FUNZIONI

- Definizione di funzione, dominio di una funzione
- Funzione esponenziale
- Funzione logaritmo
- Equazioni esponenziali e logaritmiche

RICHIAMI DI TRIGONOMETRIA

- Misura di un angolo in radianti
- Funzioni trigonometriche
- Calcolo angoli notevoli
- Archi associati
- Formule di addizione e sottrazione
- Formule di duplicazione e bisezione
- Relazione tra gli elementi di un triangolo rettangolo
- Coefficiente angolare di una retta

LIMITI

- Concetto di intorno e di limite di una funzione
- Definizione di limite finito in un punto e verifica del limite finito in un punto
- Limite finito destro e sinistro in un punto
- Definizione di limite infinito di una funzione in un punto e verifica
- Definizione di limite finito di una funzione all'infinito e verifica
- Definizione di limite infinito di una funzione all'infinito e verifica
- Teorema di unicità del limite
- Operazioni sui limiti: somma, differenza, valore assoluto, prodotto, inverso e quoziente
- Esempi di funzioni che non ammettono limite in un punto
- Calcolo di limiti, forme indeterminate
- Tabella limiti notevoli e dimostrazione limite fondamentale $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

FUNZIONI CONTINUE

- Definizione di funzione continua in un punto e in un intervallo
- Continuità delle funzioni: costante, identità, monomio, polinomio, quoziente di due polinomi, potenza, esponenziale e logaritmo, trigonometriche e radice
- Funzioni limitate, limitate superiormente e inferiormente

IL CONCETTO DI FUNZIONE

Dati gli insiemi X e Y non vuoti, si chiama <u>funzione</u> da X in Y una relazione f tale che per ogni $x \in X$ esiste uno ed un solo elemento $y \in Y$ tale che $(x,y) \in f$. Tale elemento tradizionalmente si denota con $f(x)$: in altre parole:

$$y = f(x)$$

Le due grandezze x e y si chiamano rispettivamente variabile indipendente (x) e variabile dipendente (y).

L'insieme X è il dominio della funzione f, mentre l'insieme Y è il codominio.

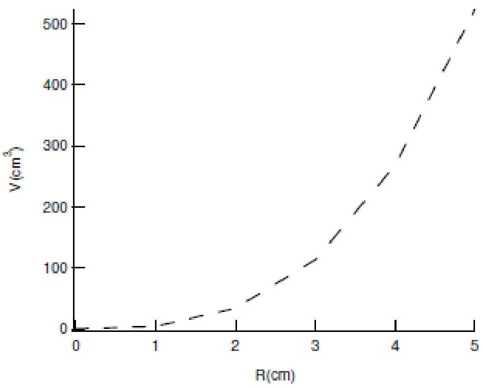
Una funzione può essere rappresentata graficamente in un sistema di assi cartesiani, dove l'asse verticale rappresenta l'asse delle ordinate (e quindi dei valori che assume la variabile y) e quello orizzontale rappresenta l'asse delle ascisse (e quindi dei valori che assume la variabile x).

Esempio: Volume di una sfera $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$y = \text{V},\ x = \text{R} \Rightarrow y = \frac{4}{3}\pi x^3$$

Ad ogni valore di R corrisponde un valore di V come nella tabella seguente:

R (cm)	V(cm^3)
0	0
1	4.19
2	33.51
3	113.10
4	268.10
5	523.62
.....	....



Ad ogni coppia di numeri *R* e *V* corrisponde un punto del piano di coordinate *R* e *V* come mostrato nel grafico

Tra le infinite funzioni è possibile individuare un gruppo di funzioni tali che tutte le altre possono essere considerate o come combinazioni di queste attraverso le operazioni di somma, prodotto e quoziente o come funzioni di funzioni, cioè funzioni di variabili che sono a loro volta delle funzioni.

Le funzioni di base sono:

$f(x) = a$ funzione costante

$f(x) = x^a$ funzione potenza

$f(x) = a^x$ funzione esponenziale

$f(x) = \log_a x$ funzione logaritmo

$f(x) = \sin x\,, f(x) = \cos x$ funzioni trigonometriche

INSIEME DI ESISTENZA DI UNA FUNZIONE

Qualunque sia la funzione in oggetto l'insieme dei valori x per i quali esiste il corrispondente valore della y si dice insieme di esistenza, o insieme di definizione o dominio della funzione.

- ✓ Somma/differenza/prodotto di funzioni base è sempre possibile quindi il dominio è tutto l'insieme dei numeri reali ($\forall x \epsilon R$)
- ✓ Rapporto tra funzioni base è possibile solo quando il denominatore non è nullo ($\frac{1}{0} = \infty$) quindi il dominio sono tutti i valori di x esclusi quelli che annullano il denominatore.
- ✓ Radice n-esima di una funzione base: se n è dispari il dominio è tutto l'insieme dei numeri reali ($\forall x \epsilon R$), se n è pari il radicando deve essere ≥ 0 quindi il dominio sono tutti i valori di x esclusi quelli per cui il radicando è < 0.
- ✓ Elevamento a potenza (esponente intero) è sempre possibile quindi il dominio è tutto l'insieme dei numeri reali ($\forall x \epsilon R$)
- ✓ Funzione esponenziale
- ✓ Funzione logaritmo
- ✓ Funzioni trigonometriche

in dettaglio nei capitoli successivi.

Esempi:

- ✓ $y = 3x$

L'insieme di definizione in questo caso e l'insieme dei numeri reali, in quanto qualunque numero reale assegni ad x esiste il corrispondente valore di y $\Rightarrow \forall x \in \mathrm{R}$

- ✓ $y = \sqrt{3x + 2}$

In questo caso poiché la radice è definita solo per valori positivi devo porre che l'argomento della radice sia positivo o al massimo nullo:

$$3\,x + 2 \geq 0 \Rightarrow 3\,x \geq -2 \Rightarrow \forall x \geq -2/3$$

- ✓ $y = \frac{2}{2x+4}$

In questo caso il denominatore deve essere un valore non nullo altrimenti la y assumerebbe valore ∞:

$$2\,x + 4 \neq 0 \Rightarrow 2\,x \neq -4 \Rightarrow x \neq -2$$

- ✓ $y = \frac{2}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

In questo caso il denominatore deve essere un valore non nullo quindi l'argomento della radice dovrà essere > 0:

$$x^2 - 2x - 3 > 0$$

$\Rightarrow$ le soluzioni dell'equazione associata sono $x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$

Quindi l'equazione è positiva $\forall x \epsilon R$ tale che $x < -1$ e $x > 3$

LA FUNZIONE ESPONENZIALE

Le funzioni esponenziali hanno un ruolo fondamentale in matematica e in molte applicazioni. Servono a comprendere i sistemi dinamici, siano essi di natura fisica, chimica, biologica o economica. Vedremo sotto come vengono impiegate per modellare processi di crescita o di decadimento. Ma le ritroviamo anche in molti altri contesti, a partire dalla teoria delle probabilità fino alla fisica quantistica.

ALCUNI ESEMPI

BATTERI A CRESCITA ESPONENZIALE

Consideriamo una colonia di batteri.
Assumiamo che la sua crescita (determinata da divisioni di cellule) sia caratterizzata dalle seguenti tre proprietà:

1. In intervalli temporali di uguale lunghezza il numero di batteri aumenta di uguale fattore.
2. All'inizio la colonia è composta da 1000 batteri.
3. Dopo un'ora il numero di batteri è raddoppiato.

Cominciamo con alcune osservazioni su queste proprietà:

• La prima proprietà è quella decisiva, poiché caratterizza la natura del processo. Si basa sull'ipotesi che ogni batterio si riproduca con <u>fattore costante</u>, indipendentemente dalla grandezza della colonia e dal tempo trascorso. La colonia non aumenta di un numero fisso di batteri per unità di tempo, bensì di un numero che è proporzionale alla grandezza raggiunta dalla colonia. Più batteri abbiamo, più ne aggiungeremo, e questo si svolge in maniera continua. Un processo del genere si chiama <u>crescita esponenziale</u>.

• Le proprietà 2 e 3 forniscono i dati quantitativi caratteristici del processo (il valore iniziale e il fattore di crescita). Ci servono per poter fare previsioni concrete (quantitative).

• Le tre ipotesi (in particolare la proprietà 1) forniscono naturalmente solo un modello: la crescita esponenziale non dura in eterno. Prima o poi si raggiungono limiti che rallentano il processo e che allo stesso tempo determinano i limiti del modello.

Il nostro scopo è prevedere la grandezza della colonia dopo un certo lasso di tempo *t*. Per la terza proprietà è facile calcolare il numero di batteri per ogni ora intera:
Dopo 1 ora ci sono 2000 batteri, dopo 2 ore ci sono 4000 batteri, dopo 3 ore ci sono 8000 batteri, ecc. Soffermiamoci un momento e riflettiamo su come si ottengono questi numeri:
• All'inizio (ora 0) ci sono 1000 $\Rightarrow 1000 \times 2^0$ batteri
• Dopo 1 ora il numero di batteri è raddoppiato $\Rightarrow 1000 \times 2 = 1000 \times 2^1$ batteri
• Dopo 2 ore il loro numero è nuovamente raddoppiato $\Rightarrow 1000 \times 2^1 \times 2 = 1000 \times 2^2$ batteri

• Dopo 3 ore ci sono $1000 \times 2^2 \times 2 = 1000 \times 2^3$ batteri.
Continuiamo a piacere con questo ragionamento e vediamo che dopo *t* ore la colonia consiste di 1000×2^t batteri
Questa è una formula estremamente comoda. Se vogliamo determinare la grandezza della colonia dopo 24 ore, basterà calcolare il numero 1000×2^{24}. Otterremo 16.8 miliardi di batteri, un numero enorme. Adesso capiamo anche la ragione per il nome "esponenziale": La variabile del tempo *t* (il numero di ore trascorse) compare come esponente nella formula. Quando aumenta *t* il valore 2^t cresce esponenzialmente e raggiunge presto valori enormi.

La crescita della colonia di batteri è descritta dalla funzione esponenziale:
$n = 1000 \times 2^t$
in cui adesso possiamo inserire numeri reali (positivi) arbitrari *t*

Adesso possiamo risolvere semplici problemi del tipo:
Qual è il numero di batteri dopo un'ora e un quarto?
Soluzione: Un'ora e un quarto è pari a 1.25 ore.
Inseriamo t = 1.25 in e otteniamo 2378.41423..., arrotondando: 2378 batteri.

NINFEE IN UNO STAGNO:
Caratterizzazione del processo:
Le ninfee sulla superficie di uno stagno si riproducono esponenzialmente. All'inizio ce ne sono 17. Il loro numero raddoppia ogni 4 giorni.
Individuazione della funzione esponenziale:
Dopo *x* periodi di 4 giorni il loro numero è pari a 17×2^x.
Poiché sono trascorsi in tutto t = 4*x* giorni, il numero delle ninfee dopo t giorni è dato da $17 \times 2^{t/4}$. (Si verifichi inserendo t = 4: Dopo 4 giorni si prevede il numero 17×2 che corrisponde ai dati).

Formalismo matematico

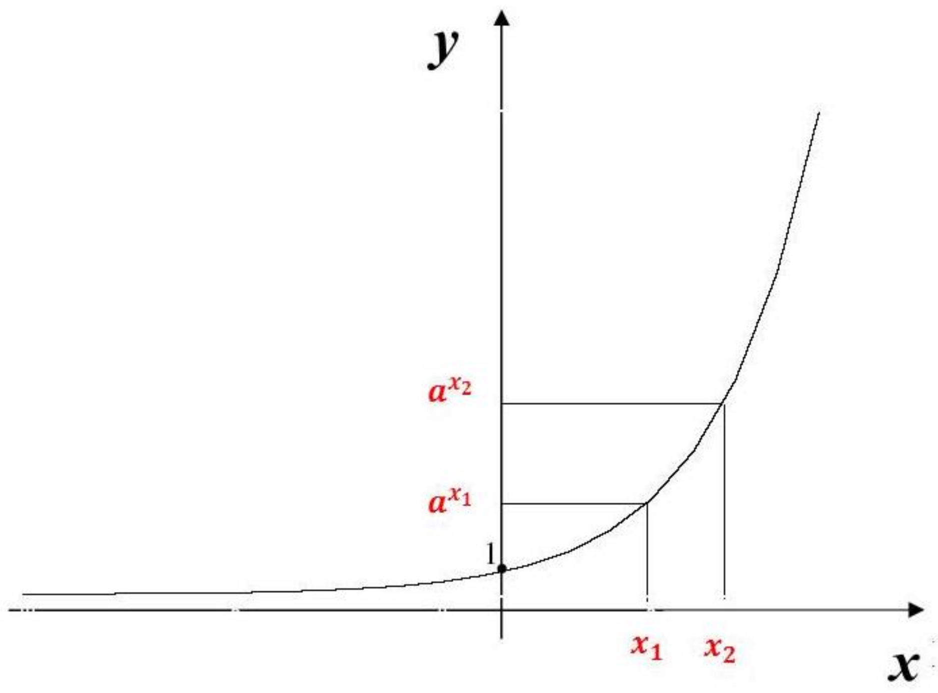
Dato un numero reale positivo $a \neq 1$, si definisce funzione esponenziale l'applicazione da $\Re \rightarrow \Re^+$

$$y = a^x$$

dove la base, ossia il numero a, appartiene all'insieme dei numeri reali $\Re^+$, mentre l'esponente ossia x appartiene ad $\Re$.

Per lo studio di tale funzione bisogna distinguere 2 casi:

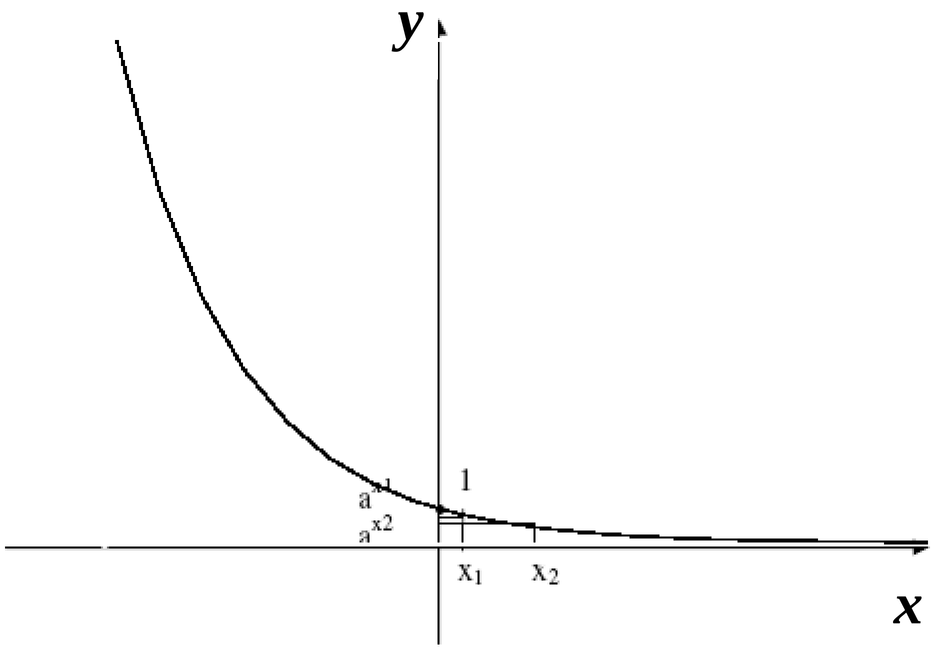
1) Se $a > 1$ il grafico della funzione esponenziale è:



In questo caso la funzione è strettamente crescente:

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^{x^1} = a^{x^2}$$
$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x^1} > a^{x^2}$$
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x^1} < a^{x^2}$$

2) Se $a < 1$ il grafico della funzione esponenziale è:



In questo caso la funzione è strettamente decrescente:

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^{x^1} = a^{x^2}$$
$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x^1} < a^{x^2}$$
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x^1} > a^{x^2}$$

Il numero e di Eulero

Il numero e è un numero irrazionale, e la sua rappresentazione decimale inizia cosi

e = 2.71828182845904523536028747135266……

Viene chiamata base naturale.

La funzione $x \rightarrow e^x$ è così importante che si usa un simbolo apposito exp per indicarla.

$$exp(x) = e^x$$

Quando si parla della funzione esponenziale, generalmente si intende questa funzione.

In molte applicazioni, quando si usano le funzioni esponenziali, si sceglie di lavorare con la base e. In particolare i processi di decadimento studiati in fisica vengono espressi in forma

$$f(t) = f(0)e^{-\lambda t}$$

dove f è la grandezza studiata (ad es. l'intensità di radiazione), t rappresenta il tempo e λ si chiama costante di decadimento.

LA FUNZIONE LOGARITMO

Dato un numero reale positivo $a \neq 1$, si definisce <u>funzione logaritmo</u> l'applicazione da $\Re^{+} \rightarrow \Re$

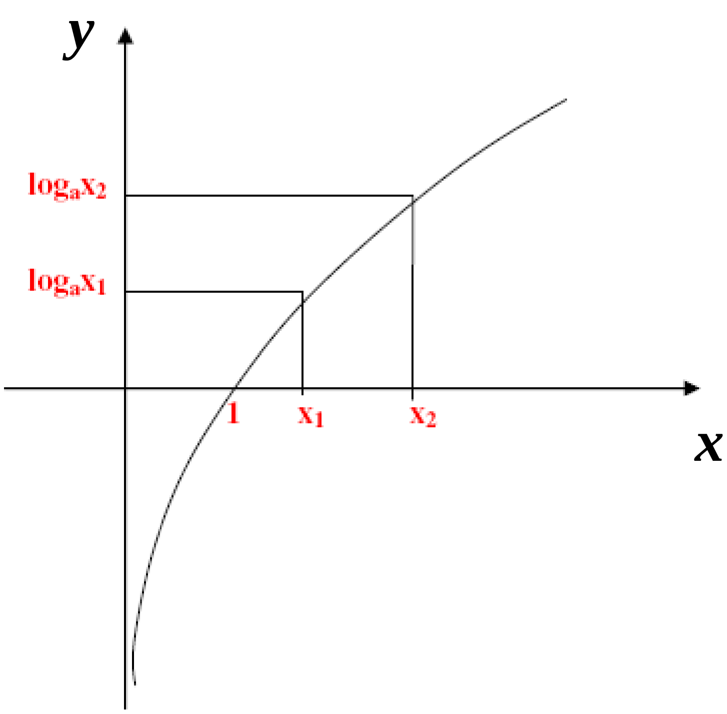
$$y = \log_a x$$

dove x appartiene all'insieme dei numeri reali positivi escluso lo zero.

La funzione logaritmo è la funzione inversa della funzione esponenziale $\rightarrow$ $a^y = x$

Anche in questo caso per lo studio di tale funzione bisogna distinguere 2 casi:

1) Se a > 1



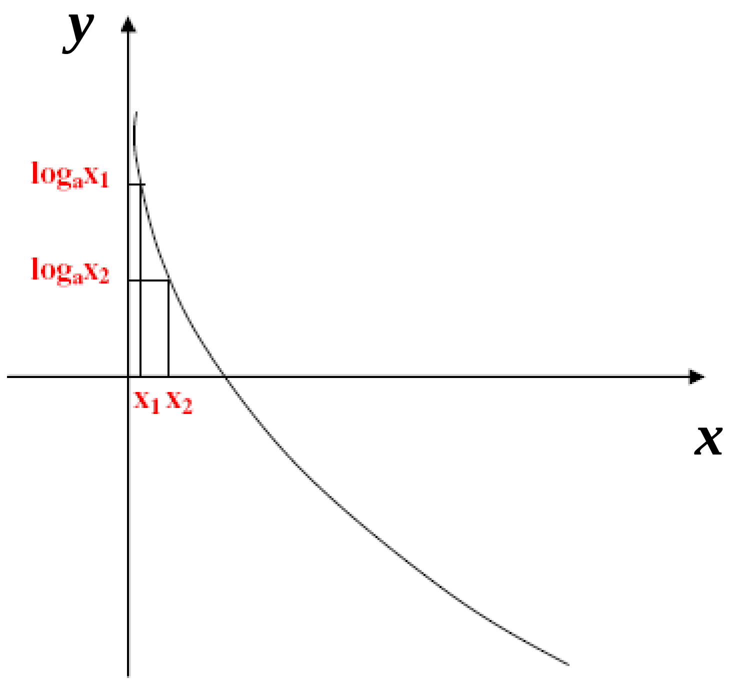
In questo caso la funzione è strettamente crescente:

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 = \log_a x_2$$

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

2) Se 0 < a < 1



In questo caso la funzione è strettamente decrescente:

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 = \log_a x_2$$
$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

Basi speciali

Alcune basi si usano più frequentemente:

• Il logaritmo in base 10 si indica con log, a volte anche con lg, senza nessuna base specificata.

• Il logaritmo in base e si chiama logaritmo naturale e si indica con ln

EQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

Scegliamo una base $a > 0$ ($a \neq 1$) e consideriamo la funzione esponenziale $x \rightarrow a^x$ definita in precedenza. Come abbiamo visto sopra ogni numero positivo viene assunto esattamente una volta come valore della funzione. Nel linguaggio matematico ciò si esprime cosi:
Dato un numero positivo b esiste uno e un solo numero reale x tale che

$$a^x = b$$

In altre parole: L'equazione ha una e una sola soluzione per x.

Le funzioni esponenziali godono delle seguenti proprietà ($a > 0$ per ogni $x, y \in \Re$)

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x \div a^y = a^{x-y}$$

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

$$a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$$

Alcuni esempi di equazioni esponenziali

Stessa base

1) $3^x = 9$

Svolgimento: $3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$

2) $2^x = 32$

Svolgimento: $2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$

3) $81^{x(x+2)} = 27^{4/3x+5}$

Svolgimento $(3^4)^{x(x+2)} = (3^3)^{4/3x+5} \Rightarrow : (3)^{4 \times (x+2)} = (3)^{3(4/3x+5)}$

$4 \times (x+2) = 3(4/3x+5)$ e risolvendo l'equazione di secondo grado si trovano le soluzioni $x=-5/2$ e $x=3/2$

In questi primi tre esempi entrambe le basi si potevano ridurre allo stesso numero
Negli esempi successivi ciò non è possibile e quindi si utilizzano altri metodi di risoluzione.

Stessa base e incognita in entrambi i membri

4) $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$

Svolgimento: si pone $3^x = y \Rightarrow y^2 - 12y + 27 = 0$ che ha per soluzioni y=3 e y=9. Operando di nuovo la sostituzione precedente si ha

$3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

$3^x = 9 \Rightarrow x = 2$

Base diversa e incognita in entrambi i membri

5) $3 \cdot 5^x + 5^{x-1} = 2^{4x}$

Svolgimento:

$$3 \cdot 5^x + \frac{5^x}{5} = 2^{4x} \Rightarrow 15 \cdot 5^x + 5^x = 5 \cdot 2^{4x} \Rightarrow 16 \cdot 5^x = 5 \cdot 2^{4x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^x = 5 \cdot \frac{2^{4x}}{16} \Rightarrow \frac{5^x}{(2^4)^x} = \frac{5}{16} \Rightarrow \left(\frac{5}{16}\right)^x = \frac{5}{16} \Rightarrow x = 1$$

Abbiamo visto alcuni metodi risolutivi delle equazioni esponenziali. Questi metodi però non ci permettono di risolvere un'equazione semplice come:

$$3^{x} = 8$$

La soluzione sarà un numero un po' più piccolo di 2, ma possiamo determinarlo con precisione? Purtroppo le operazioni che conosciamo per adesso non ci aiutano a risolvere il problema! La soluzione cercata è un numero irrazionale che non può essere espresso come frazione, radice o simili. Possiamo trovare delle approssimazioni per calcolarla numericamente. Per il momento però è più importante trovare un concetto matematico preciso. Cominciamo col darle un nome: si chiama il "logaritmo di 8 in base 3".
In generale diremo:

Definizione: Dati $a > 0$ ($a \neq 1$) e $b > 0$, chiamiamo logaritmo in base a di b il numero (univocamente determinato) x per il quale si ha $a^x = b$.
Lo indichiamo con il simbolo log_a e scriviamo x come $log_a\, b$
Da $a^x = b$ segue $x = log_a\, b$

Ciò ci consente di risolvere l'equazione precedente rispondendo calcolando il $log_3 8$

REGOLE DI CALCOLO PER I LOGARITMI

Per risolvere un'equazione logaritmica conviene:

1. (quando è possibile) applicando le proprietà dei logaritmi trasformare l'equazione data in una equivalente del tipo $\log_a A(x) = \log_a B(x)$
2. determinare le soluzioni dell'equazione $A(x) = B(x)$
3. eseguire il controllo mediante verifica diretta dei valori di $\boldsymbol{x}$ calcolati al punto 2.

Le funzioni logaritmiche godono delle seguenti proprietà ($a > 0$ per ogni $x, y \in \Re$)

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

ALCUNI ESEMPI DI EQUAZIONI LOGARITMICHE

1) $5\log x = \log 32$

Svolgimento: Innanzitutto si deve porre che l'argomento del log sia positivo, in questo caso x > 0 $\quad \log x^5 = \log 32 \Rightarrow x^5 = 32 \Rightarrow x^x = 2^5 \Rightarrow x = 2$

2) $\log_{10} x + \log_{10} 3 = \log_{10} 12$

Svolgimento: L'argomento dei vari logaritmi deve essere positivo. In questo caso la x compare solo nel primo logaritmo e quindi deve essere x > 0.

$\log_{10} 3x = \log_{10} 12 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$ che è una soluzione accettabile

3) $\log_7\left(x^2 + 6x + 58\right) = 2$

Imponiamo la condizione di positività dell'argomento $\left(x^2 + 6x + 58\right) \succ 0$

Avremo $x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{-196}}{2}$ non avendo soluzioni reali sarà sempre positivo per ogni valore di x.

Per la risoluzione mettiamo il 2 come $\log_7 49$ utilizzando la solita relazione $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.

$$\log_7\left(x^2 + 6x + 58\right) = \log_7 49 \Rightarrow x^2 + 6x + 58 = 49 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -3$$

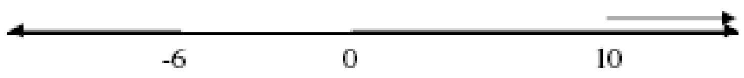
4) $\log_7\left(x^2 + 6x\right) - \log(x - 10) = 2$

L'argomento dei vari logaritmi deve essere positivo quindi occorre impostare il sistema:

$\left(x^2 + 6x\right) \succ 0$

$(x - 10) \succ 0$

La prima disequazione a per soluzioni x = -6 e x = 0 e poiché il segno è > devo considerare lintervallo di valori esterni e quindi la soluzione è x <-6 e x > 0. Analogamente si vede facilmente che la seconda disequazione è soddisfatta per x > 10, quindi graficamente



Si possono accettare solo le soluzioni x> 10

$$\log_7\left(x^2 + 6x\right) - \log_7(x - 10) = 2 \Rightarrow \log_7 \frac{x^2 + 6x}{x - 10} = 2 \Rightarrow \frac{x^2 + 6x}{x - 10} = 49 \Rightarrow \frac{x^2 + 6x - 49x + 490}{x - 10} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 43x + 490}{x - 10} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{43 \pm \sqrt{1849 - 4 \cdot 490}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{43 \pm \sqrt{-111}}{2}$$

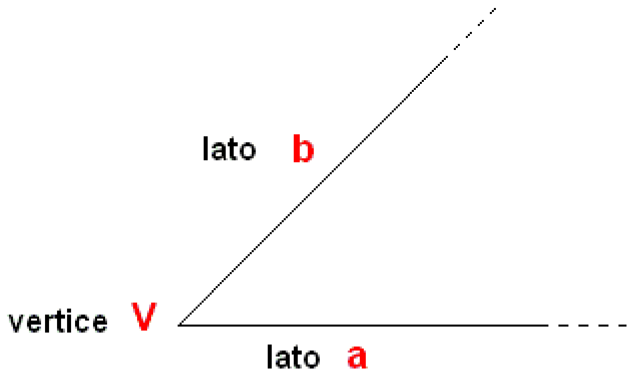
Non ammette soluzioni

RICHIAMI DI TRIGONOMETRIA

Alcune definizioni:

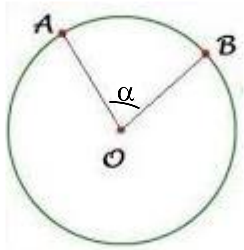
Si definisce **ANGOLO** ciascuna delle due parti nelle quali un piano viene diviso da due semirette aventi la stessa origine. Le due semirette sono dette lati dei due angoli e l'origine comune il loro vertice.

Gli angoli sono: $a\hat{V}b$ e $b\hat{V}a$



Data una circonferenza avente il centro nel vertice di un angolo, si chiama **ARCO** quella parte di circonferenza, interna all'angolo, avente per estremi i punti di intersezione con i lati dell'angolo stesso.

Arco



Nel sistema internazionale gli angoli si misurano convenzionalmente in **radianti**.

Un angolo misurato in radianti è dato dal rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza (AB) tracciato dall'angolo e la lunghezza del raggio di tale circonferenza (AO); essendo il rapporto tra due grandezze omogenee è un numero puro cioè <u>adimensionale</u>

$$\alpha_{rad} = \frac{AB}{AO}$$

UN RADIANTE è l'angolo al centro di una circonferenza, di raggio arbitrario, che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio stesso.

$$1\ rad = \frac{AB}{AO}$$ se AB = AO

Conversione gradi – radianti

Consideriamo una circonferenza di raggio qualsiasi e un angolo α = 360° con vertice nel centro della circonferenza. α sottende un arco uguale alla misura di tutta la circonferenza.

A quanti radianti corrispondono 360°?

$$\alpha_{rad} = \frac{AB}{AO} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$$

$$\Rightarrow 360° = 2\pi$$

Ora posso convertire tutti gli altri angoli attraverso una proporzione:

$$\alpha°: 360° = \alpha_{rad}: 2\pi$$

$$\Rightarrow \alpha° = \frac{\alpha_{rad*360°}}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \alpha_{rad} = \frac{\alpha°*2\pi}{360°}$$

Esempio:

α = 45° $\Rightarrow$ 45° : 360° = α_{rad}: 2π $\Rightarrow$ α_{rad} = (45°*2π)/360° = $\pi/4$

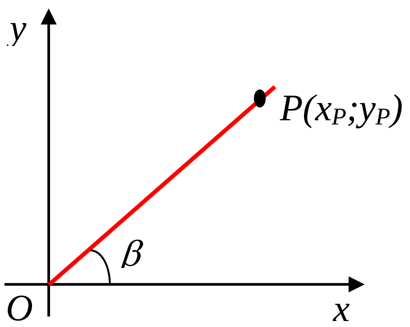
Conversione di alcuni angoli in particolare:

Gradi	Radianti
0	0
30	$\pi/6$
45	$\pi/4$
60	$\pi/3$
90	$\pi/2$
180	π
270	$3\pi/2$
360	2π

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Le funzioni nelle quali la *variabile indipendente* è un **angolo** vengono dette goniometriche o trigonometriche.

Per definire le funzioni goniometriche elementari si consideri un sistema di riferimento cartesiano in cui prendiamo una semiretta con origine nell''origine del sistema di riferimento e che forma un angolo β con l'asse delle x positivo.



Sia P un generico punto della semiretta e siano x_P e y_P le sue coordinate e sia OP la distanza assoluta di P dall'origine O.

Se consideriamo i quattro rapporti:

$$\frac{y_P}{\overline{OP}};\quad \frac{x_P}{\overline{OP}};\quad \frac{x_P}{y_P};\quad \frac{y_P}{x_P}$$

questi non dipendono dalla posizione di P sulla semiretta ma solo dall'ampiezza dell'angolo β, quindi sono funzioni di β.

Definiamo:

seno di $\beta \rightarrow \sin\beta = \frac{y_P}{\overline{OP}}$;

coseno di $\beta \rightarrow \cos\beta = \frac{x_P}{\overline{OP}}$;

tangente di $\beta \rightarrow \tan\beta = \frac{y_P}{x_P}$;

cotangente di $\beta \rightarrow \cot\beta = \frac{x_P}{y_P}$

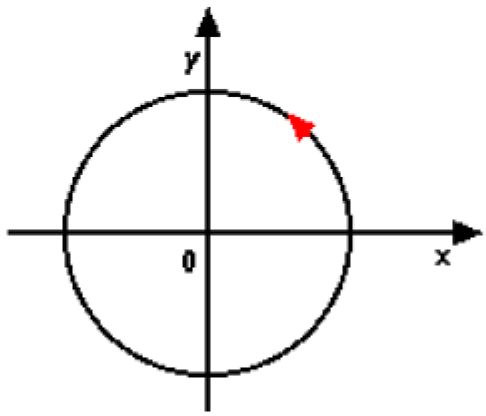
Come si può facilmente verificare, tra le dette quattro funzioni di uno stesso angolo β intercorrono le seguenti relazioni:

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta};\ \cot\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta};$$

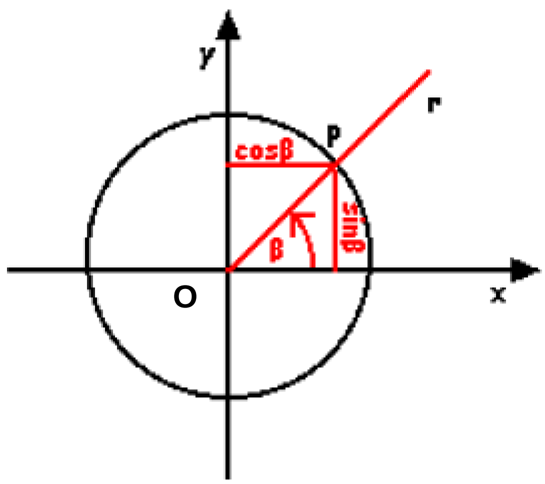
$$\tan\beta = \frac{1}{\cot\beta};\ \cot\beta = \frac{1}{\tan\beta};$$

LA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

Si chiama CIRCONFERENZA GONIOMETRICA una circonferenza orientata (senso di percorrenza positivo quello antiorario per convenzione) avente centro coincidente con l'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, di raggio unitario.



Dato un angolo β il punto P è l'intersezione fra il raggio ($\overline{OP}$=1) e la circonferenza.

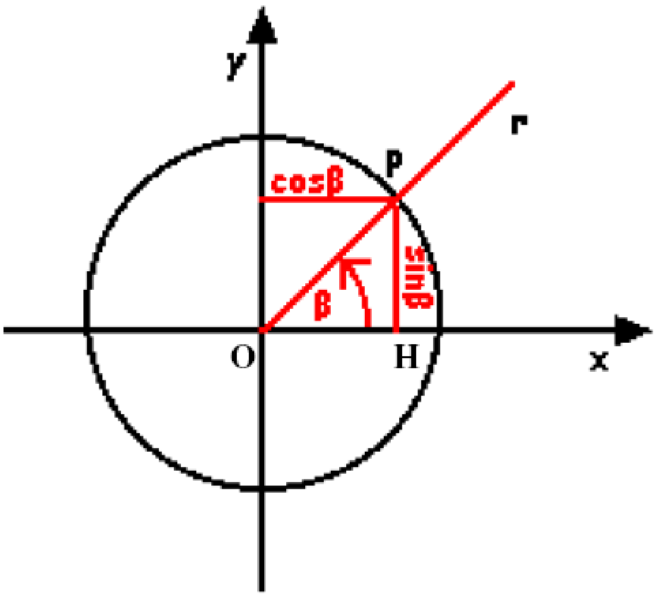


Seno e coseno di β sono rispettivamente l'ordinata e l'ascissa di P. Se riprendiamo le definizioni di seno e coseno:

$$\sin\beta = \frac{y_P}{\overline{OP}} = \frac{y_P}{1} = y_P;$$

$$\cos\beta = \frac{x_P}{\overline{OP}} = \frac{x_P}{1} = x_P;$$

PRIMA RELAZIONE FONDAMENTALE DELLA TRIGONOMETRIA



Nella figura i punti OPH formano un triangolo rettangolo dove l'ipotenusa vale 1 (per definizione la circonferenza goniometrica ha raggio unitario) e i cateti OH = cos β e PH = sin β

Utilizzando il teorema di Pitagora possiamo allora scrivere che:

$$\overline{PH}^2 + \overline{OH}^2 = \overline{OP}^2$$

$$\boxed{sin^2\beta + cos^2\beta = 1}$$

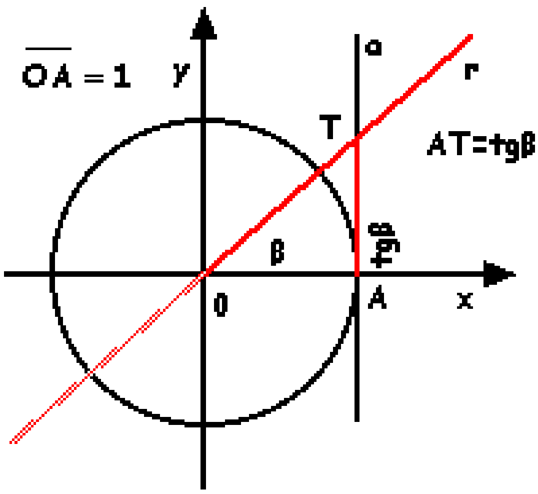
Da cui si ricava:

$$\sin\beta = \pm\sqrt{1 - cos^2\beta}$$

$$\cos\beta = \pm\sqrt{1 - sin^2\beta}$$

Tangente

Si consideri la retta a tangente alla circonferenza goniometrica nel punto di intersezione tra la circonferenza e l'asse delle ascisse positivo (A) e sia T il punto d'intersezione tra la retta a e la semiretta r uscente dall'origine che forma l'angolo β con l'asse delle ascisse positivo.



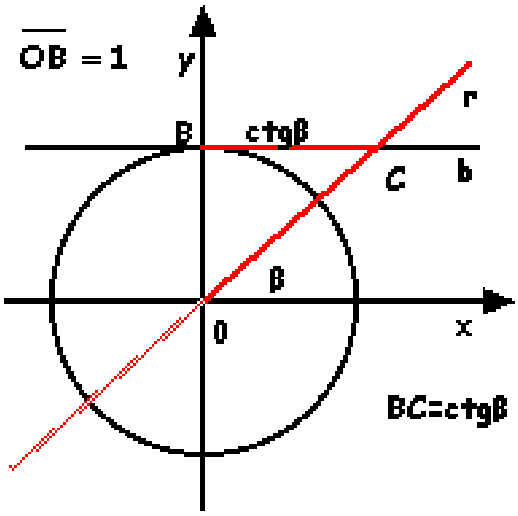
Come per seno e coseno considerando la semiretta r e il punto T, ignorando per un attimo la circonferenza:

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \overline{AT} = y_T$$

Quindi la tangente dell'angolo β è pari alla lunghezza del segmento tangente alla circonferenza compreso tra il punto A (intersezione tra la circonferenza e l'asse x) e T (intersezione tra retta tangente e il raggio vettore).

Cotangente

Si consideri la retta b tangente alla circonferenza goniometrica nel punto di intersezione tra la circonferenza e l'asse delle ordinate positivo (B) e sia C il punto d'intersezione tra la retta b e la semiretta r uscente dall'origine che forma l'angolo β con l'asse delle ascisse positivo.

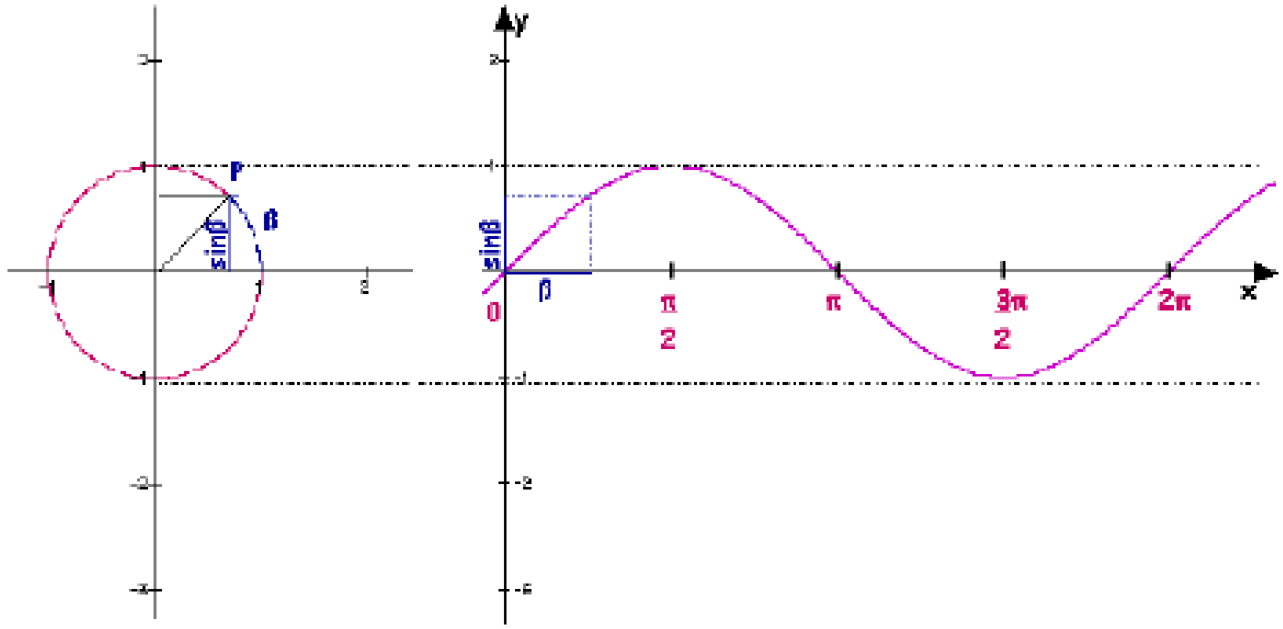


$$\cot\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \overline{BC} = x_C$$

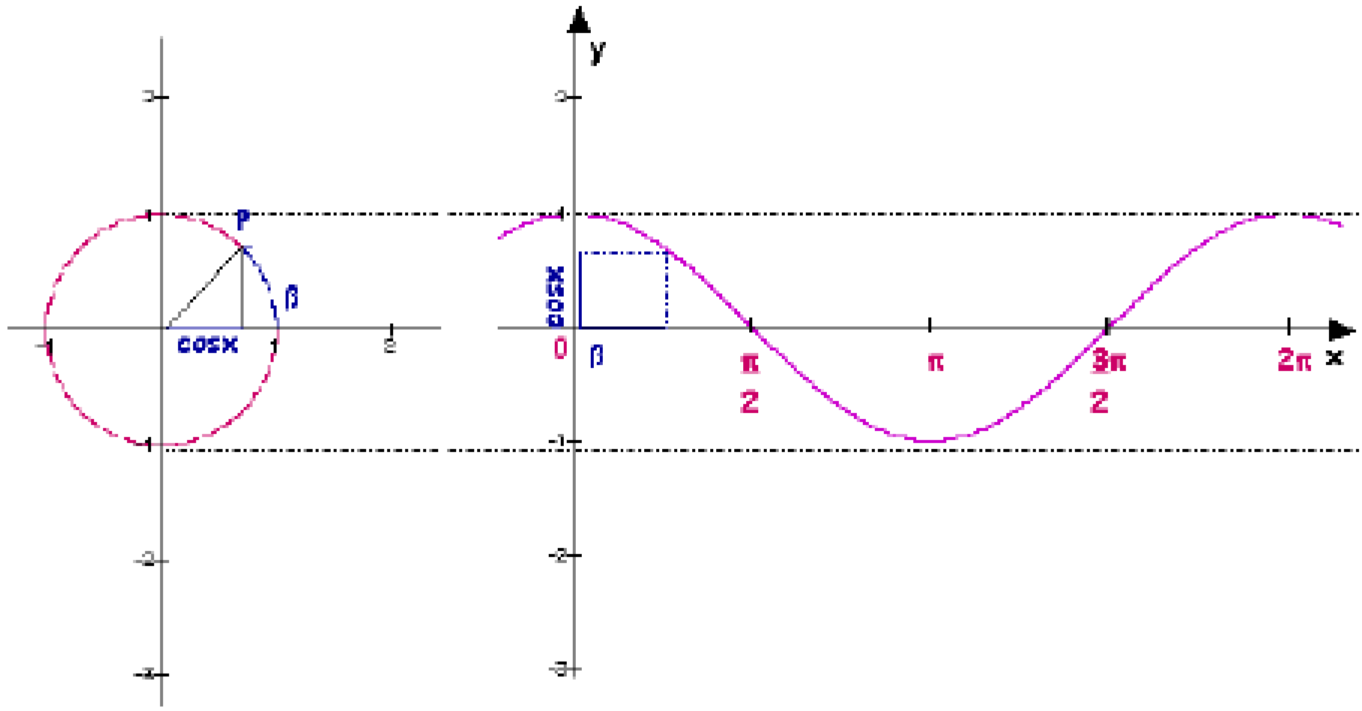
Quindi la cotangente dell'angolo β è pari alla lunghezza del segmento tangente alla circonferenza compreso tra il punto B (intersezione tra la circonferenza e l'asse y) e C (intersezione tra retta tangente e il raggio vettore).

Andamenti delle funzioni trigonometriche

- **Funzione SENO** $y = sin\,x$ $\rightarrow$ dominio: $x \in \mathcal{R}$ codominio: $-1 \le y \le 1$

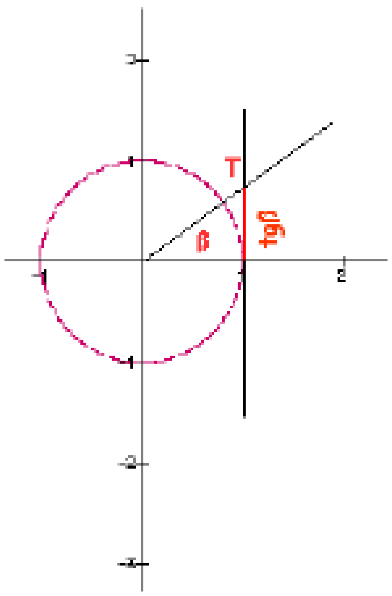


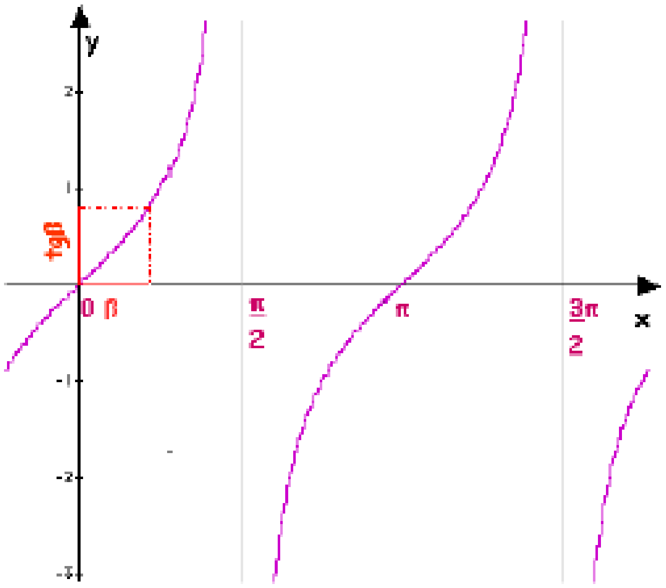
- **Funzione COSENO** $y = cos\,x$ $\rightarrow$ dominio: $x \in \mathcal{R}$ codominio: $-1 \le y \le 1$



- **Funzione TANGENTE** $y = \tan x$

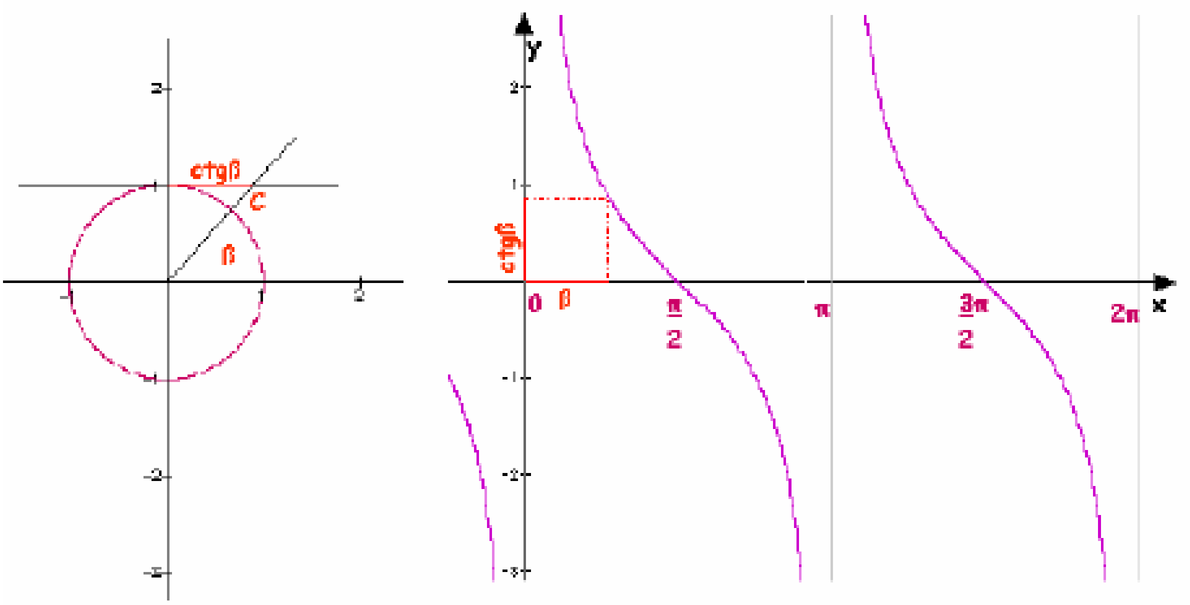
  $\rightarrow$ dominio: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ codominio: $y \in \mathcal{R}$





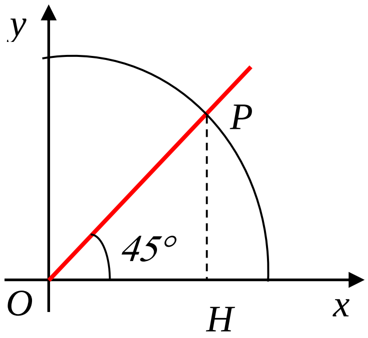
- **Funzione COTANGENTE** $y = \cot x$

  $\rightarrow$ dominio: $x \neq \pi + k\pi$ codominio: $y \in \mathcal{R}$



Dimostrazione geometrica angoli notevoli

$\beta = \frac{\pi}{4}$



Considero il triangolo OPH, retto in H. L'angolo in O è $\pi/4$ quindi anche quello in P è $\pi/4$.

$\Rightarrow$ il triangolo OPH è rettangolo ed isoscele $\Rightarrow \overline{OH} = \overline{PH}$

Considerando la circonferenza goniometrica ($\overline{OP} = 1$) e applicando il teorema di Pitagora:

$$\overline{OH}^2 + \overline{PH}^2 = 1 \quad \rightarrow \quad sin^2\frac{\pi}{4} + cos^2\frac{\pi}{4} = 1$$

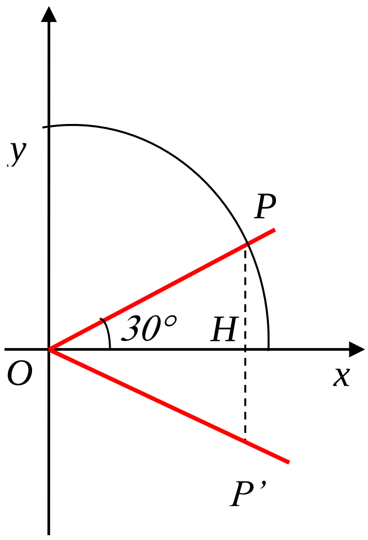
$$2sin^2\frac{\pi}{4} = 1 \ \rightarrow sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$sin\frac{\pi}{4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Avendo considerato un angolo nel primo quadrante:

$$\sin\frac{\pi}{4} = +\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = +\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\beta = \frac{\pi}{6}$



Considero il triangolo OPH, retto in H. L'angolo in O è π/6 quindi quello in P è π/3.

Se considero il punto P' simmetrico di P rispetto l'asse x il triangolo OPP' è equilatero poiché l'angolo in P è π/3, l'angolo in O è π/3 quindi anche quello in P' è π/3.

$$\overline{PH} = \frac{1}{2}\overline{OP}$$

Considerando la circonferenza goniometrica ($\overline{OP} = 1) \rightarrow \overline{PH} = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

Inserendo nella prima relazione fondamentale il valore del seno:

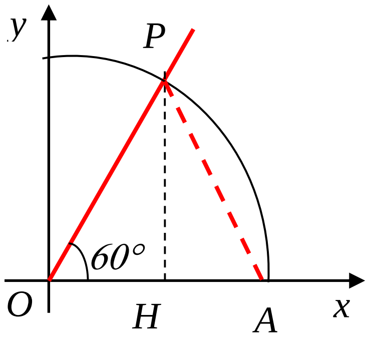
$$sin^2\frac{\pi}{6} + cos^2\frac{\pi}{6} = 1 \ \rightarrow \ \left(\frac{1}{2}\right)^2 + cos^2\frac{\pi}{6} = 1$$

$$cos^2\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad cos\frac{\pi}{6} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Avendo considerato un angolo nel primo quadrante:

$$\sin\frac{\pi}{6} = +\frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\beta = \frac{\pi}{3}$



Considero il triangolo OPH, retto in H. L'angolo in O è π/3 quindi quello in P è π/6.

⇒ Il triangolo OPH è la metà del triangolo rettandolo OPA.

Considerando la circonferenza goniometrica:

$$\overline{OP} = 1 \quad \overline{OH} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Applicando il teorema di Pitagora:

$$\overline{PH}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OH}^2$$

$$\overline{PH}^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} \rightarrow \sin\frac{\pi}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

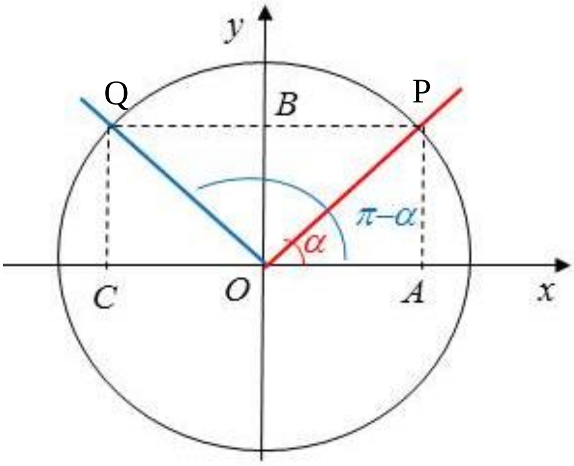
Avendo considerato un angolo nel primo quadrante:

$$\sin\frac{\pi}{3} = +\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = +\frac{1}{2}$$

GRADI	Rad	SEN	COS	TAN	COT
0°	0	0	1	0	∞
30°	π/6	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45°	π/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60°	π/3	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
90°	π/2	1	0	∞	0

Archi associati

Angoli supplementari (due angoli α e β sono supplementari se $\alpha + \beta = \pi$)



I triangoli rettangoli OCQ_{Δ} e OAP_{Δ} sono congruenti poiché hanno congruenti:

- l'ipotenusa ($\overline{OQ} = \overline{OP}$ = raggio della circonferenza)
- un angolo acuto (l'angolo in $\hat{O}$)

Quindi $\overline{PA} = \overline{QC}$ e $\overline{OC} = \overline{OA}$. Di conseguenza:

$$\sin\alpha = \overline{PA} \qquad \sin(\pi-\alpha) = \overline{QC} \qquad \rightarrow \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$

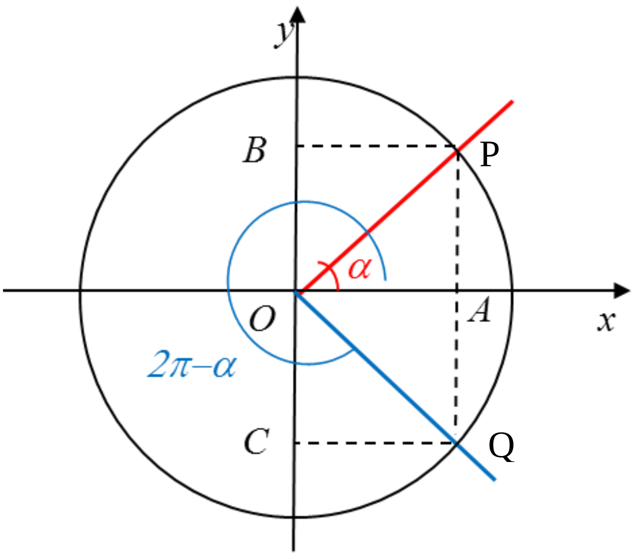
$$\cos\alpha = \overline{OA} \qquad \cos(\pi-\alpha) = \overline{OC} \qquad \rightarrow \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$

Nella relazione del coseno c'è il segno cambiato perché le due espressioni hanno segno opposto (il coseno OC nel secondo quadrante è negativo mentre il coseno OA nel primo quadrante è positivo).

$$\tan(\pi-\alpha) = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

$$\cot(\pi-\alpha) = \frac{\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha$$

Angoli esplementari (due angoli α e β sono supplementari se α + β = 2π)



I triangoli rettangoli QAO_{Δ} e PAO_{Δ} sono congruenti poiché hanno congruenti:

- l'ipotenusa ($\overline{OQ} = \overline{OP}$ = raggio della circonferenza)
- un angolo acuto (l'angolo in $\hat{O}$)

Quindi $\overline{PA} = \overline{QA}$. Di conseguenza:

$$\sin\alpha = \overline{PA} \qquad \sin(2\pi-\alpha) = \overline{QA} \quad \rightarrow \quad \sin(2\pi-\alpha) = -\sin\alpha$$

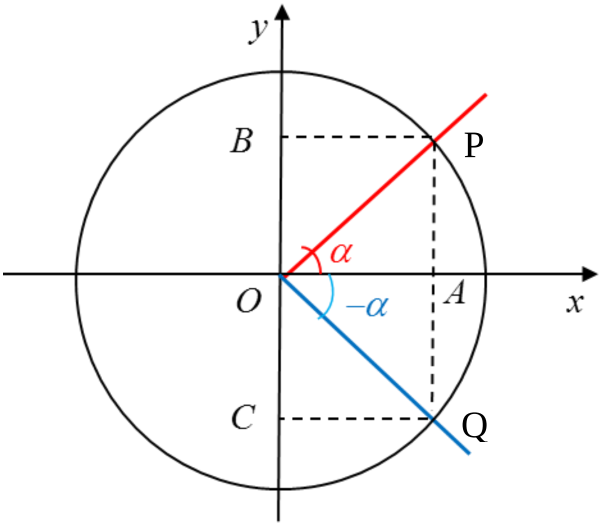
Nella relazione del seno c'è il segno cambiato perché le due espressioni hanno segno opposto (il seno QA nel quarto quadrante è negativo mentre il seno PA nel primo quadrante è positivo).

$$\cos\alpha = \overline{OA} \quad \cos(2\pi-\alpha) = \overline{OA} \quad \rightarrow \quad \cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(2\pi-\alpha) = \frac{\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(2\pi-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

$$\cot(2\pi-\alpha) = \frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(2\pi-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha$$

Angoli opposti



In analogia per quanto detto per gli angoli esplementari:

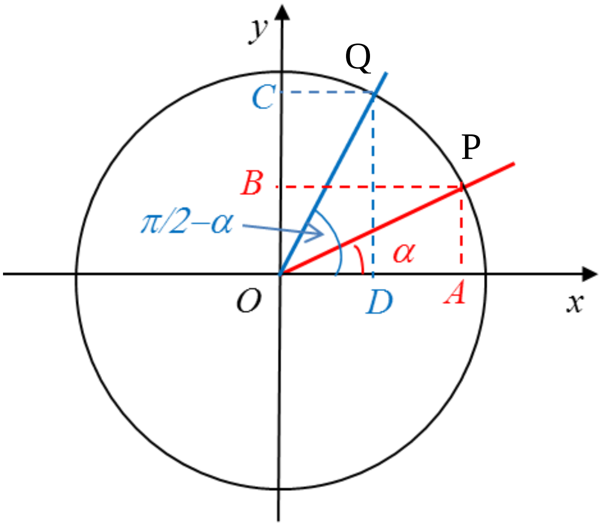
$$\sin\alpha = \overline{OB} \qquad \sin(-\alpha) = \overline{OC} \rightarrow \ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \overline{OA} \quad \cos(-\alpha) = \overline{OA} \rightarrow \ \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

<u>Angoli complementari</u> (due angoli α e β sono supplementari se α + β = π/2)



I triangoli rettangoli PAO_{Δ} e OQC_{Δ} e sono congruenti poiché hanno congruenti:

- l'ipotenusa ($\overline{OP} = \overline{OQ}$ = raggio della circonferenza)
- un angolo acuto (l'angolo in $\hat{O}$)

Quindi $\overline{OA} = \overline{OC}$ e $\overline{PA} = \overline{QC}$. Di conseguenza:

$$\sin\alpha = \overline{PA} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \overline{OC}$$

$$\cos\alpha = \overline{OA} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \overline{QC}$$

$$\rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha$$

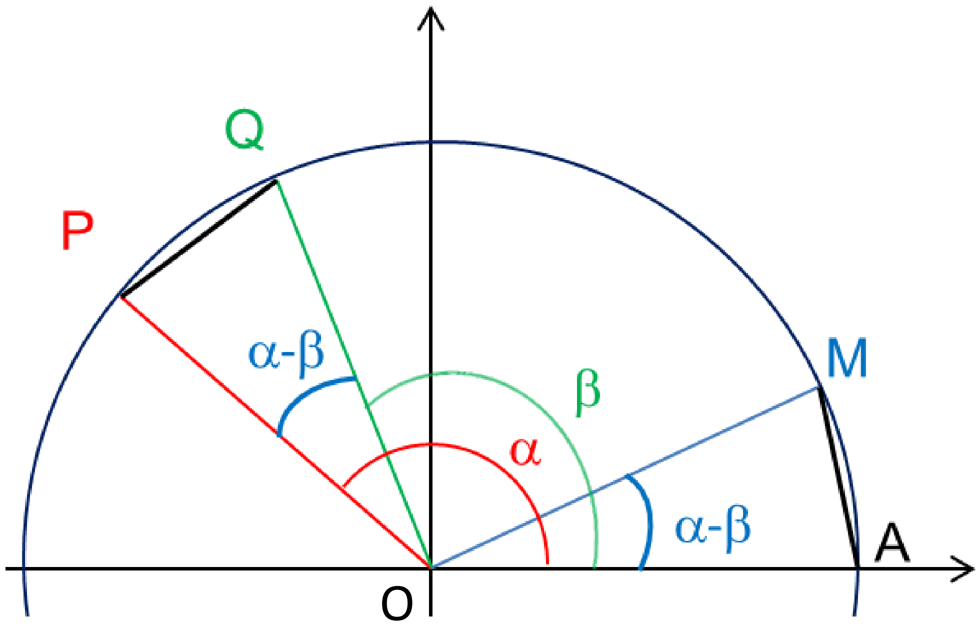
$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

Formule trigonometriche

In trigonometria esistono delle formule fondamentali che permettono di calcolare le funzioni goniometriche della somma di due angoli o della loro differenza, della metà, del doppio ecc. Si chiamano formule di: addizione, sottrazione, duplicazione, bisezione, parametriche, prostaferesi, Werner.

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Dimostriamo ora come si arriva alla formula di sottrazione del coseno:



Considero una circonferenza goniometrica e considero un angolo α e un angolo β.

$\widehat{AP}$ è l'arco sotteso dall'angolo α mentre $\widehat{AQ}$ è quello sotteso dall'angolo β. Le coordinate dei punti P e Q, per le definizioni di seno e coseno, sono:

$$P\ (\cos\alpha\,;\sin\alpha)$$

$$Q\ (\cos\beta\,;\sin\beta)$$

$\widehat{QP}$ è l'arco sotteso dall'angolo $\alpha-\beta$, sia M l'estremo dell'arco $\widehat{AM}$ tale che $\widehat{AM}=\widehat{QP}$.

Le coordinate del punto M saranno allora:

$$M\ (\cos(\alpha-\beta)\,;\sin(\alpha-\beta))$$

Poiché archi uguali sottendono corde uguali e poiché le coordinate del punto A, origine degli archi, sono (1,0), basterà applicare la formula per la distanza tra due punti porre la condizione $\overline{PQ}$= $\overline{AM}$.

Ricordando che la distanza tra due punti A e B è data da: $\overline{AB} = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$

$$\overline{PQ} = \overline{AM}$$

$$\sqrt{\left(y_P - y_Q\right)^2 + \left(x_P - x_Q\right)^2} = \sqrt{(y_M - y_A)^2 + (x_M - x_A)^2}$$

$$\sqrt{(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2} = \sqrt{[\sin(\alpha - \beta) - 0]^2 + [\cos(\alpha - \beta) - 1]^2}$$

Semplifico la radice e svolgo i quadrati:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta + \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta$$
$$= \sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) + 1 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

In base alla prima relazione fondamentale della trigonometria abbiamo che:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$
$$\sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) = 1$$

Quindi l’equazione diventa:

$$1 + 1 - 2\sin\alpha\sin\beta - 2\cos\alpha\cos\beta = 1 + 1 - 2\cos(\alpha - \beta)$$

Da cui semplificando si ottiene:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Analogamente si dimostra la formula di sottrazione del seno:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

E le formule di addizione di seno e coseno:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Ricaviamo per esempio la formula della addizione della tangente, le altre si ricavano in modo analogo:

- $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ nel caso in cui $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Dimostrazione:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

Dividiamo per $\cos\alpha\cos\beta$ che è non nullo nelle ipotesi date all'inizio per α e β:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Riassumendo le formule di addizione e sottrazione sono:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\alpha - \cot\beta}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

- $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

Dimostrazione: $\sin(2\alpha) = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

- $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Dimostrazione: $\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

- $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
- $\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$

FORMULE DI BISEZIONE

- $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

Dimostrazione: consideriamo la formula di duplicazione del coseno

$$\cos(2\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\beta$$

e la prima relazione fondamentale della trigonometria:

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow \cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$$

$$\cos(2\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\beta = 1 - \sin^2\beta - \sin^2\beta = 1 - 2\sin^2\beta$$

$$\rightarrow \cos(2\beta) = 1 - 2\sin^2\beta$$

$$\sin^2\beta = \frac{1-\cos(2\beta)}{2}$$

$$\sin\beta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(2\beta)}{2}}$$

Ponendo $2\beta = \alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

- $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

Dimostrazione: consideriamo la formula di duplicazione del coseno

$$\cos(2\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\beta$$

e la prima relazione fondamentale della trigonometria

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Rightarrow \sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$$

$$\cos(2\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\beta = \cos^2\beta - 1 + \cos^2\beta = 2\cos^2\beta - 1$$

$$\rightarrow \cos(2\beta) = 2\cos^2\beta - 1$$

$$\cos^2\beta = \frac{\cos(2\beta) + 1}{2}$$

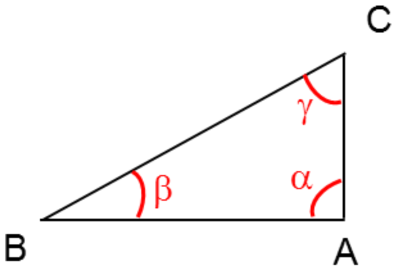
$$\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{\cos(2\beta) + 1}{2}}$$

Ponendo $2\beta = \alpha$ $\quad\Rightarrow\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}$

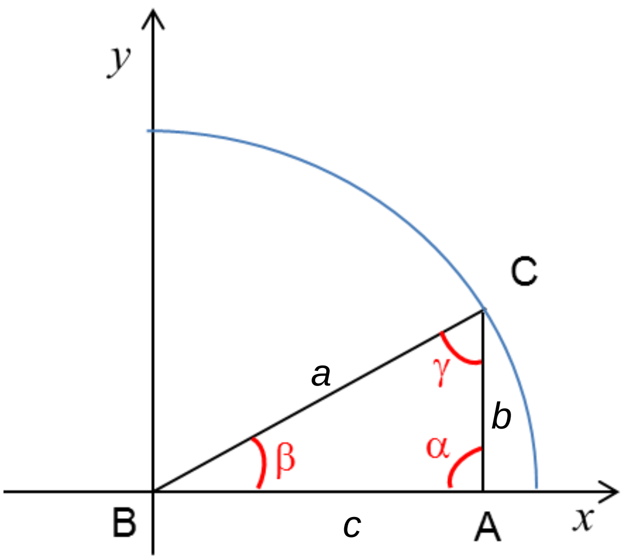
- $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$
- $\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

RELAZIONE TRA GLI ELEMENTI DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO

Consideriamo il seguente triangolo rettangolo:



Consideriamo ora lo stesso triangolo riferito però ad un sistema di assi cartesiani ortogonali avente l'origine in B, l'asse x nella direzione e nel verso del segmento BA, orientato da B verso A, il punto C giace nel 1° quadrante del suddetto sistema.



Per le definizioni date di funzioni trigonometriche avremo:

$$\sin\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{AC} = \overline{BC}\sin\beta$$

CATETO = IPOTENUSA * SENO dell'ANGOLO OPPOSTO AL CATETO

$$\cos\beta = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BA} = \overline{BC}\sin\beta$$

CATETO = IPOTENUSA * COSENO dell'ANGOLO ADIACENTE AL CATETO

$$\tan\beta = \frac{\overline{CA}}{\overline{BA}} \rightarrow \overline{CA} = \overline{BA}\tan\beta$$

CATETO *b* = CATETO *c* * TANGENTE dell'ANGOLO OPPOSTO AL CATETO *b*

$$\cot\beta = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}} \rightarrow \overline{BA} = \overline{CA}\cot\beta$$

CATETO *c* = CATETO *b* * COTANGENTE dell'ANGOLO ADIACENTE AL CATETO *c*

Coefficiente angolare di una retta

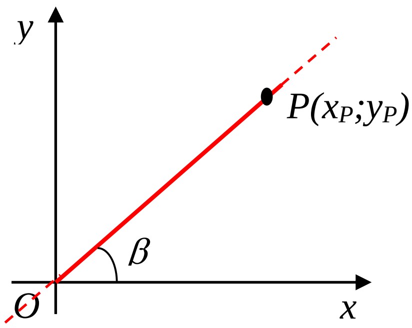
Si ricorda che l'equazione di una retta è della forma:

$$y = mx$$

con m costante detta COEFFICIENTE ANGOLARE della retta stessa.

E' evidente quindi che si avrà

$$m = \frac{y}{x}$$



Per la definizione di tangente, in ogni punto della retta vale:

$$\frac{y_P}{x_P} = \tan\beta \quad \rightarrow \quad m = \tan\beta$$

LIMITI

Alcune definizioni preliminari:

- ✓ Intorno completo di un punto → dato un numero reale x_0 si chiama intorno di x_0 un qualunque intervallo aperto $I(x_0)$ contenente x_0:

$$I(x_0) =]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2[$$

con δ_1 e δ_2 numeri reali positivi.

- ✓ Intorno circolare di x_0 → quando $\delta_1 = \delta_2$ il punto x_0 è il punto medio dell'intervallo: $I(x_0) =]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$

- ✓ Intorno destro di x_0 → $I_\delta^+(x_0) =]x_0; x_0 + \delta[$
- ✓ Intorno sinistro di x_0 → $I_\delta^-(x_0) =]x_0 - \delta; x_0[$

Per introdurre il concetto di limite consideriamo i seguenti esempi:

$f(x) = \frac{2x^2-8}{x-2}$ con $D_f = \Re - \{2\}$

In questo caso essendo il il numero 2 escluso dal dominio della funzione è chiaro che non esiste il valore di $f(2)$ E' però possibile attribuire alla variabile x valori che si trovano in un intorno del punto 2 ottenendo i seguenti risultati:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1	6	3	10
1,5	7	2,6	9,2
1,6	7,2	2,5	9
1,7	7,4	2,2	8,4
1,8	7,6	2,1	8,2
1,9	7,8	2,01	8,02
1,95	7,9	2,001	8,002
1,995	7,99	2,0004	8,0008
1,9991	7,9982	2,00001	8,00002
...	...	...	...

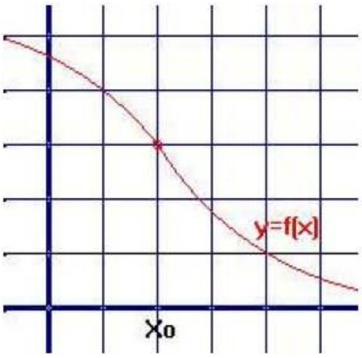
Intuitivamente accade allora che attribuendo all'incognita valori *vicini* al numero 2 il valore assunto della funzione *si avvicina* sempre più al numero 8

In matematica, il concetto di limite serve a descrivere l'andamento di una funzione all'avvicinarsi del suo argomento a un dato valore, oppure al crescere illimitato di tale argomento.

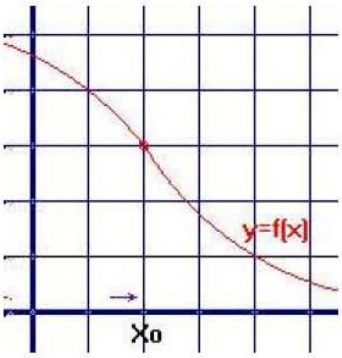
Esistono essenzialmente 4 tipi di limiti che andremo ad illustrare.

1. Limite finito per *x* che tende a un'ascissa finita:

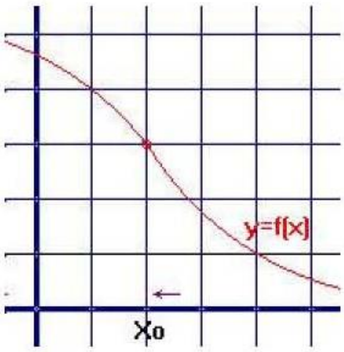
Consideriamo una funzione $y = f(x)$ e sia x_0 un'ascissa fissata (il pallino indica che in quel punto la funzione non è definita)



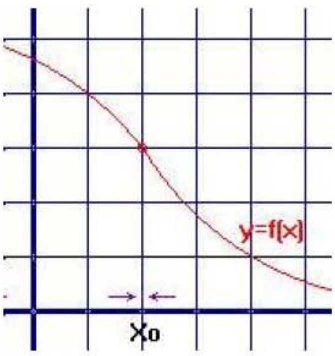
"**Far tendere x a x_0**" significa far assumere a x valori sempre più vicini a x_0.



Possiamo far tendere x a x_0 da sinistra (scriveremo $x \to x_0^-$)



Possiamo far tendere x a x_0 da destra (scriveremo $x \to x_0^+$)



o, ancora, quando non abbia importanza distinguere il caso dal caso , "bilateralmente"

(scriveremo $x \to x_0$)

Mentre si sta facendo tendere x a x_0, interessa stabilire a cosa tende (cioè si avvicina) il valore corrispondente di y. Se accade che quando x è molto prossimo a $\mathbf{x_0}$, l'ordinata corrispondente è molto prossima ad un certo valore **l** (come nel caso in questione, in cui per x prossimo a 2, y = f(x) è prossima a 3), allora si scriverà

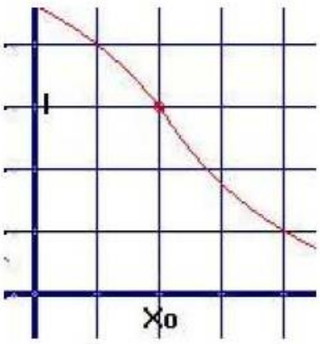
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Che si legge " il limite per x che tende a x_0, di f(x) è l"

<u>E' IMPORTANTE PUNTUALIZZARE CHE:</u>

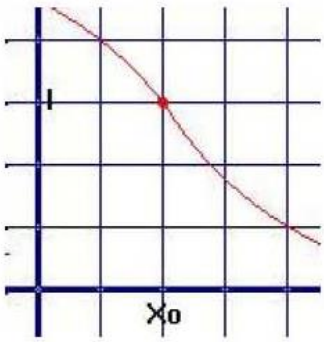
- Quando pensiamo $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non ci interessa minimamente cosa succede per x= x_0, anzi, la funzione in x= x_0 potrebbe anche non esistere
- E' in esame il comportamento della funzione <u>in **prossimità** di x_0, ma **non** in x_0</u>

Perciò le 3 funzioni seguenti sono perfettamente equivalenti dal punto di vista del limite.



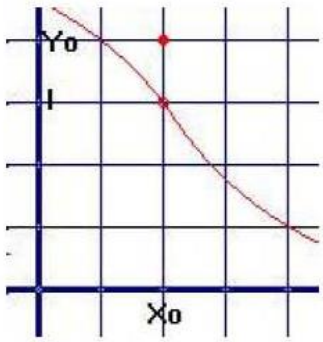
$f_1(x_0)$ *NON ESISTE*

$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = l$



$\exists\, f_2(x_0) = l$

$\lim_{x \to x_0} f_2(x) = l$

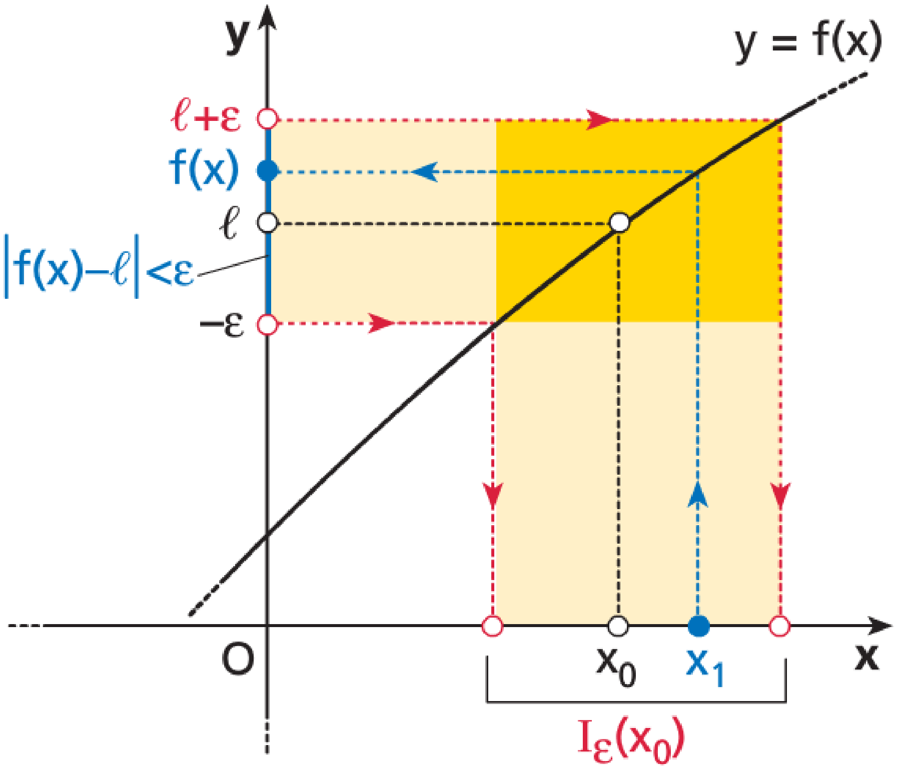


$\exists\, f_3(x_0) = y_0 \neq l$

$\lim_{x \to x_0} f_3(x) = l$

Non possiamo tuttavia a questo punto pretendere di aver DEFINITO in modo rigoroso cosa si intenda per "limite".

Il formalismo matematico traduce questi concetti nel modo seguente:



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \ \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) - \{x_0\}, |f(x) - l| < \varepsilon$$

Si dice che il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ è uguale ad l se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$, dove ε è un numero piccolo a piacere, esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni x appartenente all'intervallo $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, escluso al più x_0, la funzione $f(x)$ appartiene all'intervallo $(l - \varepsilon; l + \varepsilon)$

<u>Limite destro</u>

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \ \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) - \{x_0\}, |f(x) - l| < \varepsilon$$

<u>Limite sinistro</u>

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \ \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) - \{x_0\}, |f(x) - l| < \varepsilon$$

Verifica del limite di una funzione:

Verificare direttamente tramite la definizione di limite $\lim_{x\to 4}\left(\frac{x}{2}+5\right)=7$

Bisogna impostare la disequazione $\left|\frac{x}{2}+5-7\right|<\varepsilon$

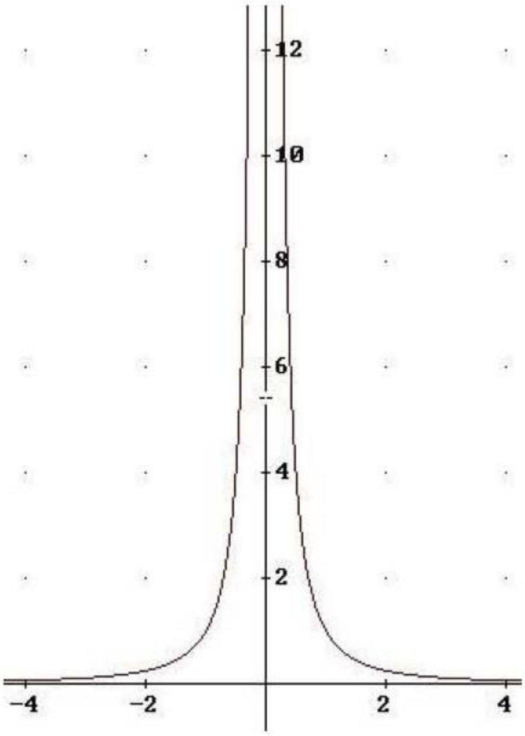
dove ε indica un numero >0 arbitrariamente fissato, poi di risolverla con l'obiettivo di far vedere che essa è verificata su tutto un intorno di $x_0=4$, privato al più del punto 4".

$$\left|\frac{x}{2}+5-7\right|<\varepsilon;\quad \left|\frac{x}{2}-2\right|<\varepsilon,\quad -\varepsilon<\frac{x}{2}-2<\varepsilon,\quad 2-\varepsilon<\frac{x}{2}<2+\varepsilon;$$

$$4-2\varepsilon<x<4+2\varepsilon$$

OK! La disequazione è verificata su tutto un intorno di $x_0=4$

2. Limite infinito per x che tende a un'ascissa finita:



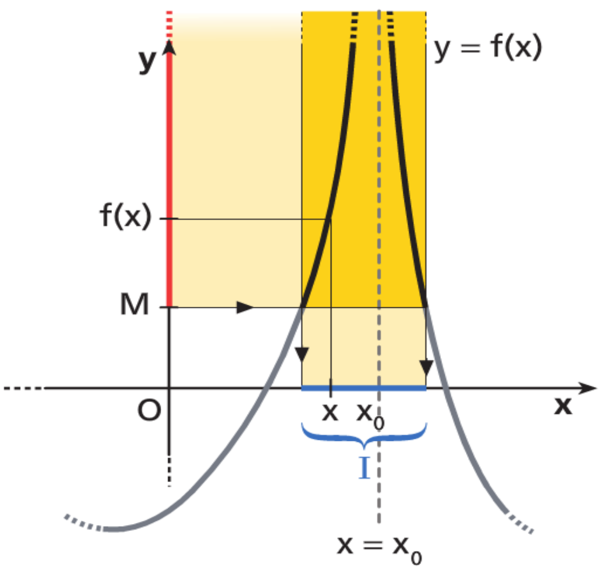
Consideriamo la funzione $y = f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ rappresentata qui a fianco. Diciamo che, al tendere di x a 0, la f(x) tende a +∞, perché constatiamo che quando x tende a 0, la y corrispondente assume valori sempre più alti

x	y=1/x²
1	1
0,1	100
0,01	10000
0,001	1000000
0,0001	100000000
0,00001	10000000000
0,000001	1000000000000
0,0000001	100000000000000

In generale la scrittura $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ viene utilizzata per indicare che

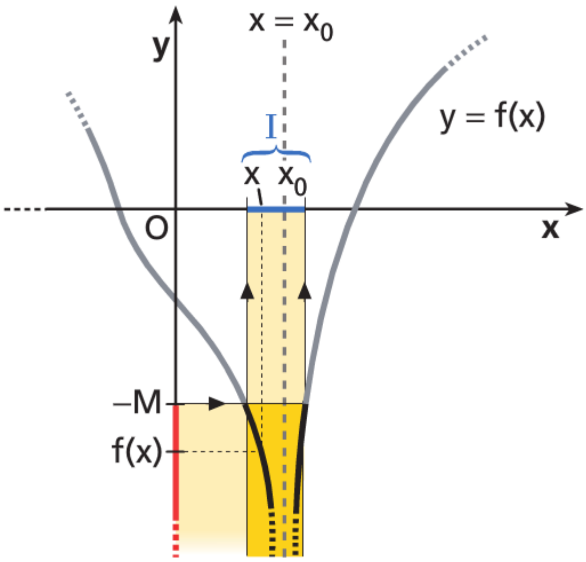
"al tendere di x a x0, la y diventa sempre più alta.

Il formalismo matematico diventa:



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \leftrightarrow \forall M > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) - \{x_0\}, f(x) > M$$

Si dice che il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ tende a $+\infty$ se e solo se per ogni $M > 0$, dove M è un numero grande a piacere, esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni x appartenente all'intervallo $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, escluso al più x_0, la funzione $f(x)$ risulta maggiore di M



Analogamente si dice:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \leftrightarrow \forall M > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) - \{x_0\}, f(x) < -M$$

APPLICAZIONE:VERIFICA DEL LIMITE DI UNA FUNZIONE

Verificare direttamente tramite la definizione di limite che: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$

Si tratterà di impostare la disequazione $\frac{1}{x^4} > M$

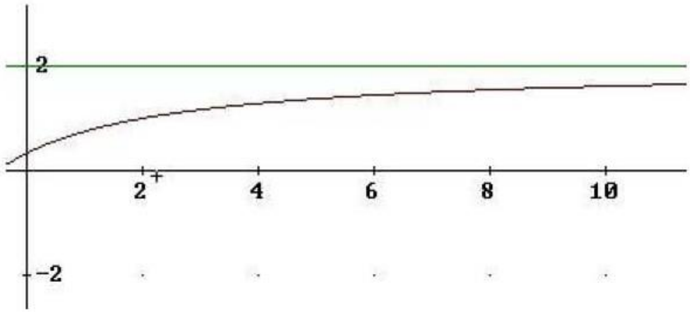
dove con M si indica un numero >0 arbitrariamente fissato, poi di risolvere la disequazione e far vedere che essa è verificata su tutto un intorno di $x_0=0$,

$\frac{1}{x^4} > M; \qquad x^4 < \frac{1}{M}, x \neq 0; \qquad |x| < \sqrt[4]{\frac{1}{M}}, x \neq 0;$

$-\sqrt[4]{\frac{1}{M}} < x < \sqrt[4]{\frac{1}{M}}, x \neq 0$

3. Limite finito per *x* che tende ad infinito:

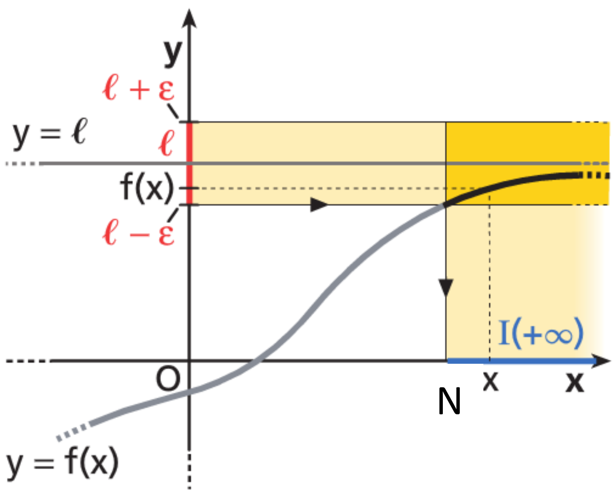
Consideriamo la funzione $y = f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$ sotto rappresentata.
In questo caso diciamo che al tendere della x a $+\infty$ la f(x) tende a 2, perché constatiamo che quando x viene presa positiva e molto grande la y corrispondente assume valori molto prossimi a 2.



x	y=(2x+1)/(x+3)
1	0,75
10	1,615384...
100	1,951456...
1000	1,995014...
10000	1,999500...

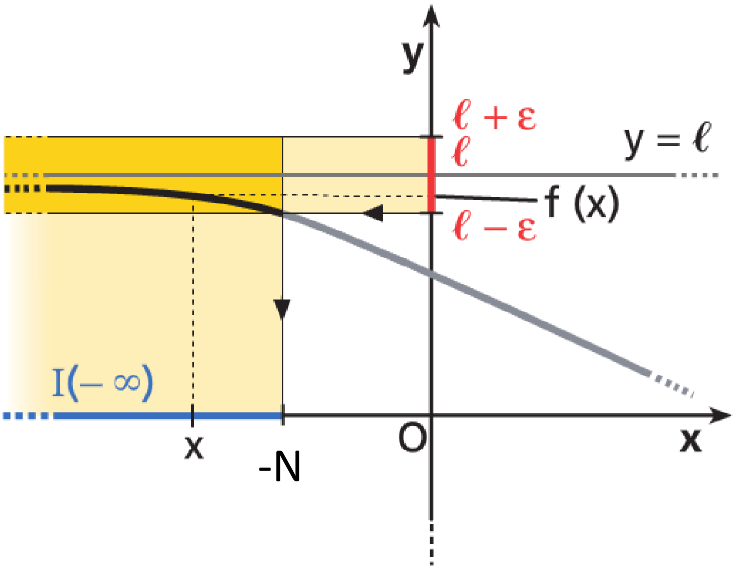
In generale la scrittura $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ indica che al tendere di x a $+\infty$, la y si avvicina al valore l.

Il formalismo matematico diventa:



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \ \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N > 0 \mid \forall x \in (N; +\infty), |f(x) - l| < \varepsilon$$

Si dice che il limite per x che tende a $+\infty$ di $f(x)$ è uguale a l se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$, dove ε è un numero piccolo a piacere, esiste un $N > 0$ tale che per ogni x appartenente all'intervallo $(N; +\infty)$ la funzione $f(x)$ appartiene all'intervallo $(l - \varepsilon; l + \varepsilon)$



Analogamente si dice:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N > 0 \mid \forall x \in (-\infty; -N), |f(x) - l| < \varepsilon$$

Applicazione: verifica del limite di una funzione

Verificare tramite la definizione di limite che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$$

Si tratta di impostare la disequazione: $\left|\frac{2x+1}{x} - 2\right| < \varepsilon$ dove con ε si indica un numero arbitrariamente fissato, occorre risolvere la disequazione e far vedere che essa è verificata su un intorno di +∞

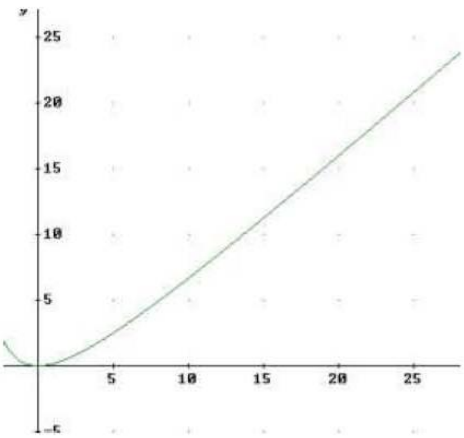
$$\left|\frac{2x+1}{x} - 2\right| < \varepsilon \rightarrow \left|\frac{2x+1-2x}{x}\right| < \varepsilon \rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \rightarrow -\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon \rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{\varepsilon} \\ x < -\frac{1}{\varepsilon} \end{cases}$$

È verificata $\forall\ x > \frac{1}{\varepsilon}$ ($\frac{1}{\varepsilon}$ numero grande poiché ε è molto piccolo) cioè $x \in \left(\frac{1}{\varepsilon}; +\infty\right)$ che è un intorno di +∞

4. Limite infinito per *x* che tende ad infinito:

Consideriamo la funzione $y = f(x) = \frac{x^2}{x+5}$

rappresentata qui a fianco, diciamo che, al tendere di x a +∞, la f(x) tende a +∞, perchè constatiamo che, quando x viene presa positiva e molto grande, la y corrispondente diventa altissima, così da oltrepassare, verso l'alto, qualunque barriera prefissata.



In generale, la scrittura

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

è utilizzata per indicare che

"per x grandissimo, la y assume valori grandissimi"

Possiamo avere quattro diversi casi:

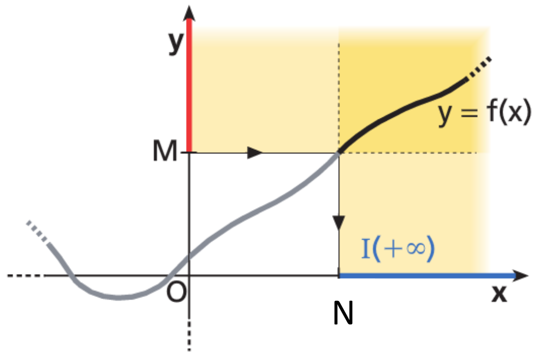
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

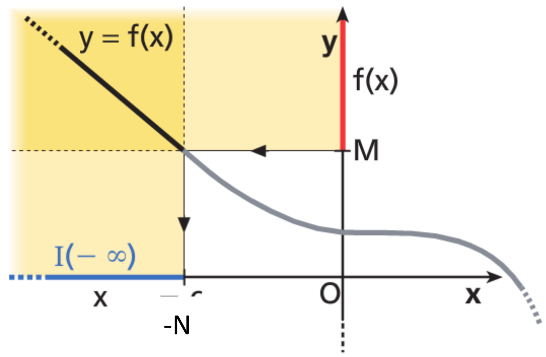
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \leftrightarrow \forall M > 0\ \exists N > 0 \mid \forall x \in (N; +\infty), f(x) > M$$

Si dice che il limite per x che tende a $+\infty$ di $f(x)$ è tende a $+\infty$ se e solo se per ogni $M > 0$, dove M è un numero grande a piacere, esiste un $N > 0$ tale che per ogni x appartenente all'intervallo $(N; +\infty)$ la funzione $f(x)$ appartiene all'intervallo $(M; +\infty)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \leftrightarrow \forall M > 0\ \exists N > 0 \mid \forall x \in (-\infty; -N), f(x) > M$$

Si dice che il limite per x che tende a $-\infty$ di $f(x)$ è tende a $+\infty$ se e solo se per ogni $M > 0$, dove M è un numero grande a piacere, esiste un $N > 0$ tale che per ogni x appartenente all'intervallo $(-\infty; -N)$ la funzione $f(x)$ appartiene all'intervallo $(M; +\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \leftrightarrow \forall M > 0\ \exists N > 0 \mid \forall x \in (N; +\infty), f(x) < -M$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \leftrightarrow \forall M > 0\ \exists N > 0 \mid \forall x \in (-\infty; -N), f(x) < -M$$

Teorema di unicità del limite

Sia f(x) una funzione definita in un intervallo I fatta eccezione al più per un punto $x_0 \in I$. Se esiste il limite di f(x) per $x \to x_0$ allora tale limite è unico.

Dimostrazione: Ragioniamo per assurdo e supponiamo che per $x \to x_0$ la funzione f ammetta due diversi limiti

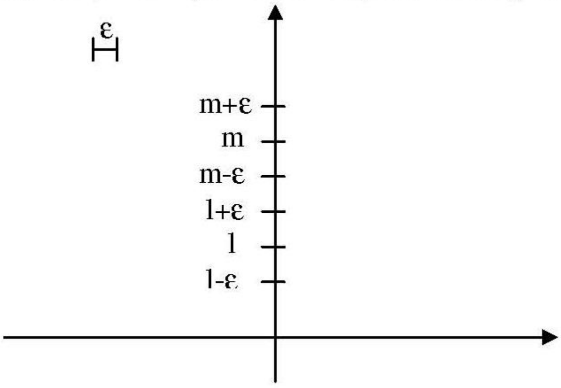
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad e \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = m \qquad con\, l \neq m$$

Per fissare le idee supponiamo che sia ***l<m***, inoltre dalla definizione di limite segue che:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1), con\ x \neq x_0 \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 / \forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2), con\ x \neq x_0 \Rightarrow m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon$$

dove ε è il solito valore scelto arbitrariamente piccolo. ε puo' essere scelto in modo tale che gli intervalli $(l - \varepsilon, l + \varepsilon) \quad e \quad (m - \varepsilon, m + \varepsilon)$ siano disgiunti.



Se $(l - \varepsilon, l + \varepsilon) \cap (m - \varepsilon, m + \varepsilon) = \varnothing$ (ossia non anno elementi in comune)

$$l + \varepsilon < m - \varepsilon$$

In base alle definizioni date di limite

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon < m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon$$

Assurdo!!!!

Operazioni sui limiti

1) Limite di una somma di funzioni

Siano **y=f(x) e y=g(x)** due funzioni tali che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$

allora si ha $\lim_{x\to x_0}\left[f(x) + g(x)\right] = l + m$

2) Limite di una differenza di funzioni

Siano **y=f(x) e y=g(x)** due funzioni tali che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$

allora si ha $\lim_{x\to x_0}\left[f(x) - g(x)\right] = l - m$

3) Limite di un prodotto di funzioni

Siano **y=f(x) e y=g(x)** due funzioni tali che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$

allora si ha $\lim_{x\to x_0}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = l \cdot m$

4) Limite di un quoziente di funzioni

Siano **y=f(x) e y=g(x)** due funzioni tali che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$ **con m≠0**

allora si ha $\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{l}{m}$

5) Limite del valore assoluto di una funzione

- Sia f(x) una funzione tale che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ allora si ha che $\lim_{x\to x_0}\left|f(x)\right| = \left|l\right|$
- Sia f(x) una funzione tale che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ allora si ha che $\lim_{x\to x_0}\left|f(x)\right| = +\infty$

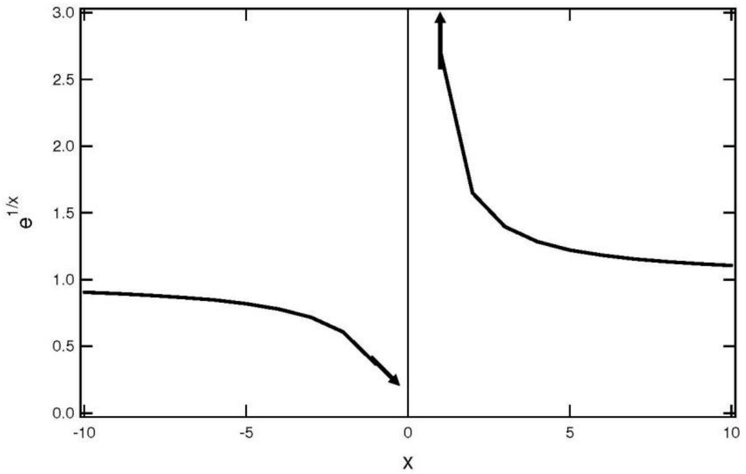
Esempi di funzioni che non ammettono limite:

Una funzione non ammette limite se:

- ✓ esiste il limite destro e limite sinistro della funzione per $x \to x_0$ ma sono diversi tra loro quindi la funzione non ammette il limite per $x \to x_0$

Esempio: $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} e^{1/x} = ?$

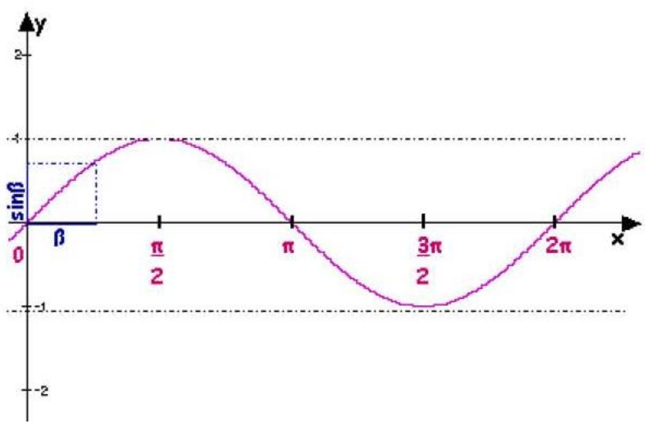
$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0 \qquad\qquad \lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty$$



- ✓ il limite non esiste

Esempio: $f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \sin x = non\ esiste$

La funzione continua ad oscillare tra +1 e -1



Calcolo dei limiti

1) Sfruttando il teorema per cui il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti posso risolvere esercizi del tipo:

$$\lim_{x \to 1}(x^2 - x + 1) = 1 - 1 + 1 = 1$$

2) Sfruttando il teorema per cui il limite di un prodotto è uguale al prodotto dei limiti posso risolvere esercizi del tipo:

$$\lim_{x \to 3} x^2 (1 + x) = 9 \cdot 4 = 36$$

3) Sfruttando il teorema per cui il limite di un quoziente è uguale al quoziente dei limiti posso risolvere esercizi del tipo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 1}{1 - 2x} = 1$$

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x - a} = \infty$$

! Ricorda $\frac{\infty}{0} = \infty, \quad \frac{0}{\infty} = 0, \quad \frac{n}{0} = \infty, \quad \frac{\infty}{n} = \infty, \quad \frac{n}{\infty} = 0, \quad \frac{0}{n} = 0$

Forme indeterminate

Si considerano invece forme indeterminate le forme del tipo:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad +\infty - \infty$$

Ogni volta che il calcolo del limite conduce a una forma indeterminata, si dovrà cercare di trasformare la funzione in modo adeguato, senza ovviamente modificare il limite e allo scopo di rimuovere, nella nuova forma, l'indeterminazione.

Casi di indeterminazione e modi per risolverla:

$$\mathbf{1)}\ \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$$

Funzioni fratte: se andando a sostituire il valore x_0 nella funzione fratta e si annullano sia numeratore che denominatore per il teorema di Ruffini significa che sono entrambi divisibili per $(x - x_0)$ quindi posso semplificarli entrambi per $(x - x_0)$:

- $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \frac{0}{0} \quad \to \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x} = 2$

- $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \frac{0}{0}$

Il numeratore è la differenza di due cubi: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Il denominatore è il cubo di un binomio: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)^3} = \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)^2} = \frac{12}{0^+} = +\infty$$

Funzioni irrazionali: si deve provare a razionalizzare sia numeratore che denominatore:

- $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}} = \frac{0}{0}$

razionalizzo prima il numeratore:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to 2} \frac{\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}\right)}{\sqrt{x-2}\ \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x + 2 - 2x}{\sqrt{x-2}\ \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{2 - x}{\sqrt{x-2}\ \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}\right)} = \frac{0}{0}$$

ancora forma indeterminata, quindi razionalizzo il denominatore

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2 - x}{\sqrt{x-2}\ \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{(2-x)\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}\ \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}\right)\sqrt{x-2}} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(2-x)\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}\ \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}\right)\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to 2} \frac{(2-x)\sqrt{x-2}}{(x-2)\ \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-(x-2)\sqrt{x-2}}{(x-2)\ \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}\right)} = \lim_{x \to 2} \frac{-\sqrt{x-2}}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x}\right)} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\mathbf{2)}\ \frac{\infty}{\infty}$$

Sia per le funzioni fratte che per le irrazionali si deve mettere in evidenza al numeratore e al denominatore la potenza di x con esponente massimo:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^6+x^3}{x^3+x^2} = \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^6+x^3}{x^3+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^6\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

Per $x\to\infty$ si ha che $\frac{1}{x^3}\to 0$ e $\frac{1}{x}\to 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x} = \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} = 1$$

Per $x\to\infty$ si ha che $\frac{1}{\sqrt{x}}\to 0$ e $\frac{2}{\sqrt{x}}\to 0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2+x+2} = \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2+x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1/2}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} = 0$$

Per $x\to\infty$ si ha che per il numeratore $\frac{1}{x}\to 0 \Rightarrow \sqrt{1-\frac{1}{x}} = 1$;

per il denominatore $\frac{1}{x}\to 0$; $\frac{1}{x^2}\to 0 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right) = 1$

Quindi possiamo riassumere che: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{B*x^\beta}{A*x^\alpha} = \begin{cases} 0 \text{ se } \alpha>\beta \\ \pm\infty \text{ se } \alpha<\beta \\ \frac{B}{A} \text{ se } \alpha=\beta \end{cases}$

3) $+\infty - \infty$

Si deve ricondurre, tramite trasformazioni alla forma $\frac{\infty}{\infty}$:

- $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right) = +\infty - \infty$

Se compaiono delle radici si può provare a razionalizzare:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

Ora posso procedere come nel metodo precedente:

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)} = -\frac{1}{2}$$

Per $x\to\infty$ si ha che $\frac{1}{x}\to 0 \Rightarrow \sqrt{1-\frac{1}{x}} = 1$

- $\lim_{x\to-\infty}[\log(1-3x)-\log(4-5x)] = +\infty - \infty$

In questo caso posso provare a scrivere in modo diverso la funzione applicando le proprietà dei logaritmi:

$$\lim_{x\to-\infty}[\log(1-3x)-\log(4-5x)] = \lim_{x\to-\infty}\log\frac{1-3x}{4-5x} = \log\frac{\infty}{\infty}$$

Ora posso procedere come nel metodo precedente:

$$= \lim_{x\to-\infty}\log\frac{1-3x}{4-5x} = \lim_{x\to-\infty}\log\frac{x\left(\frac{1}{x}-3\right)}{x\left(\frac{4}{x}-5\right)} = \lim_{x\to-\infty}\log\frac{\left(\frac{1}{x}-3\right)}{\left(\frac{4}{x}-5\right)} = \log\frac{3}{5}$$

Per $x\to\infty$ si ha che $\frac{1}{x}\, e\, \frac{4}{x}\to 0$

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2(1-\cos x)}-\frac{1}{\sin^2 x}\right]=\infty-\infty$

In questo caso posso provare a scrivere in modo diverso la funzione applicando le formule che conosco della trigonometria:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2(1-\cos x)}-\frac{1}{\sin^2 x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2(1-\cos x)}-\frac{1}{(1-\cos^2 x)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2(1-\cos x)}-\frac{1}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1+\cos x-2}{2(1-\cos x)(1+\cos x)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cos x-1}{2(1-\cos x)(1+\cos x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{-(1-\cos x)}{2(1-\cos x)(1+\cos x)}\right]==\lim_{x\to 0}\left[\frac{-1}{2(1+\cos x)}\right]=-\frac{1}{4}$$

4) $\mathbf{0}\cdot\infty$

Si deve provare a scrivere in modo diverso la funzione:

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1-\sin x)\cdot\tan x\ =0\cdot\infty$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1-\sin x)\cdot\tan x\ =\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1-\sin x)\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\ =\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1-\sin x)\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}==\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

limiti notevoli

esponenziali e logaritmici

1) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

2) $\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

3) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^a = e^a$

4) $\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$

5) $\lim_{x \to 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$

6) $\lim_{x \to 0} \lg_a (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\lg_e a}$

7) $\lim_{x \to 0} \frac{\lg_a (1 + x)}{x} = \lg_a e = \frac{1}{\ln a}$

8) $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

9) $\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^a - 1}{x} = a$

trigonometrici

1) $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ ax}{bx} = \frac{a}{b}$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{tg\ x}{x} = 1$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{tg\ ax}{bx} = \frac{a}{b}$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

6) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

Dimostrazione del limite fondamentale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Consideriamo il limite destro $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$ e il limite sinistro $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x}$.

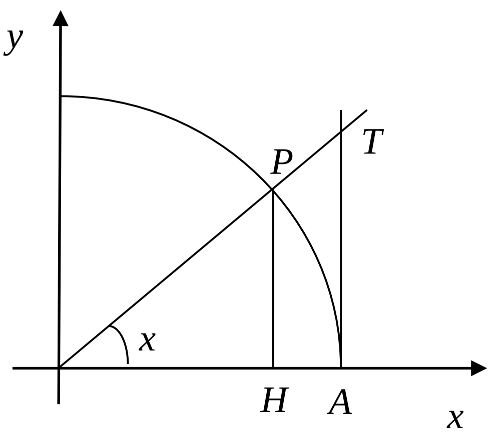
Se $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x}$ allora esiste il limite bilaterale.

Se prendiamo il limite sinistro, poiché la funzione seno è una funzione dispari:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x}{-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$$

Quindi limite destro e limite sinistro sono uguali. Posso quindi limitarmi a dimostrare il limite destro.

Dimostriamo questo limite in modo geometrico utilizzando la circonferenza goniometrica (r=1) e considerando un angolo x nel primo quadrante: guardando la figura si vede che il segmento $\overline{PH}$ è minore dell'arco $\widehat{PA}$ che è a sua volta minore del segmento $\overline{TA}$.



$$\overline{PH} < \widehat{PA} < \overline{TA}$$

Ma i segmenti $\overline{PH}$ e $\overline{TA}$non sono altro che rispettivamente il seno e la tangente dell'angolo x mentre l'arco $\widehat{PA}$ corrisponde all'angolo x misurato in radianti

$$x_{rad} = \frac{\widehat{PA}}{\overline{OP}} \quad \text{ma } \overline{OP} = 1$$

$$\sin x < x < \tan x$$

Divido tutto per $\sin x$ che nel primo quadrante è positivo:

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Faccio i reciproci, cambiando il verso della disequazione:

$$\cos x < \frac{sin\ x}{x} < 1$$

Passo ai limiti:

$$\lim_{x \to 0} \cos x < \lim_{x \to 0} \frac{sin\ x}{x} < \lim_{x \to 0} 1$$

$$1 < \lim_{x \to 0} \frac{sin\ x}{x} < 1$$

Quindi $\lim_{x \to 0} \frac{sin\ x}{x} = 1$ poiché compreso tra 1 e 1

FUNZIONI CONTINUE

Definizione di funzione continua in un punto e in un intervallo

Si dice che una funzione f(x), definita in un intervallo [a,b] è continua nel punto x_0 (interno a questo intervallo) se risulta:

$$\boxed{f \text{ continua in } x_0 \xleftrightarrow{def.} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

In altre parole, la funzione *f(x)* è continua nel punto x_0 quando si verificano queste tre circostanze:

- ✓ esiste il valore della funzione nel punto x_0,
- ✓ esiste il limite della funzione per $x \to x_0$,
- ✓ il limite coincide con il valore della funzione nel punto x_0.

Possiamo anche dire che

$$f \text{ continua in } x_0 \xleftrightarrow{def.} \text{esistono sia } \lim_{x \to x_0-} f(x) \text{ che } \lim_{x \to x_0+} f(x) \text{ e sono entrambi uguali a } f(x_0)$$

Se, invece della, vale soltanto la relazione:

$\lim_{x \to x0+} f(x) = f(x_0)$ allora si dice che la funzione è ***continua a destra*** del punto x_0

Analogamente, se vale soltanto la relazione:

$\lim_{x \to x0-} f(x) = f(x_0)$ *si dice che la funzione è* ***continua a sinistra*** *del punto* x_0

Una funzione $y = f(x)$ si dice continua in un intervallo I,se è continua in ogni punto di I.

Dalla definizione di continuità e dai teoremi sui limiti precedentemente enunciati, segue il seguente Teorema:

*Se due funzioni sono continue in un punto x_0 , sono pure continue in x_0 la loro **somma**, la loro **differenza**, il loro **prodotto**, il loro **quoziente**, ammesso in quest'ultimo caso che la funzione al denominatore non si annulli in x_0.*

Per facilitare ulteriormente la comprensione di quanto espresso può essere utile il seguente esempio:

Sia data la funzione:

$$\boxed{y=3x+1}$$

e si voglia verificare la continuità della stessa in un punto $x_0=2$ appartenente all'intervallo di definizione. Per quanto affermato al punto bisogna prima verificare:

- che esista il valore della funzione nel punto x_0:

$$y = 3\cdot(2)+1 = 7$$

Da ciò si evince che il valore della funzione nel punto x_0 esiste ed è uguale a 7.

- Dobbiamo adesso verificare che esista il limite della stessa funzione per $x \to 2$ e che questo limite sia uguale al valore della funzione in x_0, ossia a 7:

$$\lim_{x \to 2} (3x+1) = 7$$

Per provare ciò, dobbiamo vedere se, fissato un numero ε**>0** piccolo a piacere, la disequazione:

$|3x+1-7|<\varepsilon$ che si può anche scrivere $|3x-6|<\varepsilon$

sia soddisfatta per tutti i valori della **x** che formano un intorno completo del punto x_0=**2**. Applicando i toremi sul valore assoluto, otteniamo:

$6-\varepsilon < 3x < 6+\varepsilon$ da cui $2-\varepsilon/3 < x < 2+\varepsilon/3$

scrittura, quest'ultima, che equivale alla definizione di un intorno completo del punto x_0=**2**. Perciò abbiamo anche verificato che il limite della funzione esiste ed è uguale a 7. Si conclude affermando che <u>la funzione **y=3x+1** è continua nel punto x_0=**2**</u>.

<u>Diciamo che per le funzioni che si utilizzano più frequentemente (ottenute operando in svariati modi su funzioni algebriche, goniometriche, logaritmiche, esponenziali ...) la continuità è "la norma", mentre la discontinuità è " l'eccezione".</u>

LA CONTINUITA' DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

Come abbiamo visto, se una funzione è continua, il calcolo del limite non presenta difficoltà. Per questo motivo è importante sapere quali sono le principali funzioni continue. Consideriamone alcune:

Funzioni razionali:

1) Una funzione costante, *y=K (k costante)*, è continua in ogni punto; cioè $\lim_{x \to x_0} k = k$;

2) Una funzione identità *y=x*, è continua in ogni punto; cioè $\lim_{x \to x_0} x = x_0$;

3) Una funzione $y=x^n$ *(n intero positivo)*, è una funzione continua in ogni punto perché prodotto di funzioni continue;

4) Per lo stesso motivo di cui al punto 3), la funzione $y=Kx^n$ *(k costante)*, è una funzione continua;

5) Ogni funzione razionale intera: $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$, è continua per ogni valore della *x*, perché somma di funzioni continue;

6) Ogni funzione razionale fratta: $y = \frac{A(x)}{B(x)}$, con *A(x)* e *B(x)* polinomi in *x*, è continua per ogni valore della *x* che non annulla il denominatore perché quoziente di funzioni continue.

Funzioni trigonometriche:

1) Le funzioni *y=senx* e *y=cosx* sono continue per ogni valore della x; cioè: $\lim_{x \to x_0} senx = senx_0$ e $\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$;

2) La funzione $y = tgx = \frac{senx}{\cos x}$, in quanto quoziente di funzioni continue, è continua per ogni valore che non annulli il denominatore; ossia per $x \neq \pm\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Funzioni esponenziali e logaritmiche:

1) La funzione *$y=a^x$ (con $a>0$)*, è continua per ogni valore della x, cioè risulta, qualunque sia x_0: $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$;

2) La funzione *$y=\log_a x$ (con $a>0$ e $a\neq 1$)*, è continua per ogni valore positivo della x, cioè risulta, qualunque sia il numero positivo x_0: $\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0$.

Funzioni potenza e Funzioni irrazionali:

1) La funzione *$y=x^\alpha$ (con $\alpha\in\Re$))*, è continua per ogni valore della x>0, cioè risulta, qualunque sia il numero positivo x_0: $\lim_{x\to x_0} x^\alpha = {x_0}^\alpha$;

3) La funzione $y=\sqrt[n]{x}$, è continua per ogni valore positivo o nullo della x, cioè risulta, qualunque sia il numero positivo o nullo x_0: $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$.

Dimostrazione della continuità di alcune funzioni elementari

Osservazione preliminare: poiché

$$f \ continua \ in \ x_0 \xleftrightarrow{def.} \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

per dimostrare che una data funzione $f(x)$ è continua in x_0 si imposterà la disequazione

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

con l'obiettivo di far vedere che essa è verificata su tutto un intorno di x_0

- **La <u>funzione costante</u> f(x)=k è continua per ogni $x_0 \in \Re$**

La tesi è: $\lim_{x \to x_0} k = k \quad \forall x_0 \in \Re$

Dimostrazione.

Consideriamo un qualunque $x_0 \in R$

Impostiamo la disequazione:

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ per stabilire da quali valori di x è verificata.

Essa diventa, nella fattispecie:

$| k - k | < \varepsilon$

e ci rendiamo immediatamente conto che è verificata qualunque fosse l' x considerato in partenza,

vale a dire su tutto R; quindi la disequazione posta è verificata su tutto un intorno di x_0.

- **La <u>funzione identità</u> f(x)=x è continua per ogni $x_0 \in \Re$**

Tesi: $\lim_{x \to x_0} x = x_0 \quad \forall x_0 \in \Re$

Dimostrazione.

Consideriamo un qualunque $x_0 \in R$

Impostiamo la disequazione: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Essa diventa, nella fattispecie:

$| x - x_0 | < \varepsilon$

ed è verificata per $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, che è un intorno di x_0.

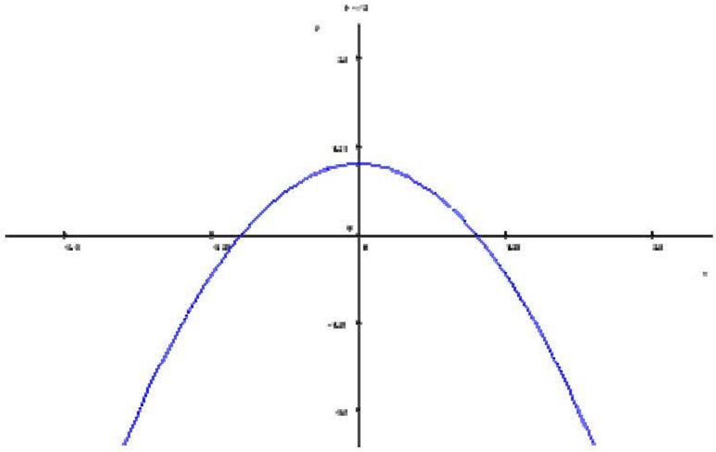
FUNZIONI LIMITATE E ILLIMITATE

Sia y=f(x) una funzione definita da $A \rightarrow B$ con $A, B \in \Re$.

Diamo le seguenti definizioni

Si dice che f(x) è superiormente limitata quando l'insieme immagine B della funzione stessa è superiormente limitato

Un esempio di funzione superiormente limitata è quello fornito dalla funzione rappresentata in figura



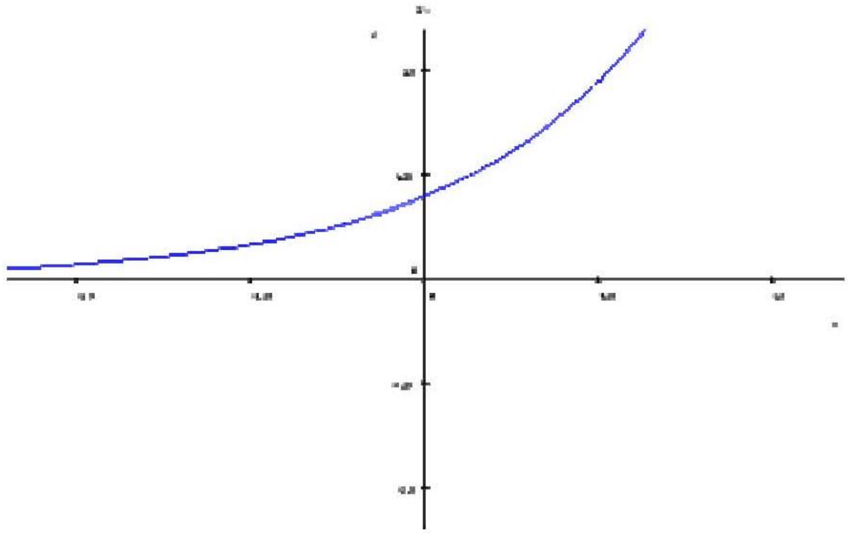
$$f(x) = -x^2 + 1$$

- dire che f(x) è superiormente limitata significa affermare che

$$\exists m \in \Re : \forall x \in A \; f(x) \leq m$$

Si dice chef(x) è inferiormente limitata quando l'insieme immagine B della funzione stessa è inferiormente limitato

Un esempio di funzione inferiormente limitata è quello fornito dalla funzione rappresentata in figura



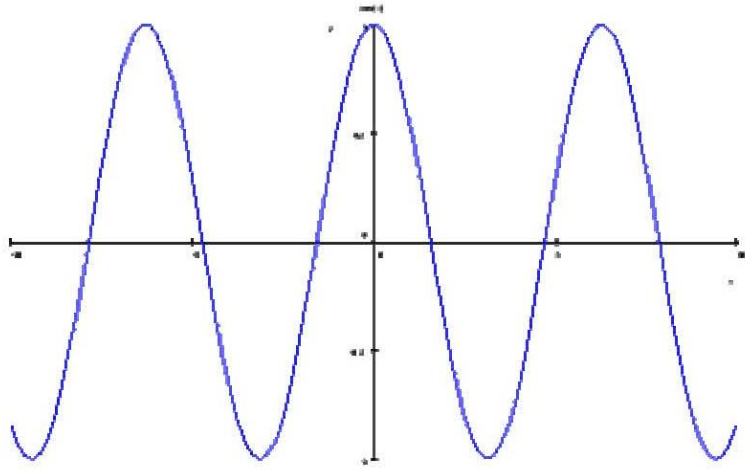
$$f(x) = 2^x$$

- dire che f(x) è inferiormente limitata significa affermare che

$$\exists m \in \Re : \forall x \in A \; f(x) \geq m$$

Si dice che f(x) è limitata quando l'insieme immagine B della funzione stessa è limitato.

Un esempio di funzione limitata è quello fornito dalla funzione rappresentata in figura



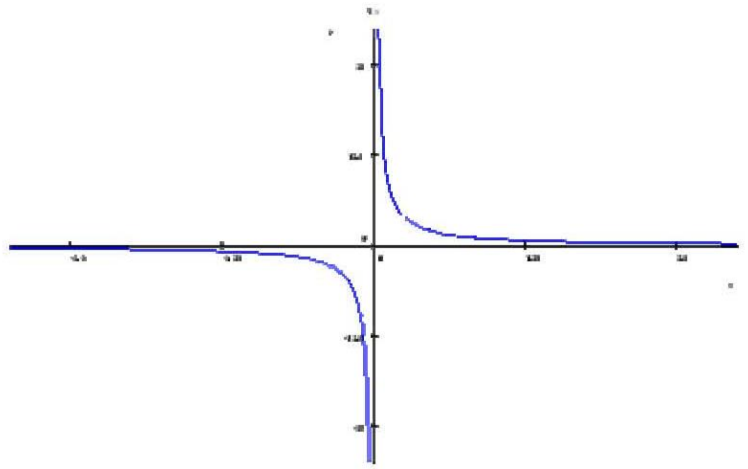
$$f(x) = \cos(x)$$

- dire che f(x) è limitata significa affermare che

$$\exists m \in \Re : \forall x \in A \, |f(x)| \leq m$$

Si dice che f(x) è illimitata se è illimitato l'insieme immagine B della funzione stessa

Un esempio di funzione illimitata è quello fornito dalla funzione rappresentata in figura



f(x)= 1/x