\vec{s_2} - \vec{s_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}$$

tra lo spostamento e la durata dell'intervallo di tempo impiegato a percorrerlo.

Quando prendo un intervallo di tempo molto piccolo, che equivale a dire che $t2 \rightarrow t1$ l'espressione che ottengo

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

corrisponde alla derivata dello spazio rispetto.
Tale espressione mi definisce la velocità istantanea, ossia il limite della velocità media per intervalli di tempo molto brevi.

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t}$$

Analogamente l'acclerazione **istantanea** si ottiene rendendo piccolo a piacere il cambiamento di velocità nell'accelerazione media.In pratica si va a definire l' accelerazione *per un certo istante* piuttosto che *in un certo intervallo*.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

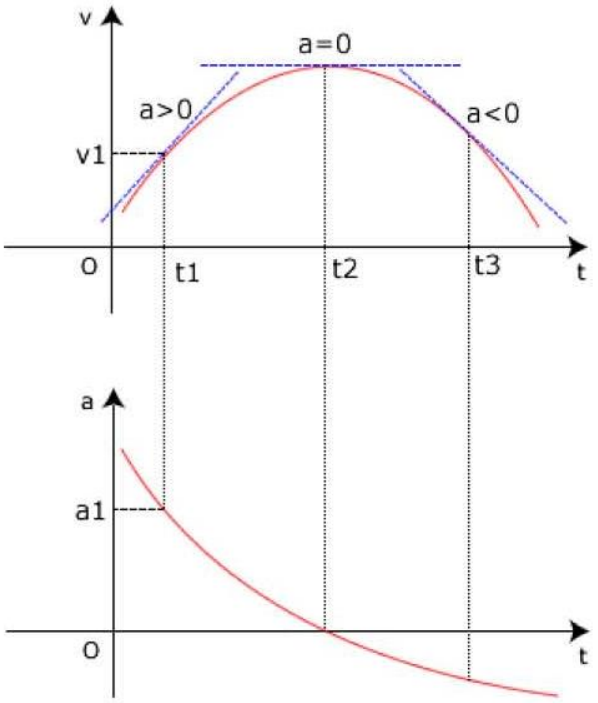
Lo strumento matematico per effettuare tale operazione è la derivata della velocià $\vec{v}$ (t) rispetto al tempo t. Per cui:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Poiché $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2}$ l'accelerazione è anche definita come la derivata seconda dello spazio rispetto al tempo

Ricordando il significato geometrico della derivata

L'accelerazione istantanea, quindi, è la tangente alla curva velocità-tempo nel punto fissato, così come è il significato geometrico della derivata prima. Sarà quindi uguale alla **pendenza della retta tangente** alla curva nel punto in cui viene calcolata.



Attraverso lo studio della curva nel grafico velocità-tempo si possono ricavare ulteriori importanti informazioni. Dall'angolo che la tangente forma con l'asse del tempo è possibile ricavare l'andamento dell'accelerazione, per cui sarà negativa se la tangente forma un angolo superiore ai 90 gradi con l'asse t, positiva se rimane sotto i 90 gradi, mentre l' accelerazione sarà nulla se la tangente è parallela a questo asse. Il grafico, quindi, mostra come l'andamento del grafico velocità-tempo si ripercuota su quello accelerazione -tempo.

Inoltre si noti come a valori positivi della curva accelerazione-tempo corrispondano valori crescenti della curva velocità-tempo.

Differenziale di una funzione

Sia $f(x)$ una funzione derivabile e quindi continua in un intervallo I e siano $x\ e\ x + \Delta x$ due punti appartenenti a tale intervallo.

Definiamo il DIFFERENZIALE di una funzione $f(x)$, relativo al punto x e all'incremento Δx , il prodotto della derivata della funzione calcolata in x per l'incremento Δx.

Il differenziale viene indicato con $df(x)$ oppure dy:

$$df(x) = f'(x) * \Delta x$$

Si osserva che se si considera la funzione

$$f(x) = x$$

il differenziale sarà:

$$df(x) = 1 * \Delta x = \Delta x \rightarrow dx = \Delta x$$

quindi il differenziale della variabile indipendente coincide con l'incremento della variabile stessa

Sostituendo quindi nella definizione di differenziale, possiamo scrivere:

$$df(x) = f'(x) * dx$$

cioè il differenziale di una funzione è uguale al prodotto della sua derivata per il differenziale della variabile indipendente.

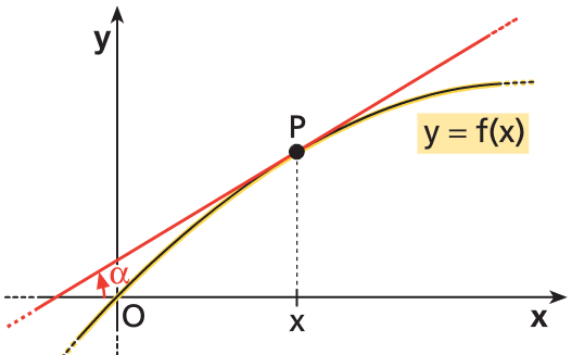
Da quest'ultima relazione ricavando $f'(x)$, abbiamo:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

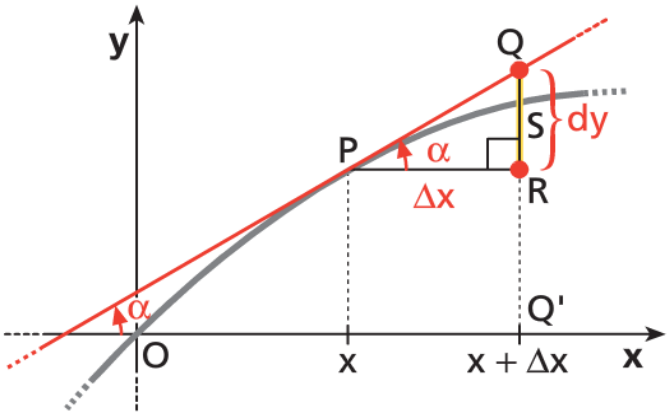
$\Rightarrow$ La derivata prima di una funzione è quindi il rapporto tra il differenziale della funzione e quello della variabile indipendente.

Significato geometrico del differenziale

Consideriamo il grafico della funzione $y = f(x)$ e la retta tangente alla funzione nel punto P di coordinate $(x; f(x))$ che forma un angolo α con l'asse delle ascisse.



Consideriamo poi sulla retta tangente il punto Q di ascissa $x + \Delta x$ e il punto R di coordinate $(x + \Delta x; f(x))$



Il triangolo PQR è rettangolo in R e per il teorema dei triangoli rettangoli possiamo scrivere:

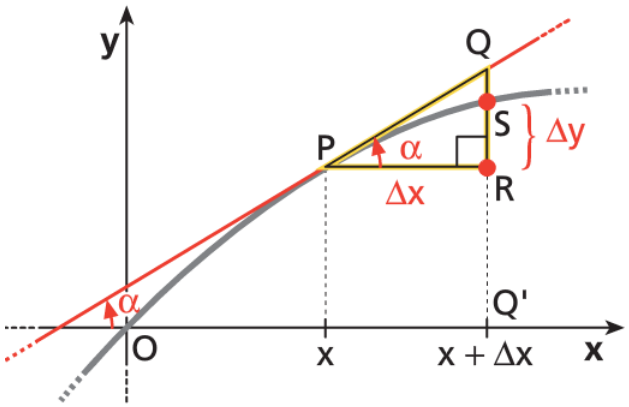
$$\overline{RQ} = \overline{PR} \tan \alpha$$

Ma $\overline{PR} = \Delta x$ e $\tan \alpha = f'(x)$ andando a sostituire otteniamo che:

$$\overline{RQ} = f'(x) \cdot \Delta x = dy$$

Ciò significa che il differenziale dy è la variazione che subisce l'ordinata della retta tangente alla curva quando si passa dal punto di ascissa x al punto di ascissa $x + \Delta x$.

Consideriamo il punto S appartenente alla funzione di ascissa $x + \Delta x$



L'incremento Δy della funzione relativo al punto x e al punto $x + \Delta x$ è la variazione che subisce l'ordinata della curva, cioè $\overline{RS}$:

$$\overline{RS} = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y$$

Da quanto detto possiamo concludere che sostituire all'incremento Δy della funzione il suo differenziale significa geometricamente approssimare nell'intorno di x la curva con la tangente in x. Il differenziale costituisce quindi un'approssimazione dell'incremento della funzione tanto più accettabile tanto più è piccolo Δx.

IL CALCOLO INTEGRALE

La funzione primitiva

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo $I \in \mathcal{R}$. Si dice che la funzione $F(x)$ è una primitiva della funzione $f(x)$ se si verifica che:

$$F'(x) = f(x)$$

Ad esempio:

• la funzione $F(x) = \frac{x^2}{2}$ è una primitiva della funzione $f(x) = x$ in quanto

$$F'(x) = \frac{2x}{2} = x = f(x)$$

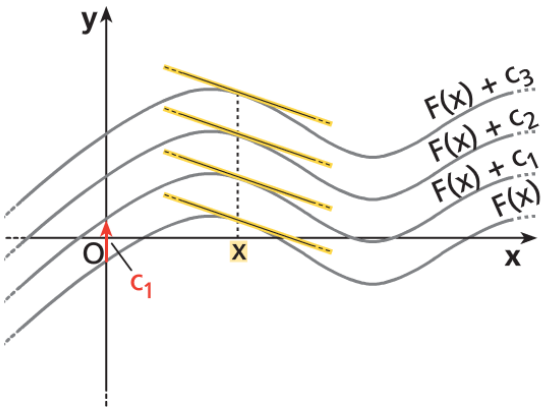
• la funzione $F(x) = \cos x$ è una primitiva della funzione $f(x) = \sin x$ in quanto

$$F'(x) = \sin x = f(x)$$

Per le funzioni primitive valgono i seguenti teoremi:

- Se la funzione $f(x)$ ammette in un intervallo $I \in \mathcal{R}$ come primitiva la funzione $F(x)$, allora ne ammette infinite che si ottengono tutte aggiungendo alla $F(x)$ una qualunque costante $c \in \mathcal{R}$.

(La dimostrazione è immediata in quanto la derivata di una costante vale sempre zero.)



- Per ogni funzione continua in un intervallo $I \in \mathcal{R}$ esiste sempre almeno una primitiva.

Integrale indefinito

Si dice integrale indefinito di una funzione *f(x)*, e si indica con il simbolo $\int f(x)\,dx$ la totalità delle primitive della *f(x)*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

In questa scrittura *f(x)* si dice *funzione integranda* e la variabile *x* *variabile d'integrazione*.

Dalla definizione precedente poiché $F'(x) = f(x)$ segue che $D[\int f(x)\,dx] = f(x)$.

Questo significa che l'operazione di integrazione è l'opposto della derivazione ma l'integrazione indefinita associa ad una funzione una classe di funzioni, che si ottengono aggiungendo una costante alla primitiva, mentre la derivazione associa ad ogni funzione una sola funzione.

Esempio: $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ poiché $D[\sin x + C] = \cos x$

Una funzione che ammette una primitiva, e quindi infinite primitive, si dice *integrabile*.

- Teorema: Condizione sufficiente di integrabilità:
  Se una funzione è continua in un intervallo $[a,b]$ allora ammette primitive nello stesso intervallo

Proprietà di linearità dell'integrale indefinito:

- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int k\,f(x)dx = k \int f(x)dx$

  Dimostrazione
  Se deriviamo entrambi i membri otteniamo:
  $D\left[\int k\,f(x)dx\right] = D\left[k \int f(x)dx\right] = k\,D\left[\int f(x)dx\right] = k\,f(x)$
  $D\left[k \int f(x)dx\right] = k\,D\left[\int f(x)dx\right] = kf(x)$
  che risultano quindi uguali

Integrali immediati

Dalle regole di derivazione otteniamo gli integrali indefiniti fondamentali:

- ✓ $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ \text{ con } \alpha \neq -1$

  Infatti $D\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right] = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)x^{\alpha+1-1} = x^{\alpha}$

  Casi particolari:

  $\int dx = x + C$

  $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

  $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$

- ✓ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

  Infatti $D[\ln|x| + C] = \frac{1}{x}$ perché:

  se $x > 0, D[\ln|x|]\ D[\ln x] = \frac{1}{x}$

  se $x < 0, D[\ln|x|]\ D[\ln(-x)] = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$

- ✓ $\int e^x dx = e^x + C$
- ✓ $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$
- ✓ $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
- ✓ $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

Regole di derivazione delle funzioni composte

Si ricavano dalle regole di derivazione, viene riportata la dimostrazione solo della prima come esempio.

- ✓ $\int [f(x)]^{\alpha} f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \text{con } \alpha \neq -1$

Dimostrazione

Si deve avere che:

$$D\left[\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right] = [f(x)]^{\alpha} f'(x)$$

$$D\left[\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right] = \frac{1}{\alpha+1} D[[f(x)]^{\alpha+1} + C] = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha+1)[f(x)]^{\alpha} f'(x) = [f(x)]^{\alpha} f'(x)$$

Ricordando $D[[f(x)]^{n}] = n[f(x)]^{n-1}$

- ✓ $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

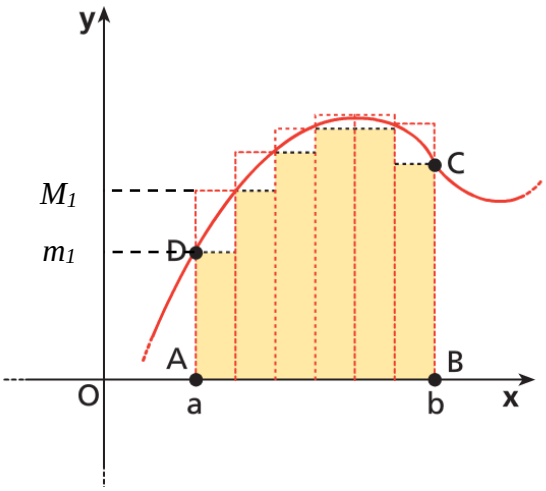
- ✓ $\int f'(x) \sin f(x)\, dx = -\cos f(x) + C$

- ✓ $\int f'(x) \cos f(x)\, dx = \sin f(x) + C$

- ✓ $\int f'(x)\, e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$

Integrale definito

Si chiama trapezoide una figura piana delimitata del grafico di una funzione $f(x)$ continua in un intervallo chiuso $[a; b]$, dall'asse delle ascisse e dalle rette parallele di equazioni $x = a$ e $x = b$.



Per calcolare l'area di un trapezoide occorre dividere l'intervallo $[a; b]$ in un certo numero n di parti uguali di ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e consideriamo gli n rettangoli aventi ciascuno per base Δx e per altezza m_i (che è il minimo valore assunto dalla funzione $f(x)$ nell' i – esimo intervallino). Indichiamo con s_n la somma delle aree di tutti questi n rettangoli:

$$s_n = m_1 h + m_2 h + \cdots + m_n h$$

L'area del trapezoide viene così approssimata per difetto da s_n.

In modo analogo possiamo approssimare per eccesso l'area del trapezoide considerando la somma delle aree degli n rettangoli aventi ciascuno per base Δx e per altezza M_i (che è il massimo valore assunto dalla funzione $f(x)$ nell' i – esimo intervallino). Indichiamo con S_n la somma delle aree di tutti questi n rettangoli:

$$S_n = M_1 h + M_2 h + \cdots + M_n h$$

Otteniamo così due successioni s_n e S_n di aree tali che per ogni l'area S del trapezoide risulta:

$$s_n < S < S_n$$

TEOREMA: se una funzione $f(x)$ è continua e positiva nell'intervallo $[a; b]$, i limiti per $n \to \infty$ delle successioni s_ne S_n esistono finiti e sono coincidenti:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Nella spiegazione abbiamo considerato una funzione positiva per capire meglio il concetto di integrale ma questo procedimento è valido anche se la funzione assume valori positivi e negativi all'interno dell'intervallo considerato.

Definizione di integrale definito:
Data una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[a; b]$, si chiama integrale definito esteso all'intervallo $[a; b]$ il valore comune del limite per $n \to \infty$ delle due successioni s_n, per difetto e S_n, per eccesso. Tale valore viene indicato con la scrittura:

$$\int_a^b f(x)dx$$

dove a viene chiamato *estremo inferiore*, b *estremo superiore* e $f(x)$ *funzione integranda*.

N.B. A differenza dell'integrale indefinito, che è una classe di funzioni, l'integrale definito è invece un numero (essendo il calcolo di un'area) e non dipende dalla variabile x.

Proprietà dell'integrale definito:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- se $a < b$ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- prodotto per una costante $\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- additività $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- confronto tra funzioni $se \;\; f(x) \leq g(x) \;\; \to \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Teorema della media

Sia f(x) una funzione continua nell'intervallo [a,b]. Allora esiste sempre un punto c $\in$ [a,b] tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

.

Dimostrazione. indichiamo con m il minimo della funzione f(x) in [a,b], e con M il massimo. Risulta allora:

$$m \leq f(x) \leq M$$

Dalla proprietà di monotonia dell'integrale risulta

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

Ove $\int_a^b m dx = m(b-a)$ e $\int_a^b M dx = M(b-a)$

Si ottiene quindi

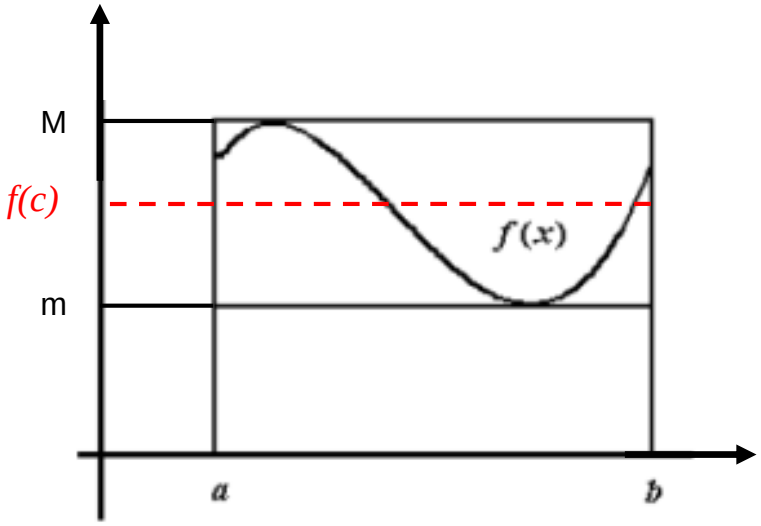
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

ovvero

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Dalla quale risulta chiaro che se una funzione è continua in un intervallo ivi dotata di un minimo ed un massimo la media integrale di tale funzione è minore del massimo e maggiore del minimo di tale funzione nel compatto considerato. Esiste quindi un punto c, interno all'intervallo, in corrispondenza del quale vale la tesi.

Geometricamente:



$f(c)$ è l'altezza del rettangolo di base (b-a) che ha area equivalente all'area del trapezoide.

Teorema fondamentale del calcolo integrale:

Sia f definita in $[a,b] \to \mathcal{R}$ una funzione continua allora la "funzione integrale" definita $F(x) \coloneqq \int_a^x f(t)dt$ è una funzione derivabile in $[a,b]$ e si ha che, $\forall\, x \in \mathcal{R}$,

$$F'(x) = f(x)$$

Dimostrazione:

Considero due punti $x \in [a,b]$ e $x+h \in [a,b]$, per calcolare $F'(x)$ devo calcolare il limite del rapporto incrementale quando l'incremento tende a zero. Calcolo prima il rapporto incrementale che ricordando la definizione data nell'enunciato del teorema di funzione integrale $F(x)$ possiamo scrivere come:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} =$$

Applichiamo la proprietà additiva degli integrali: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

$$= \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Applicando il teorema della media $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c) \;\; \text{con}\; c \;\in [a,b]$ possiamo scrivere:

$$\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = \; f(c_h) \;\; \text{dove} \;\; c_h \in [x, x+h]$$

Quindi abbiamo trovato che

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c_h)$$

Per calcolare $F'(x)$ dobbiamo fare il limite per h → 0 ma $se\; h \to 0 \;\Rightarrow c_h \to x$ poiché $c_h \in [x, x+h]$.

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{c_h \to x} f(c_h) = f(x) \qquad \text{C.V.D.}$$

Formula fondamentale del calcolo integrale:

Sia f definita in $[a,b] \to \mathcal{R}$ una funzione continua e F definita in $[a,b] \to \mathcal{R}$ una primitiva di f in $[a,b]$ ovvero $F'(x) = f(x)$

$$\text{allora } \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Per calcolare l'integrale definito $\int_a^b f(t)dt$ si deve cercare una $F(t)$ primitiva di $f(t)$ e si deve calcolare la differenza tra i valori da essa assunti nel punto b e nel punto a.

Dimostrazione:

Nel teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo definito $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ quindi

$F(a) = \int_a^a f(t)dt$ e $F(b) = \int_a^b f(t)dt$

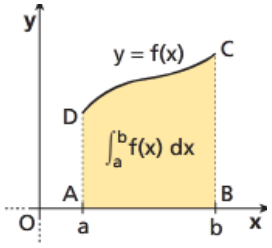
$$\Rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt =$$

Per la proprietà additiva degli integrali:

$$\int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^a f(t)dt + \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

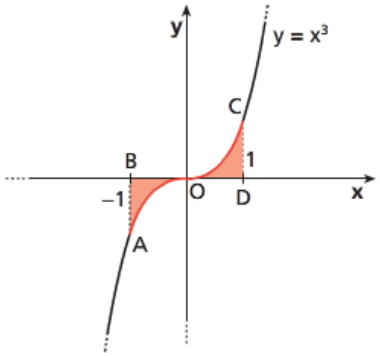
C.V.D.

Abbiamo visto che, data una funzione f(x) l'area del trapezoide ABCD definito nell'intervallo [a,b] è data da $\int_a^b f(x)dx$



Vediamo il calcolo dell'area nel caso la funzione sia in parte negativa o due funzioni delimitano una superficie chiusa.

La funzione è in parte negativa: consideriamo la funzione f(x) = x^3 e la superficie S del trapezoide ABCD compresa fra la funzione e l'asse delle x nell'intervallo [-1;1].



Calcoliamo l'integrale definito esteso da -1 a 1:

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

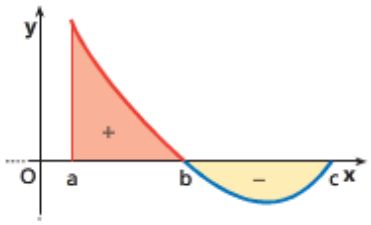
Questo integrale non fornisce la misura dell'area poiché risulta nullo. Risulta quindi necessario scomporre la superficie nelle superfici ABO, in cui la funzione è negativa, e OCD, in cui la funzione è positiva, e scomporre di conseguenza anche l'integrale.

Nell'intervallo in cui la funzione è negativa l'area s della superficie compresa tra la funzione e l'asse x è quindi data da $-\int_a^b f(x)dx$.

Quindi:

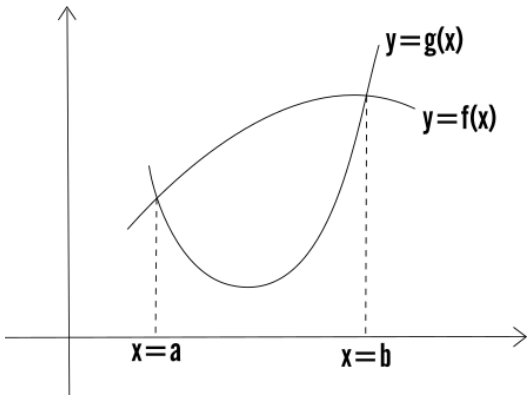
$$S = -\int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{1} x^3 dx = -\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = -\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

In generale quindi se vogliamo calcolare l'area nell'intervallo [a,c] nel caso in figura:



sarà: $S = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$

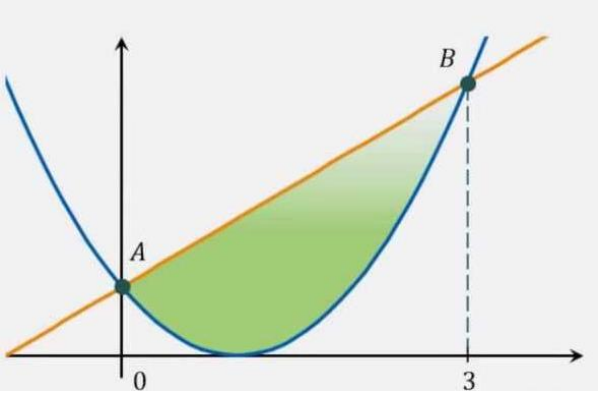
Consideriamo ora <u>due funzioni delimitano una superficie chiusa:</u>



L'area della superficie S compresa tra le due funzioni è data dall'area tra la funzione *f(x)* e l'asse *x* nell'intervallo [a,b] meno quella tra la funzione *g(x)* e l'asse *x* nello stesso intervallo, se $f(x) \geq g(x)$:

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Esempio:



Vogliamo calcolare l'area tra $f(x) = 3x + 3$ e $g(x) = 3x^2 - 6x + 3$.

Le due curve si intersecano nei punti di ascissa 0 e 3 quindi l'area della regione compresa tra le due curve è l'area tra *f(x)* e l'asse *x* (S_1) meno l'area tra *g(x)* e l'asse *x* (S_2).

$$S_1 = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (3x+3)dx = \left[\frac{3}{2}x^2 + 3x\right]_0^3 = \frac{27}{2} + 9 = \frac{45}{2}$$

$$S_2 = \int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (3x^2 - 6x + 3)dx = [x^3 - 3x^2 + 3x]_0^3 = 27 - 27 + 9 = 9$$

quindi $S = S_1 - S_2 = 27/2$.

Oppure molto più semplicemente, applicando le proprietà degli integrali:

$$S = \int_0^3 (3x+3)dx - \int_0^3 (3x^2 - 6x + 3)dx$$

$$= \int_0^3 [3x + 3 - (3x^2 - 6x + 3)]dx = \int_0^3 (-3x^2 + 9x)\,dx = \left[-x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_0^3$$

$$= -27 + \frac{81}{2} = \frac{27}{2}$$

Calcolo dell'integrale di $\sin^2 x$

$$\int sin^2 x \; dx =$$

Applico la formula di bisezione $\sin\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}$

Elevo al quadrato entrambi i membri: $\sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{2}$

Pongo $\frac{\beta}{2} = x \rightarrow \beta = 2x$: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$$\int sin^2 x \; dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \; dx =$$

Divido l'integrale nella somma di due integrali:

$$= \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x \; dx =$$

Integrale di una funzione composta: per calcolare questo integrale devo applicare la formula $\int f'(x)\cos f(x) \; dx = \sin f(x) + C$

Quindi dentro l'integrale devo avere la derivata della funzione argomento del coseno. In questo caso $f(x) = 2x \rightarrow f'(x) = 2$.

Quindi moltiplico e divido per 2 l'integrale e ottengo:

$$\int \cos 2x \; dx = \frac{1}{2}\int 2\cos 2x \; dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x \; dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} * \frac{1}{2}\sin 2x + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\Rightarrow \int sin^2 x \; dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$$

Applicazioni in fisica:

1) Nel calcolo del potenza media in un circuito in corrente alternata è necessario calcolare l'integrale del $\sin^2(\omega t)\,dt$ in un periodo τ, ω è la pulsazione ed è uguale a $2\pi/\tau$

$$\int_0^\tau \sin^2(\omega t)\;\; dt =$$

Applico una sostituzione di variabile: $x = \omega t$

$$dx = \omega\, dt \;\rightarrow dt = \frac{dx}{\omega}$$

Calcolo i nuovi estremi di integrazione: $t = 0 \;\rightarrow x = 0$

$$t = \tau \;\rightarrow x = \omega\tau = \frac{2\pi}{\tau}\tau = 2\pi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{\omega}\, dx = \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} \sin^2 x\; dx = \frac{1}{\omega}\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{\omega}\left[\left(\frac{2\pi}{2} - \frac{\sin 2(2\pi)}{4}\right) - \left(\frac{0}{2} + \frac{\sin 0}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{\tau}} = \frac{\tau}{2}$$

$$\rightarrow \int_0^\tau \sin^2(\omega t)\;\; dt = \frac{\tau}{2}$$

2) Per calcolare invece l'energia totale racchiusa da un'onda stazionaria è necessario calcolare l'integrale del $\sin^2(kl)\,dl$ sulla lunghezza L della fune, k è il numero l'onda ed è uguale a 2π/λ.

$$\int_0^L \sin^2(kl)\ \ dl = \int_0^L \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} l\right)\ \ dl =$$

Applico una sostituzione di variabile: $x = \frac{2\pi}{\lambda} l$

$$dx = \frac{2\pi}{\lambda}\ dl\ \rightarrow dl = \frac{dx}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{2\pi} dx$$

Calcolo i nuovi estremi di integrazione: $l = 0\ \rightarrow x = 0$

$$l = L\ \rightarrow x = \frac{2\pi}{\lambda} L = \frac{2\pi}{\lambda}\ \frac{\lambda}{2} = \pi$$

Le onde stazionarie su una fune di lunghezza L possono avere solo determinate lunghezze d'onda $L = n\frac{\lambda}{2}$ con n (numero intero) ≥1. Nella sostituzione dell'estremo superiore si è considerato il caso con n = 1.

$$= \int_0^\pi \frac{\lambda}{2\pi} \sin^2 x\ \ dx = \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 x\ \ dx = \frac{\lambda}{2\pi} \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2(\pi)}{4}\right) - \left(\frac{0}{2} + \frac{\sin 0}{4}\right)\right] = \frac{\lambda}{2\pi}\ \frac{\pi}{2} = \frac{\lambda}{4}$$

$$\rightarrow \int_0^L \sin^2(kl)\ \ dl = \frac{\lambda}{4}$$