Come ragionare (se proprio dovete) I Elementi di Logica

Marcello D'Agostino

Dispensa 5, Lezioni 13–15

Indice

I quantificatori

I quantificatori come parole logiche

Il linguaggio ordinario fa un uso essenziale di *espressioni di generalità*, cioè di espressioni come "tutti", "alcuni", "qualche", "ciascuno", "un", "nessuno", etc. Queste espressioni contribuiscono al significato di proposizioni come "tutti gli italiani amano il calcio", "nessuno è aggressivo con Arabella", "un uomo attraversa la strada", "ciascun ospite ricevette un regalo". Tali espressioni non appartengono al vocabolario dei linguaggi booleani cui abbiamo ristretto la nostra attenzione fino a questo punto. Questa limitazione non ci ha finora creato particolari difficoltà di principio poiché siamo sempre riusciti a *tradurre* le proposizioni in cui tali espressioni ricorrevano in proposizioni appartenenti al linguaggio booleano considerato.

Vedi Dispensa 3.

È a questo punto opportuno rendere esplicito il metodo che ha governato queste traduzioni in modo da comprederne i limiti. Innanzitutto richiamiamo che cosa si intende per "proposizione aperta" e "proposizione chiusa" Ricordiamo che una *proposizione aperta* è un'espressione che differisce da una proposizione ordinaria per il fatto di avere spazi vuoti (indicati solitamente da puntini, o trattini, o altri dispositivi analoghi) nelle posizioni usualmente occupate da nomi, e che una proposizione aperta si trasforma in una *proposizione chiusa* (cioè una proposizione nel senso ordinario) quanto tutti i suoi spazi vuoti sono stati riempiti da nomi appropriati. Ogni linguaggio booleano L comprende un certo insieme di proposizioni elementari aperte. Per esempio i linguaggi booleani che abbiamo considerato finora contenevano una sola proposizione aperta, "...occupa la celletta ---", oppure "... è aggressivo con ---" *in due spazi vuoti*. Ma nulla ci vieta di considerare linguaggi con più proposizioni elementari aperte con un numero qualsiasi di spazi vuoti. Per esempio, se ci interessa ragionare su una mappa divisa in regioni ciascuna delle quali è colorata con uno dei tre colori di base, potrebbe essere utile definire un linguaggio booleano le cui proposizioni aperte sono "... è rossa", "...è verde" e "... è blu", e i cui nomi sono "regione n. 1", "regione n. 2", etc. Ma potremmo anche essere interessati a problemi che richiedono proposizioni elementari aperte in tre o più spazi vuoti: per esempio "... + --- = ***" dove gli spazi vuoti possono essere occupati da numeri interi.

Vedi Dispensa 2.

Proposizione aperte e chiuse

Va osservato che qualunque proposizione aperta in n spazi vuoti può essere trasformata in una proposizione aperta in $n-1$ spazi vuoti riempiendo uno di questi spazi vuoti con un opportuno nome. Per esempio "...è aggressivo con ---" è una proposizione aperta in due spazi vuoti; ma se riempiamo il secondo spazio vuoto con il nome

"Arabella", otteniamo l'espressione "... è aggressivo con Arabella" che è ancora una proposizione aperta, ma ha un solo spazio vuoto. Dunque, avremmo potuto descrivere il Linguaggio dell'Aggressività come un linguaggio Booleano con tre proposizioni aperte in un solo spazio vuoto: "... è aggressivo con Arabella", "...è aggressivo con Bianca" e "... è aggressivo con Carlo".

Vedi Dispensa 3.

Osservate infine che, attraverso le parole logiche booleane possiamo sempre creare proposizioni aperte *complesse* a partire da proposizioni aperte elementari. Per esempio la proposizione "...è aggressivo con Arabella oppure con ---" è una proposizione aperta complessa (non elementare) in due spazi vuoti.

Oltre che dalle sue proposizioni aperte elementari, un linguaggio booleano L è caratterizzato anche da un insieme di *nomi* che ci servono per riferirci agli oggetti di cui si parla. L'insieme di questi oggetti si chiama *universo* o *dominio del discorso*. Supponiamo che tale dominio sia *finito* e *non-vuoto* (escludiamo dunque il caso limite di un dominio senza oggetti). Siano $a_1, \ldots, a_n$ i nomi degli oggetti appartenenti al dominio e $P(\ldots)$ una qualunque proposizione aperta (anche complessa) di L in uno spazio vuoto. Allora, la proposizione secondo cui $P(\ldots)$ è vera di *tutti* gli oggetti del dominio può sempre essere tradotta nella seguente proposizione di L:

$$P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n), \tag{1}$$

mentre la proposizione secondo cui $P(\ldots)$ è vera di *almeno un* oggetto del dominio (secondo cui cioè esiste almeno un oggetto del dominio di cui $P(\ldots)$ è vera) può sempre essere tradotta nella seguente proposizione di L:

$$P(a1) \vee P(a2) \vee \ldots \vee P(a_n). \tag{2}$$

Per esempio, supponete che la proposizione aperta $P(\ldots)$ in uno spazio vuoto sia "... è aggressivo con Arabella o con Bianca" o, in forma abbreviata, "$G(..., a) \vee G(..., b)$". Allora il fatto che $P(\ldots)$ è vera di tutti gli oggetti del dominio, cioè che tutti sono aggressivi con Arabella o con Bianca, si esprime così:

$$(G(a,a) \vee G(a,b)) \wedge (G(b,a) \vee G(b,b)) \wedge (G(c,a) \vee G(c,b)). \tag{3}$$

Le parentesi qui sono essenziali!

Mentre il fatto che $P(\ldots)$ è vera di qualche oggetto del dominio, cioè che qualcuno è aggressivo con Arabella o con Bianca, si esprime così:

$$(G(a,a) \vee G(a,b)) \vee (G(b,a) \vee G(b,b)) \vee (G(c,a) \vee G(c,b)). \tag{4}$$

Questo metodo funziona sempre anche se dà luogo a traduzioni molto complesse. Per esempio, esso traduce "ogni piccione occupa una celletta” nella seguente proposizione:

$$\begin{aligned}&(O(m,1) \vee O(m,2) \vee O(m,3) \vee O(m,4) \vee O(m,5))\wedge\\ &\qquad \wedge (O(d,1) \vee O(d,2) \vee O(d,3) \vee O(d,4) \vee O(d,5))\wedge\\ &\qquad\qquad \wedge (O(t,1) \vee O(t,2) \vee O(t,3) \vee O(t,4) \vee O(t,5)).\end{aligned}$$

Immaginate quale sarebbe stata la complessità della proposizione che avremmo ottenuto se invece di avere una piccionaia con cinque cellette e tre piccioni avessimo avuto una piccionaia con cento cellette e sessanta piccioni!

Il successo di questo metodo dipende da tre condizioni che erano di fatto soddisfatte in tutti i problemi affrontati fino a questo punto:

1. la finitezza del dominio
2. la conoscenza della sua “cardinalità”, e cioè del numero di oggetti appartenenti al dominio;
3. l’assegnazione di un nome a ciascun elemento del dominio.

Ora, esistono molti problemi interessanti in cui tali condizioni sono violate: nella maggior parte dei problemi matematici è violata la prima condizione (per esempio, quando si fa aritmetica si tratta con il dominio infinito costituito da tutti i numeri naturali), mentre nella maggior parte dei problemi fisici è violata sia la seconda sia la terza (per esempio, quando si fa fisica delle particelle elementari si tratta con insiemi di particelle presumibilmente finiti ma di cui non si conosce la cardinalità, né è ovviamente possibile assegnare un nome a ciascuna particella elementare). Ma anche senza disturbare matematica e fisica, non è difficile modificare il tipo di problemi fin qui considerati in modo tale che le condizioni in questione non siano soddisfatte.

Potremmo per esempio modificare il problema della piccionaia immaginando di avere una piccionaia con infinite cellette. Non vi è allora modo di trovare un equivalente booleano della proposizione “Mike è presente nella piccionaia”. Potremmo anche modificarlo conservando la finitezza della piccionaia ma immaginando che ciò che ci interessa è quali cellette vengono occupate non solo dai nostri piccioni ma anche da piccioni di passaggio. Non vi è allora modo di trovare un equivalente booleano della proposizione “nessun piccione occupa la celletta n.1”, poiché la cardinalità del dominio considerato è ignota e, *a fortiori*, non è possibile assegnare un nome a tutti i piccioni. In queste circostanze non sarà possibile mostrare in un linguaggio booleano che la seguente inferenza è corretta:

Ricordate che se le cellette sono 5, “Mike è presente nella piccionaia” si traduce con “$O(m,1) \vee O(m,2) \vee O(m,3) \vee O(m,4) \vee O(m,5)$”.

$$\frac{\text{Nessun piccione occupa la celletta n.1}}{\text{Mike non occupa la celletta n.1.}}$$

Dunque, quando il dominio è infinito oppure la sua cardinalità, benché con ogni probabilità finita, è ignota, oppure semplicemente non abbiamo assegnato un nome a tutti gli oggetti del dominio, una proposizione contenente espressioni di generalità può essere *intraducibile* in una proposizione di un linguaggio booleano, e la correttezza o non correttezza delle inferenze in cui essa figura non può perciò essere stabilita mediante le regole di inferenza relative alle parole logiche booleane.

E' perciò opportuno affrontare direttamente il problema del significato delle espressioni di generalità. Le due espressioni di generalità a cui restringeremo la nostra attenzione sono "tutti" e "qualcuno" (e i loro sinonimi).

Da un punto di vista sintattico, queste espressioni hanno in italiano un comportamento identico a quello dei nomi nel senso che possono occupare in una proposizione esattamente le stesse posizioni. Prendete per esempio la proposizione aperta "... è aggressivo con Bianca". Otteniamo una proposizione sintatticamente corretta della lingua italiana sia riempiendo il suo unico spazio vuoto con il nome "Carlo" sia riempiendolo con l'espressione di generalità "qualcuno". Tuttavia, il comportamento logico di nomi e espressioni di generalità è diverso. Mentre per esempio l'inferenza:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Carlo è aggressivo con Bianca}\\ \text{Carlo è aggressivo con Arabella}\end{array}}{\text{Carlo è aggressivo sia con Bianca sia con Arabella}}$$

è *corretta*, e tale ovviamente rimane se sostituiamo "Carlo" con un altro nome qualsiasi,[1] l'inferenza che si ottiene da essa sostituendo a "Carlo" l'espressione di generalità "qualcuno", e cioè l'inferenza:

[1] Vedi Dispensa 1: la correttezza di un inferenza non dipende dal significato dei nomi che ricorrono in essa.

$$\frac{\begin{array}{l}\text{qualcuno è aggressivo con Bianca}\\ \text{qualcuno è aggressivo con Arabella}\end{array}}{\text{qualcuno è aggressivo sia con Bianca sia con Arabella}}$$

è invece *scorretta*.

Esercizio 1 *Costruite un controesempio a questa inferenza.*

Risulta più semplice spiegare il significato delle espressioni di generalità, e dunque caratterizzare la classe di inferenze la cui correttezza dipende da tale significato, se decidiamo di dare a tali espressioni una sintassi diversa da quella dei nomi.

Per descrivere la sintassi delle espressioni di generalità nei linguaggi che definiremo più sotto e che diremo *linguaggi quantificazionali*, abbiamo bisogno di una nuova categoria di espressioni, che chiameremo *variabili* e di due nuove parole logiche, che chiameremo *quantificatori*.

Nel ruolo di variabili useremo le lettere latine minuscole x, y, w, z, possibilmente con sottoscritti. Esempi di variabili sono dunque:

$$x, x_1, x_2, x_3, \ldots, y, y_1, y_2, y_3, \ldots etc.$$

Il ruolo di quantificatori lo svolgeranno le due seguenti espressioni con uno spazio vuoto:

- "per ogni oggetto ...", abbreviata con "$(\forall ...)$"
- "esiste almeno un oggetto ... tale che", abbreviata con "$(\exists ...)$".

La prima viene detta *quantificatore universale* e la seconda *quantificatore esistenziale*.

Le variabili possono occupare gli spazi vuoti di una proposizione aperta, proprio come i nomi. Per esempio, dalla proposizione aperta "...è aggressivo con ---", possiamo ottenere l'espressione "x è aggressivo con y" riempiendo i due spazi vuoti, rispettivamente, con la variabile x e con la variabile y. Le espressioni così ottenute sono ancora proposizioni "aperte", in quanto non ha senso chiedersi se siano vere o false in un determinato mondo possibile. Ma per ottenere da esse proposizioni chiuse non è necessario ricorrere ai nomi. Possiamo usare i quantificatori nel modo illustrato qui di seguito.

Supponete di voler esprimere in un linguaggio quantificazionale il fatto che la proposizione aperta "... è aggressivo con Arabella" è vera di *tutti* gli oggetti del dominio considerato. Non potrete farlo riempiendo il suo spazio vuoto direttamente con l'espressione di generalità "tutti", come potreste fare in Italiano (naturalmente dopo aver messo al plurale la proposizione aperta). Dovrete invece:

1. riempire lo spazio vuoto della proposizione aperta con una variabile *a vostra scelta*, diciamo x, in modo da ottenere l'espressione "x è aggressivo con Arabella";

2. riempire lo spazio vuoto dell'espressione "per tutti gli oggetti ...", con la *stessa* variabile in modo da ottenere l'espressione "per tutti gli oggetti x", e infine

3. premettere a "x è aggressivo con Arabella" l'espressione "per tutti gli oggetti x", così da ottenere la proposizione (chiusa):

   per tutti gli oggetti x, x è aggressivo con Arabella,

   o, in forma abbreviata,

$$(\forall x)G(x, a).$$

Le parentesi intorno a quantificatore "$\forall x$" sono utili, anche se non strettamente necessarie.

Assumendo che il dominio contenga solo esseri umani, questa proposizione ha lo stesso significato della proposizione della lingua italiana "tutti sono aggressivi con Arabella". Notate che avremmo ottenuto una proposizione esattamente con lo stesso significato se invece di usare la x avessimo usato una qualunque altra variabile. La sola cosa importante è che la *stessa variabile* riempia lo spazio vuoto del quantificatore e della proposizione aperta.

Analogamente, per esprimere il fatto che la proposizione aperta "... è aggressivo con Arabella" è vera di *qualche* (almeno un) oggetto del dominio considerato, non potrete riempire il suo spazio vuoto direttamente con "qualcuno" (come potreste fare in italiano); dovrete invece:

1. riempire lo spazio vuoto della proposizione aperta con una variabile a vostra scelta, poniamo x, in modo da ottenere l'espressione "x è aggressivo con Arabella";

2. riempire lo spazio vuoto dell'espressione "esiste almeno un oggetto ... tale che" con la *stessa* variabile in modo da ottenere l'espressione esiste almeno un oggetto x tale che e infine

3. premettere a "x è aggressivo con Arabella" l'espressione "esiste almeno un oggetto x tale che", così da ottenere la proposizione (chiusa)

   esiste almeno un oggetto x tale che x è aggressivo con Arabella.

   o, in forma abbreviata,
   $$(\exists x)G(x, a).$$

Chiameremo *universali* le proposizioni della forma $(\forall v)P(v)$ e *esistenziali* quelle della forma $(\exists v)P(v)$ (dove v rappresenta una variabile *qualsiasi*).

Proposizioni universali ed esistenziali

In un linguaggio con variabili e quantificatori è possibile costruire proposizioni vere o false in un dato mondo possibile anche senza utilizzare nomi. Se arricchiamo il linguaggio dell'aggressività con variabili e quantificatori, dalla proposizione aperta primitiva "... è aggressivo con ---" possiamo per esempio ottenere (riempiendo i suoi spazi vuoti rispettivamente con x e y) l'espressione:

$$x \text{ è aggressivo con } y. \tag{5}$$

Dato che nella proposizione aperta (5) le variabili x e y non sono "controllate" da quantificatori, esse vengono dette *libere* e la (5) viene detta "proposizione aperta in due variabili libere" (invece che "in due spazi vuoti"). Naturalmente, dato un mondo possibile s, la (5) non è in sé nè vera nè falsa in esso, ma è vera o falsa di ciascuna particolare

Variabili libere e vincolate

coppia di oggetti appartenenti al dominio di s—proprio come la proposizione aperta primitiva da cui è stata ottenuta. In altri termini, "... è aggressivo con —" e tutte le proposizioni che da essa si ottengono riempiendo i suoi due spazi vuoti con variabili distinte, hanno esattamente lo steso senso. Premettendo il quantificatore esistenziale $(\exists y)$ alla (5), otterrete la proposizione quantificata aperta:

$$(\exists y) x \text{ è aggressivo con } y \tag{6}$$

in una variabile libera, la x. Nella (6) la variabile y viene detta *vincolata* dal quantificatore corrispondente. In Italiano, la (6) significa:

x è aggressivo con qualcuno.

Dunque, di nuovo, dato un mondo possibile s, la (6) non è in sé né vera né falsa in esso, ma è vera o falsa di ogni dato oggetto appartenente al suo dominio. Si può ottenere dalla (6) una proposizione chiusa "vincolando" la variabile libera rimasta, cioè la x, con un altro quantificatore. Per esempio, usando a questo scopo il quantificatore $(\forall x)$, otterrete la proposizione quantificata chiusa:

$$(\forall x)(\exists y)\ x \text{ è aggressivo con } y, \tag{7}$$

in cui sia x sia y sono vincolate. Questa proposizione dice che la proposizione aperta in una variabile libera "x è aggressivo con qualcuno" è vera per *qualunque* oggetto x del dominio. In Italiano questa proposizione significa dunque:

Tutti sono aggressivi con qualcuno.

Finalmente, dunque, dato un qualunque stato s, la (7) è una proposizione vera o falsa in s.

Per ottenere una proposizione chiusa dalla (6), possiamo anche procedere diversamente. Per esempio possiamo usare il quantificatore universale (invece che quello esistenziale) per vincolare la x (invece che la y). In tal caso otteniamo:

$$(\forall x)\ x \text{ è aggressivo con } y,$$

che in Italiano può essere parafrasata come:

Tutti sono aggressivi con y.

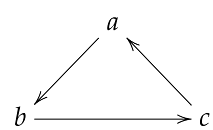
Possiamo ora ottenere una proposizione chiusa vincolando la variabile libera rimasta (cioè la y) con un altro quantificatore, per esempio con il quantificatore esistenziale, ottenendo:

$$(\exists y)(\forall x)\ x \text{ è aggressivo con } y, \tag{8}$$

che, in Italiano, significa

C'è qualcuno con cui tutti sono aggressivi.

Che differenza c'è fra la (7) e la (8)? Vediamo. Considerate il seguente mondo possibile:



E chiediamoci se la (7) è vera o falsa in questo mondo. Come abbiamo visto, la (7) significa che la proposizione aperta "x è aggressivo con qualcuno" è vera per *qualunque* oggetto x del dominio. Dunque, perché la (7) sia vera, questa proposizione aperta deve essere vera sia di Arabella, sia di Bianca, sia di Carlo. Effettivamente, in questo mondo possibile, è vero sia di Arabella, sia di Bianca, sia di Carlo che sono aggressivi con qualcuno. Dunque la (7) è vera nel mondo possibile descritto dal diagramma. E la (8)? Essa significa che la proposizione aperta "Tutti sono aggressivi con y" è vera di *qualche* oggetto del dominio. Cioè, perché la (8) sia vera è necessario che ci sia un oggetto y nel dominio di cui è vero che tutti sono aggressivi con y. Ma nel mondo possibile che abbiamo descritto sopra, non c'è un singolo individuo con cui tutti sono aggressivi, dunque la (8) è falsa nel mondo possibile considerato.

Esercizio 2 *Descrivete, mediante un diagramma, un mondo possibile in cui la* (8) *è vera.*

Esercizio 3 *Considerate il mondo possibile in cui la* (8) *è vera che avete costruito per risolvere l'Esercizio 2. In questo mondo possibile la* (7) *è vera o falsa? In generale, esiste un mondo possibile in cui la* (8) *è vera e la* (7) *è falsa?*

Esercizio 4 *Esprimete nel Linguaggio dell'Aggressività Quantificato le seguenti proposizioni:*

(1) C'è qualcuno che è aggressivo con tutti

(2) Qualcuno è aggressivo con qualcuno

(3) Tutti sono aggressivi con tutti

e per ciascuna di esse descrivete un mondo possibile in cui è vera e un mondo possibile in cui è falsa.

Dal linguaggio ordinario ai linguaggi quantificazionali

Sappiamo che la sintassi delle espressioni di generalità nei linguaggi quantificazionali è diversa da quella che esse hanno in italiano. Mentre in italiano esse svolgono un ruolo analogo ai nomi, nei linguaggi quantificazionali sono parole logiche. Questa differenza rende la traduzione dall'Italiano ai linguaggi quantificazionali non del tutto banale.

Un problema è posto dal fatto che in Italiano le espressioni di generalità vengono normalmente impiegate non isolatamente ma ristrette da un sostantivo, e cioè in contesti della forma:

- ... tutti gli A ...
- ... ciascun A ...
- ... ogni A ...
- ... alcuni A ...
- ... qualche A ...
- ... un A ...

in cui la lettera A è rimpiazzata da un sostantivo. Consideriamo, per esempio, la seguente inferenza corretta:

tutti i critici d'arte apprezzano i quadri di Rembrandt
Federico Zeri è un critico d'arte

Dunque, Federico Zeri apprezza i quadri di Rembrandt

Nella prima premessa di questa inferenza l'espressione di generalità "tutti" è ristretta dal sostantivo "i critici d'arte". Come facciamo a costruire una proposizione quantificata che abbia lo stesso significato della prima premessa? Il problema è quello di identificare una proposizione aperta tale che la sua quantificazione universale abbia lo stesso senso della prima premessa. La scelta più ovvia sembra essere la proposizione aperta:

$$\text{... apprezza i quadri di Rembrandt.} \tag{9}$$

Ma se riempiamo lo spazio vuoto di questa proposizione aperta con una variabile (diciamo la x) e poi quantifichiamo universalmente, otteniamo la proposizione seguente:

$$(\forall x)x \text{ apprezza i quadri di Rembrandt} \tag{10}$$

che significa "*tutti* apprezzano i quadri di Rembrandt" e non "*tutti i critici d'arte* apprezzano i quadri di Rembrandt". Notate inoltre che questa traduzione spezza la connessione tra la prima e la seconda premessa dell'inferenza, e dunque non ne conserva la correttezza. Qual è allora una proposizione aperta adeguata allo scopo?

Per trovare una risposta, dobbiamo separare l'espressione di generalità ("tutti") dalla sua restrizione ("i critici d'arte"). Un modo per farlo consiste nel trattare questa restrizione come una condizione per l'applicazione della proposizione aperta "... apprezza i quadri di Rembrandt" e nel tradurre la prima premessa mediante la proposizione che si ottiene quantificando universalmente la seguente proposizione aperta di forma *condizionale*:

se ... è un critico d'arte, allora ... apprezza i quadri di Rembrandt.

Una traduzione corretta della prima premessa sarà allora:

$(\forall x)$(se x è un critico d'arte, allora x apprezza i quadri di Rembrandt).

Notate che qui le parentesi sono essenziali, perché il quantificatore universale si riferisce all'*intera* proposizione e vincola *entrambe* le ricorrenze della variabile x.

Questo esempio contiene un metodo generale per la traduzione in un linguaggio quantificazionale delle espressioni di generalità di tipo universale ristrette da un sostantivo, come "tutti gli A". Dobbiamo in primo luogo sostituire all'espressione di generalità ristretta una variabile qualsiasi v così da ottenere il contesto "... v ...", cioè la proposizione aperta che esprime quello che si dice di tutti gli A. Dobbiamo poi subordinarlo alla condizione $A(v)$ formando il condizionale

$$A(v) \rightarrow ...v....$$

Dobbiamo infine quantificare universalmente tale condizionale così da ottenere:

$$(\forall v)(A(v) \rightarrow ...v...).$$

Esercizio 5 *Traducete in un linguaggio quantificazionale appropriato le proposizioni seguenti:*

1. *Tutte le balene sono mammiferi*
2. *"La Traviata" di Giuseppe Verdi è amata da tutti gli Italiani*
3. *Tutte le città in cui mi sono fermato avevano un'ottima Pinacoteca.*

La proposizione 3 dell'esercizio 5 esemplifica un metodo assai comune in italiano per restringere le espressioni di generalità, e cioè l'uso di subordinate relative. Esso può facilmente essere incorporato nel nostro metodo di traduzione congiungendo alla condizione originaria nuove condizioni corrispondenti alle restrizioni addizionali imposte dalle subordinate. Così, la 3 può essere trattata come la quantificazione universale della seguente proposizione aperta:

(x è una città $\wedge$ io mi sono fermato in x) $\rightarrow$ x ha un'ottima pinacoteca. (11)

Notate che in italiano proposizioni equivalenti alle 1-3 dell'esercizio 5 possono essere ottenute semplicemente omettendo da esse l'espressione di generalità:

1* Le balene sono mammiferi

2* "La Traviata" di Giuseppe Verdi è amata dagli italiani

3* Le città in cui mi sono fermato avevano un'ottima Pinacoteca.

Ma i modi per esprimere l'universalità in Italiano non finiscono qui. Un altro modo assai frequente consiste nell'usare proposizioni rette da "qualunque" oppure da "chiunque". Ecco alcuni esempi:

1** Qualunque cosa sia una balena è un mammifero

2** Chiunque sia italiano ama "La Traviata" di Giuseppe Verdi.

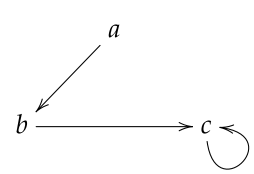
Prima di passare alle proposizioni in cui ricorre l'espressione di generalità "qualcuno" (e i suoi sinonimi come "alcuni", "qualche", "un" etc.), va notata una conseguenza a prima vista strana della traduzione dei contesti della forma

... tutti gli A ...

mediante lo schema:

$$(\forall v)(A(v) \rightarrow ...v...).$$

Supponete di avere a che fare con un mondo possibile s in cui *nessuno* è aggressivo con Arabella, per esempio:



Considerate ora la seguente proposizione:

tutti quelli che sono aggressivi con Arabella lo sono con Bianca.

Una sua traduzione sarà:

$(\forall x)(x$ è aggressivo con Arabella $\rightarrow x$ è aggressivo con Bianca$)$.

Abbreviamo il condizionale aperto

x è aggressivo con Arabella $\rightarrow x$ è aggressivo con Bianca.

con $C(x)$. La proposizione "$(\forall x)C(x)$" è vera o falsa in s?

Ovviamente, la proposizione chiusa $(\forall x)C(x)$ è vera in s se la proposizione aperta $C(x)$ è vera di *ogni* oggetto del dominio di s. Ma $C(x)$ è una proposizione condizionale aperta in una variabile libera, la quale—analogamente a una proposizione condizionale chiusa—è vera di un oggetto x se o il suo antecedente è falso di x (per Int$\rightarrow$V1) oppure il suo conseguente è vero di x (per int$\rightarrow$V2). Dato che nessuno è aggressivo con Arabella in s, l'antecedente di $C(x)$ *è falso di tutti gli oggetti del dominio* di s; dunque, $C(x)$ è vera di tutti gli oggetti del dominio di s. Ne segue che $(\forall x)C(x)$ è vero in s. In generale, una proposizione universale della forma

Vedi le regole di introduzione del condizionale vero nella Dispensa 4.

$$(\forall v)(Q(v) \rightarrow R(v))$$

è vera in tutti gli stati nel cui dominio non vi sono oggetti di cui $Q(v)$ è vera. Così, "tutti quelli che sono aggressivi con Arabella lo sono anche con Bianca" è vera in un mondo in cui nessuno è aggressivo con Arabella, così come "tutti i corvi sono neri" è vera in un mondo in cui non ci sono corvi. Ciò suona strano ma non dipende dalla nostra interpretazione del quantificatore universale bensì da quella del condizionale *booleano* che abbiamo descritto come una versione semplificata e approssimata del condizionale (o meglio dei condizionali) del linguaggio ordinario. Possiamo rendere più accettabile questa stranezza riflettendo sulle circostanze in cui una proposizione come "tutti i corvi sono neri" può essere considerata falsa. È intuitivamente chiaro che essa è falsa se e soltanto se *esiste almeno un corvo* che non è nero. Ma in un mondo in cui non ci sono corvi, non può esistere un corvo non-nero e dunque "tutti i corvi sono neri" non può essere falsa. Ne segue, per il principio di bivalenza, che deve essere vera. In generale, una proposizione della forma "tutti gli A sono B" è comunemente considerate falsa se esiste almeno un A che non è B. Per cui, in un mondo in cui non ci sono A, tale proposizione non èuò essere falsa e, dunque, deve essere vera. In conclusione, questa apparente anomalia è in realtà una conseguenza necessaria della nostra intuizione linguistica riguardo alle circostanze in cui una proposizione della forma "tutti gli A sono B" è falsa e del principio di bivalenza.

Vedi la discussione del condizionale nelle Dispense 3 e 4.

Consideriamo ora i problemi di traduzione relativi alle proposizioni in cui ricorre l'espressione di generalità "qualcuno" (o sinonimi come "alcuni", ecc.). Considerate la seguente inferenza *non* corretta:

Alcuni sciatori odiano la montagna
Alberto Tomba è uno sciatore

Dunque, Alberto Tomba odia la montagna

Come facciamo a costruire una proposizione quantificata che abbia lo stesso significato della prima premessa? Di nuovo, il problema è quello di identificare una proposizione aperta tale che la sua quantificazione esistenziale sia equivalente alla prima premessa. Non può trattarsi della proposizione aperta "... odia la montagna" perché la sua quantificazione esistenziale, e cioè "$(\exists x)(x$ odia la montagna$)$", significa "alcuni odiano la montagna" e non "alcuni sciatori odiano la montagna". Di nuovo, per ottenere il risultato voluto dobbiamo separare l'espressione di generalità ("alcuni") dalla sua restrizione ("sciatori") cercando di incorporare quest'ultima nella proposizione aperta "... odia la montagna". Ma come? Considerate la seguente parafrasi della prima premessa:

esistono sciatori che odiano la montagna.

La prima premessa può allora essere trattata come equivalente alla proposizione che si ottiene quantificando esistenzialmente la proposizione aperta "... è uno sciatore che odia la montagna", e cioè alla proposizione:

$$(\exists x)(x \text{ è uno sciatore che odia la montagna}).$$

Ma qualcuno è uno sciatore che odia la montagna se e solo se è *sia* uno sciatore *sia* un amante della montagna. Questo significa che la proposizione aperta "... è uno sciatore che odia la montagna" è sinonima della seguente proposizione aperta di forma congiuntiva:

$$\text{... è uno sciatore} \;\wedge\; \text{... ama la montagna.} \tag{12}$$

Dunque, la prima premessa dell'inferenza in questione può essere trattata come equivalente alla proposizione che si ottiene dalla (12) mediante quantificazione esistenziale, e cioè alla proposizione:

$$(\exists x)(x \text{ è uno sciatore } \wedge x \text{ odia la montagna}). \tag{13}$$

Questo esempio contiene un metodo generale di traduzione in un linguaggio quantificazionale delle espressioni di generalità di tipo esistenziale ristrette da un sostantivo, del tipo "qualche A". Si tratta in primo luogo di formare una proposizione aperta che congiunga la condizione $A(v)$ al suo contesto ...v... :

$$A(v) \wedge ...v...$$

e quindi di quantificare esistenzialmente questa congiunzione così da ottenere la proposizione aperta seguente:

$$(\exists v)(A(v) \wedge ...v...).$$

Esercizio 6 *Traducete in un linguaggio quantificazionale appropriato le proposizioni seguenti:*

1. *Alcuni cigni sono neri*

2. *"La Tosca" di Puccini è amata da qualche Italiano*

3. *Mi sono fermato in una citta che aveva un'ottima Pinacoteca.*

Notate che nella proposizione 3 dell'Esercizio 6 l'espressione di generalità "una città" è ulteriormente ristretta da una subordinata relativa. Tale restrizione può facilmente essere incorporata nel nostro metodo di traduzione congiungendo alla proposizione aperta $A(v) \wedge ...v...$ la nuova condizione corrispondente alla restrizione addizionale imposta dalla subordinata. Così, la 3 può essere trattata come la quantificazione esistenziale della seguente proposizione aperta:

x è una città $\wedge$ io mi sono fermato in $x \wedge x$ ha un'ottima pinacoteca.

Un'altra importante espressione di generalità è la parola "nessuno" che, come la parola "tutti", può essere usata sia isolatamente, sia ristretta da un sostantivo, come in "nessun cantante è stonato". Tuttavia, per tradurre in un linguaggio quantificazionale le proposizioni che la contengono non abbiamo bisogno di introdurre un nuovo tipo di quantificatore. Infatti, basta osservare che una proposizione come:

$$\text{Nessun cantante è stonato} \tag{14}$$

può essere parafrasata sia come

Tutti i cantanti sono non-stonati

sia come

Non esiste un cantante che sia stonato.

Seguendo la prima parafrasi, la traduzione corretta della (14) è

$$(\forall x)(x \text{ è un cantante } \rightarrow \neg(x \text{ è stonato})); \tag{15}$$

mentre seguendo la seconda parafrasi, la traduzione è

$$\neg(\exists x)(x \text{ è un cantante } \wedge x \text{ è stonato}). \tag{16}$$

Naturalmente, la (15) e la (16) hanno esattamente lo stesso significato.

Esercizio 7 *Traducete in un linguaggio quantificazionale appropriato le seguenti proposizioni:*

1. *Nessun corvo è bianco*

2. *Non tutti i cigni sono bianchi*

Prima di considerare i problemi di traduzione relativi alle proposizioni che contengono espressioni di generalità sia di tipo universale sia di tipo esistenziale, è bene rendersi conto che i metodi di traduzione che abbiamo descritto non possono essere applicati "meccanicamente". Considerate per esempio la proposizione:

$$\text{Se un numero è pari, esso è divisibile per 2.} \tag{17}$$

In italiano, la (17) è un condizionale (vero). Ma se supponiamo che questa debba essere la forma della sua traduzione in un linguaggio quantificazionale e procediamo alla traduzione del suo antecendente applicando il nostro metodo, ci troviamo subito nei guai. Otteniamo infatti la proposizione chiusa $(\exists x)(x \text{ è un numero } \wedge x \text{ è pari})$ per cui la (17) diventerebbe

$$(\exists x)(x \text{ è un numero } \wedge x \text{ è pari}) \rightarrow x \text{ è divisibile per 2}$$

e il pronome del conseguente della (17) perde il suo riferimento "all'indietro". Il fatto è che la (17) non può essere trattata come una proposizione di forma condizionale in un linguaggio quantificazionale. Essa in realtà "nasconde" sotto la forma di una proposizione condizionale la *quantificazione universale* di un condizionale, e cioè del seguente condizionale aperto:

$$x \text{ è un numero pari} \rightarrow x \text{ è divisibile per 2.} \tag{18}$$

La (18), con le sue due ricorrenze della *stessa* variabile libera rende esplicito il fatto che il pronome nel conseguente della (17) ha un riferimento all'indietro. In un linguaggio quantificazionale la (17) deve dunque essere trattata come equivalente alla seguente proposizione universale:

$$(\forall x)(x \text{ è un numero pari } \rightarrow x \text{ è divisibile per 2}). \tag{19}$$

Il ruolo svolto dall'espressione di generalità "un numero" nella (17) è rappresentativo del ruolo che espressioni della forma "un A" (o "qualche A" o più semplicemente "qualcuno") svolgono quando ricorrono nell'antecendete di un condizionale nel cui conseguente ricorre un pronome che ha un riferimento all'indietro: esse servono a quantificare universalmente la corrispondente proposizione aperta di forma condizionale.

Esercizio 8 *Traducete in un linguaggio quantificazionale appropriato le seguenti proposizioni della lingua italiana:*

1. *Se qualcuno ha un figlio, ha un nipote*

2. *Se un cane abbaia, non morde*

3. *Se un piccione occupa la celletta n.2, non occupa la n.3*

4. *Se qualcuno è aggressivo con Arabella, lo è anche con Bianca.*

Concludiamo questo paragrafo con alcuni esempi di traduzione in un linguaggio quantificazionale di proposizioni della lingua italiana che contengono espressioni di generalità sia di tipo universale sia di tipo esistenziale. Riprendiamo a questo scopo l'estensione al primo ordine del linguaggio dell'aggressività (LAQ). Cominciamo riprendendo un paio di semplici esempi che abbiamo già discusso:

Traduzioni

$$\text{Qualcuno è aggressivo con tutti.} \tag{20}$$

Una proposizione equivalente alla (20) può essere ottenuta quantificando esistenzialmente la proposizione aperta "... è aggressivo con tutti":

$$(\exists x)(x \text{ è aggressivo con tutti}). \tag{21}$$

La (21) è una proposizione "ibrida": non è più in Italiano, non appartiene ancora al LAQ. Infatti, il suo costituente immediato "x è aggressivo con tutti" non è una proposizione del LAQ. Non è però difficile tradurlo in una proposizione del LAQ. Esso è infatti equivalente alla quantificazione universale (rispetto a y) della proposizione aperta "x è aggressivo con y", che appartiene al LAQ. Sostituendo nella (21) "x è aggressivo con tutti" con l'equivalente "$(\forall y)(x \text{ è aggressivo con } y)$" otteniamo finalmente la proposizione cercata:

$$(\exists x)(\forall y)(x \text{ è aggressivo con } y).$$

Altrettanto semplice è il caso di

$$\text{Tutti sono aggressivi con qualcuno.} \tag{22}$$

Una proposizione equivalente alla (22) può essere ottenuta quantificando universalmente la proposizione aperta "... è aggressivo con qualcuno":

$$(\forall x)(x \text{ è aggressivo con qualcuno}). \tag{23}$$

Di nuovo, la (23) è una proposizione "ibrida", non appartiene né all'Italiano, né al LAQ, dal momento che il suo costituente immediato "x è aggressivo con tutti" non è una proposizione del LAQ. Ma quest'ultimo è equivalente alla quantificazione esistenziale (rispetto a y) della proposizione aperta (in due variabili liberre) "x è aggressivo con y", che appartiene al LAQ. Sostituendo nella (23) "x è aggressivo con qualcuno" con l'equivalente "$(\exists y)(x \text{ è aggressivo con } y)$" otteniamo finalmente la proposizione cercata:

$$(\forall x)(\exists y)(x \text{ è aggressivo con } y).$$

Questi due esempi indicano un *metodo generale* per tradurre le proposizioni in cui ricorrono espressioni di generalità sia di tipo universale sia di tipo esistenziale. L'idea è quella di procedere "dall'esterno verso l'interno" della proposizione considerata utilizzando come passi intermedi proposizioni "ibride" fino all'eliminazione di tutte le espressioni di generalità della proposizione originaria.

Diamo qui di seguito alcuni esempi con l'indicazione dei passi intermedi. Le proposizioni in grassetto sono quelle "ibride", che non appartengono ancora al LAQ:

1. Chiunque sia aggressivo con se stesso lo è con tutti
   (a) $(\forall x)(x$ è aggressivo con $x \to x$ **è aggressivo con tutti**$)$
   (b) $(\forall x)(x$ è aggressivo con $x \to (\forall y)(x$ è aggressivo con $y))$
2. Qualcuno che è aggressivo con Arabella è aggressivo con chiunque sia aggressivo con Bianca
   (a) $(\exists x)(x$ è aggressivo con Arabella $\wedge\, x$ **è aggressivo con chiunque sia aggressivo con Bianca**$)$
   (b) $(\exists x)(x$ è aggressivo con Arabella $\wedge\, (\forall y)(y$ è aggressivo con Bianca $\to$ x è aggressivo con y$))$
3. Chi non è aggressivo con se stesso, non lo è nemmeno con chi non lo è con nessuno
   (a) $(\forall x)(\neg(x$ è aggressivo con $x) \to x$ **non è aggressivo con chi non lo è con nessuno**$)$
   (b) $(\forall x)(\neg(x$ è aggressivo con $x) \to (\forall y)(y$ **non è aggressivo con nessuno** $\to$ $\neg(x$ è aggressivo con $y)$
   (c) $((\forall x)(\neg(x$ è aggressivo con $x) \to (\forall y)((\forall z)\neg(y$ è aggressivo con $z) \to$ $\neg(x$ è aggressivo con y$)))$.

Differenza fra "tutti quelli che..." e "solo quelli..."

Consideriamo ora la seguente proposizione:

Arabella è aggressiva *solo* con quelli che sono aggressivi con lei, (24)

e chiediamoci in che cosa essa si distingua dalla seguente:

Arabella è aggressiva con *tutti* quelli che sono aggressivi con lei. (25)

Dovrebbe essere chiaro che la (25) dice che se una persona *qualsiasi* è aggressiva con Arabella, allora Arabella è aggressiva con questa persona, e dunque deve essere tradotto (usando l'abbreviazione $G(x, y)$ per x è aggressivo con y):

$$(\forall x)\,(G(x,a) \to G(a,x)). \tag{26}$$

Notate che la (26), che traduce la (25), *non esclude* che Arabella sia aggressiva *anche* con qualcuno che non è aggressivo con lei. Si limita ad asserire che lo è con tutti quelli che sono aggressivi con lei. D'altra parte la (24) dice qualcosa di essenzialmente diverso. Essa dice che Arabella è aggressiva *solo* con quelli che sono aggressivi con lei. Questo significa che se Arabella è aggressiva con una persona qualsiasi, allora questa persona deve essere una di quelle che sono aggressive con Arabella (perché Arabella è aggressiva *solo* con loro). Dunque, la traduzione corretta della (24) è

$$(\forall x)\,(G(a,x) \to G(x,a)). \tag{27}$$

Notate la direzione opposta della freccia nella (26) e nella (27). La differenza di traduzione qui è analoga a quella che vi è fra "P se Q" (che si scrive "$Q \to P$") e "P solo se Q" (che si scrive invece "$P \to Q$"), solo che in questo caso i condizionali sono aperti e quantificati universalmente. Notate che nella (27), che traduce la (24), non si esclude che vi sia qualcuno che è aggressivo con Arabella e con cui Arabella non è aggressiva. Si esclude solo che Arabella sia aggressiva con qualcuno che non è agressivo con lei.

Esercizio 9 *Descrivete, mediante un diagramma, un mondo possibile in cui la* (24) *è vera, mentre la* (25) *è falsa e poi un mondo possibile in cui la* (24) *è falsa, mentre la* (25) *è vera.*

Esercizio 10 *Traducete nel LAQ le seguenti proposizioni:*

1. *qualcuno è aggressivo con chi non è aggressivo con nessuno*
2. *nessuno è aggressivo con chi è aggressivo con tutti*
3. *qualcuno è aggressivo solo con le persone con cui nessuno è aggressivo*

Ragionare con i quantificatori

Regole di inferenza per i quantificatori

Applichiamo anche ai quantificatori la nostra teoria *consequenzialista* del significato (vedi Dispensa n.1), secondo cui il significato di una parola logica è determinato da regole di inferenza che ci dicono quali sono le conseguenze immediate della verità o della falsità di una proposizione che contiene quella parola logica come parola logica principale.

Dobbiamo dunque determinare opportune *regole di eliminazione* per proposizioni che hanno una delle quattro forme seguenti:

$$\boxed{(\forall x)P(x) \quad \neg(\forall x)P(x) \quad (\exists x)P(x) \quad \neg(\exists x)P(x)}$$

oppure, se usiamo proposizioni segnate

$$V\,(\forall x)P(x) \quad F\,(\forall x)P(x) \quad V\,(\exists x)P(x) \quad F\,(\exists x)P(x)\ .$$

Nel seguito, sia nella formulazione delle regole, sia negli esempi, useremo solo proposizioni *non segnate*, lasciando al lettore come esercizio il compito di riformulare tutto in termini di proposizioni segnate.

Cominciamo col chiederci quali siano le conseguenze immediate della *verità* di una proposizione *esistenziale*. Consideriamo ad esempio la proposizione

$(\exists x)$ x è aggressivo con Bianca.

Questo significa che la proposizione aperta

x è aggressivo con Bianca

è *vera di almeno un* elemento del dominio, *ma non sappiamo quale*.

Dalla proposizione

$(\exists x)$ x è aggressivo con Bianca. (*)

non possiamo inferire la verità di nessuna delle proposizioni che si ottengono sostituendo alla x il nome di un elemento del dominio. *Non* possiamo cioè inferire nessuna delle proposizioni seguenti:

- Arabella è aggressiva con Bianca
- Bianca è aggressiva con Bianca
- Carlo è aggressiva con Bianca.

Sappiamo che "Qualcuno è aggressivo con Bianca" è vera, dunque sappiamo solo che esiste *almeno una* persona che è aggressiva con Bianca. Chiamiamo questa persona, di cui non conosciamo l'identità,"p". Dalla (*)possiamo dunque inferire che

p è aggressivo con Bianca

e ragionare su p anche se non ne conosciamo la precisa identità. Infatti, noi non sappiamo chi sia p, sappiamo solo che è una delle persone che è aggressiva con Bianca e usiamo p come un nome fittizio per parlare di un elemento del dominio di cui non conosciamo l'identità. Questi nomi fittizi sono molti diversi dai nomi veri e propri. Un nome vero e proprio come "Arabella" o "Bianca" o "Mike" denota un preciso elemento del dominio. Il nome fittizio p non denota alcun elemento preciso del dominio, ma è semplicemente un dispositivo per riferirsi a un individuo generico che soddisfa una certa proprietà (in questo caso quella di essere aggressivo con Bianca), la cui esistenza è garantita dalle informazioni a nostra disposizione.

Questo uso di nomi fittizi è molto frequente nel ragionamento matematico:

> Se a è divisibile per b e b è divisibile per c, allora a è divisibile per c. Infatti:
>
> - che a è divisibile per b vuol dire che esiste un intero, *chiamiamolo* m, tale che $a = m \times b$;
> - che b è divisibile per c, vuol dire che esiste un intero, *chiamiamolo* n, tale che $b = n \times c$.
>
> Dunque $a = m \times n \times c$. Ma, se m e n sono interi, anche $m \times n$ è un intero, dunque a è divisibile per c.

In questa semplice dimostrazione abbiamo usato i nomi fittizi m e n per denotare numeri a noi ignoti, ma la cui esistenza è garantita dalle informazioni iniziali ("a è divisibile per b" e "b è divisibile per c". Anche nei ragionamenti ordinari non mancano esempi di questo tipo, basti pensare all'uso che viene fatto comunemente di nomi fittizi come "Tizio", "Caio" e "Sempronio". In un linguaggio quantificazionale questi *pseudo-nomi* li chiamiamo *parametri* e li indichiamo con le lettere p, q, r, etc.

Dunque in un linguaggio quantificazionale per indicare gli elementi del dominio abbiamo tre categorie di espressioni:

- i *nomi*: "Arabella", "Bianca", "Carlo", "Mike", "Duke", "Tina", ...
- le *variabili*: "x", "y", "z", ...
- i *parametri*: "p", "q", "r", ...

I nomi e i parametri li chiamiamo *termini chiusi*. Le variabili sono invece *termini aperti*.

Possiamo ora formulare la regola di eliminazione per le proposizioni *esistenziali vere*:

Regola di eliminazione delle esistenziali vere

REGOLA DI ELIMINAZIONE PER PROPOSIZIONI ESISTENZIALI VERE:

$$\frac{(\exists v)P(v)}{P[v/p]}$$

dove

- v è una qualsiasi *variabile*;
- $P(v)$ è una qualsiasi proposizione aperta in cui la variabile v ricorre *libera*;

- p è un qualsiasi *parametro nuovo* (cioè non usato in precedenza);
- $P[v/p]$ è il risultato della *sostituzione* di tutte le ricorrenze di v con p.

Le inferenze seguenti sono tutte applicazioni corrette della regola di eliminazione delle proposizioni esistenziali vere (Elim∃V):

$$\frac{(\exists x)G(x,b)}{G(p,b)} \qquad \frac{(\exists x)(G(x,b) \lor G(b,x))}{G(p,b) \lor G(b,p)} \qquad \frac{(\exists y)(G(y,b) \to G(a,y))}{G(p,b) \to G(a,p)}$$

Parametri nuovi

La restrizione secondo cui p deve essere un parametro *nuovo* è di estrema imporanza. Ogni volta che usiamo questa regola, dato che il parametro p denota un generico elemento del dominio che soddisfa la proprietà espressa dalla proposizione aperta $P(x)$, non possiamo mai assumere che si tratti di uno degli elementi di cui abbiamo già parlato in precedenza e sui quali abbiamo fatto altre assunzioni. Per esempio, nella dimostrazione di p. 21, vengono usati due parametri diversi, m e n, per denotare due generici numeri interi che soddisfano le condizioni date. Sarebbe stato un errore usare in tutti e due i casi lo stesso parametro, dal momento che non possiamo assumere che si tratti dello *stesso* numero. Per chiarire ulteriormente questo punto, facciamo un altro esempio. Supponiamo di sapere che:

1. $(\exists x)\ G(x,a)$

   Qualcuno è aggressivo con Arabella

2. $(\exists x)\ G(x,b)$

   Qualcuno è aggressivo con Bianca.

Se non rispettiamo la restrizione sui parametri possiamo inferire che

$G(p,a)$
p è aggressivo con Arabella

dalla 1 e

$G(p,b)$
p è aggressivo con Bianca

dalla 2.

Sembrerebbe dunque che dalla 1 e dalla 2 possiamo inferire che c'è una persona p che è aggressiva sia con Arabella sia con Bianca. Ma questa inferenza è chiaramente scorretta! Ecco un controesempio:

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dl] \\
b & c \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

In questo stato sono vere entrambe le proposizioni 1 e 2, ma è falsa la proposizione

> C'è qualcuno che è aggressivo sia con Arabella, sia con Bianca.

L'errore consiste chiaramente nel fatto che, quando abbiamo applicato la regola Elim∃V la seconda volta (alla 2) abbiamo usato lo stesso parametro p che avevamo usato nella precedente applicazione (alla 1), violando così la restrizione secondo cui, ad ogni applicazione della regola, il parametro utilizzato deve essere *nuovo*.

Se rispettiamo la restrizione, non possiamo dedurre la conclusione scorretta:

1. $(\exists x)\ G(x, a)$
2. $(\exists x)\ G(x, b)$
3. $G(p, a)$, dalla 1 per Elim∃V
4. $G(q, b)$, dalla 2 per Elim∃V (q è *nuovo*!)

Dunque non possiamo inferire che c'è una stessa persona che è aggressiva sia con Arabella, sia con Bianca.

Chiediamoci ora quali siano le conseguenze immediate della *falsità* di una proposizione *esistenziale*. Consideriamo ad esempio la proposizione

$$\neg(\exists x)x \text{ è aggressivo con Arabella.} \qquad (*)$$

Questo significa che la proposizione aperta

> x è aggressivo con Arabella

è falsa di tutti gli elementi del dominio, coè che

> $\neg(x$ è aggressivo con Arabella$)$

è *vera di tutti* gli elementi del dominio. Dunque è vera qualunque proposizione ottenuta da essa sostituendo la x con un *termine chiuso* (*parametro* o *nome*).

La regola di eliminazione per le proposizioni esistenziali false (Elim∃F) è dunque la seguente:

Regole di eliminazione delle esistenziali false

> REGOLA DI ELIMINAZIONE PER PROPOSIZIONI ESISTENZIALI FALSE:
>
> $$\frac{\neg(\exists v)P(v)}{\neg P[v/t]}$$

dove

- v è una qualsiasi *variabile*;
- $P(v)$ è una qualsiasi proposizione aperta in cui la variabile v ricorre *libera*;
- t è un qualsiasi *termine chiuso* (nome o parametro);
- $P[v/t]$ è il risultato della *sostituzione* di tutte le ricorrenze di v con t.

Ecco alcuni esempi di applicazione:

$$\frac{\neg(\exists x)G(x,b)}{\neg G(a,b)} \qquad \frac{\neg(\exists x)G(x,b)}{\neg G(b,b)} \qquad \frac{\neg(\exists x)G(x,b)}{\neg G(c,b)}$$

$$\frac{\neg(\exists x)G(x,b)}{\neg G(p,b)} \qquad \frac{\neg(\exists x)(G(x,b) \vee G(b,x))}{\neg(G(a,b) \vee G(b,a))} \qquad \frac{\neg(\exists x)(G(x,b) \vee G(b,x))}{\neg(G(p,b) \vee G(b,p))}$$

$$\frac{\neg(\exists y)(G(y,b) \to G(a,y))}{\neg(G(b,b) \to G(a,b))} \qquad \frac{\neg(\exists y)(G(y,b) \to G(a,y))}{\neg(G(q,b) \to G(a,q))}$$

Chiediamoci ora quali siano le conseguenze immediate della *verità* di una proposizione *universale*. Consideriamo ad esempio la proposizione

$(\forall x)x$ è aggressivo con Carlo. (*)

Questo significa che la proposizione aperta

x è aggressivo con Carlo

è vera di tutti gli elementi del dominio. Dunque è vera qualunque proposizione ottenuta da essa sostituendo la x con un *nome* o con un *parametro* (in generale con un *termine chiuso*).

La regola di eliminazione per le proposizioni *universali vere* (Elim∀V) è dunque la seguente:

Regola di eliminazione delle universali vere

REGOLA DI ELIMINAZIONE PER PROPOSIZIONI UNIVERSALI VERE:

$$\frac{(\forall v)P(v)}{P[v/t]}$$

dove

- v è una qualsiasi *variabile*;
- $P(v)$ è una qualsiasi proposizione aperta in cui la variabile v ricorre *libera*;

- t è un qualsiasi *termine chiuso* (nome o parametro);
- $P[v/t]$ è il risultato della *sostituzione* di tutte le ricorrenze di v con t.

Ecco alcuni esempi di applicazione della regola:

$$\frac{(\forall x)G(x,b)}{G(a,b)} \qquad \frac{(\forall x)G(x,b)}{G(b,b)} \qquad \frac{(\forall x)G(x,b)}{G(c,b)}$$

$$\frac{(\forall x)G(x,b)}{G(p,b)} \qquad \frac{(\forall x)(G(x,b) \vee G(b,x))}{G(a,b) \vee G(b,a)} \qquad \frac{(\forall x)(G(x,b) \vee G(b,x))}{G(p,b) \vee G(b,p)}$$

$$\frac{(\forall y)(G(y,b) \to G(a,y))}{G(b,b) \to G(a,b)} \qquad \frac{(\forall y)(G(y,b) \to G(a,y))}{G(q,b) \to G(a,q)}$$

Chiediamoci ora quali siano le conseguenze immediate della *falsità* di una proposizione *universale*. Consideriamo ad esempio la proposizione

$$\neg(\forall x)\ x \text{ è aggressivo con Bianca.} \qquad (*)$$

Questo significa che la proposizione aperta

$$\boxed{x \text{ è aggressivo con Bianca}}$$

è *falsa di almeno un* elemento del dominio, cioè che

$$\boxed{\neg(x \text{ è aggressivo con Bianca})}$$

è *vera di almeno un* elemento del dominio, *ma non sappiamo quale*.

La regola di eliminazione per le proposizioni *universali false* (Elim∀F) è dunque la seguente:

REGOLA DI ELIMINAZIONE PER PROPOSIZIONI UNIVERSALI FALSE:
$$\frac{\neg(\forall v)P(v)}{\neg P[v/p]}$$

dove

- v è una qualsiasi *variabile*;
- $P(v)$ è una qualsiasi proposizione aperta in cui la variabile v ricorre *libera*;
- p è un qualsiasi *parametro nuovo*;
- $P[v/p]$ è il risultato della *sostituzione* di tutte le ricorrenze di v con p.

Anche in questa regola la restrizione sui parametri nuovi è essenziale. Supponiamo di sapere

1. $\neg(\forall x)\ G(x, a)$

   È falso che tutti siano aggressivi con Arabella

2. $\neg(\forall x)\ G(x, b)$

   È falso che tutti siano aggressivi con Bianca.

Se ignorassimo la restrizione sui parametri, dalla 1 potremmo inferire che

$\neg G(p, a)$
p non è aggressivo con Arabella

e dalla 2 che

$\neg G(p, b)$
p non è aggressivo con Bianca.

Dunque potremmo inferire dalla 1 e dalla 2 che c'è qualcuno che non è aggressivo né con Arabella, né con Bianca. Ma questa inferenza è chiaramente scorretta.

Esercizio 11 *Descrivete un controesempio.*

Esercizio 12 *Applicate la regola Elim∀F alle seguenti premesse:*

$$\frac{\neg(\forall x)G(x,b)}{\quad} \qquad \frac{\neg(\forall x)(G(x,b) \lor G(b,x))}{\quad} \qquad \frac{\neg(\forall y)(G(y,b) \to G(a,y))}{\quad}$$

Deduzioni e controesempi

Consideriamo la seguente inferenza:

$$\frac{(\exists y)(\forall x)G(x,y)}{(\forall x)(\exists y)G(x,y)} \quad \begin{array}{l}\text{[C'è qualcuno con cui tutti sono aggressivi]}\\ \text{[Tutti sono aggressivi con qualcuno]}\end{array}$$

Si tratta di un inferenza corretta? Intuitivamente sì, perché se è vero che c'è qualcuno, diciamo p, con cui tutti sono aggressivi, e cioè

per ogni x, è vero che x è aggressivo con p

allora deve anche essere vero che per ogni x c'è qualcuno con cui x è aggressivo (cioè p).

Vediamo come si fa a dedurre la conclusione dalle premesse per mezzo delle nostre regole. In questo paragrafo useremo la tecnica del *ragionamento per assurdo* (vedi Dispensa n. 4, pp. 27–29). Questa tecnica può essere usata in generale. Cioè, ogni volta che vogliamo dedurre una certa conclusione P da un certo insieme Γ di informazioni iniziali, possiamo farlo dimostrando che l'insieme di informazioni ottenuto aggiungendo $\neg P$ a Γ ($\Gamma \cup \{\neg P\}$ nel linguaggio della teoria degli insiemi) è *incoerente*.

1	$(\exists y)(\forall x)G(x,y)$	IR
2	$\neg(\forall x)(\exists y)G(x,y)$	Negazione della conclusione
3	$(\forall x)G(x,p)$	Elim∃V (1): p è *nuovo*
4	$\neg(\exists y)G(q,y)$	Elim∀F (2); q è *nuovo*
5	$G(q,p)$	Elim∀V (3)
6	$\neg G(q,p)$	Elim∃F (4)
	$\times$	$(5,6)$

Notate che nelle righe 5 e 6 abbiamo usato i parametri p e q che erano stati introdotti in precedenza nelle righe 3 e 4. Questo è del tutto legittimo dal momento che le regole usate in questi due passi (Elim∀V e Elim∃F) *non hanno restrizioni*, ci consentono cioè di usare una qualunque termine chiuso (nome o parametro) anche se è stato usato in precedenza. Che dire dell'inferenza inversa?

$$\frac{(\forall x)(\exists y)G(x,y)}{(\exists y)(\forall x)G(x,y)} \qquad \begin{array}{l}\text{[Tutti sono aggressivi con qualcuno]}\\ \text{[C'è qualcuno con cui tutti sono aggressivi]}\end{array}$$

Questa inferenza è intuitivamente falsa e, infatti, a p. 9 sopra abbiamo già mostrato un *controesempio*, cioè uno stato di cose in cui la premessa è vera e la conclusione è falsa.

Esercizio 13 *Mostrate, con un ragionamento per assurdo, che la seguente inferenza è corretta.*

$$\frac{(\exists x)(\forall y)G(x,y)}{(\forall y)(\exists x)G(x,y)} \qquad \begin{array}{l}\textit{[C'è qualcuno che è aggressivo con tutti]}\\ \textit{[Tutti sono aggrediti da qualcuno]}\end{array}$$

Esercizio 14 *Mostrate, costruendo un controesempio, che la seguente inferenza è scorretta.*

$$\frac{(\forall y)(\exists x)G(x,y)}{(\exists x)(\forall y)G(x,y)} \qquad \begin{array}{l}\textit{[Tutti sono aggrediti da qualcuno]}\\ \textit{[C'è qualcuno che è aggressivo con tutti]}\end{array}$$

Consideriamo ora la seguente inferenza:

$$\begin{array}{cl} \neg(\forall x)(A(x) \to B(x)) & \text{Non tutti gli } A \text{ sono } B \\ (\forall x)(A(x) \to C(x)) & \text{Tutti gli } A \text{ sono } C \\ \hline \neg(\forall x)(C(x) \to B(x)) & \text{Non tutti i } C \text{ sono } B \end{array}$$

Si tratta di un'inferenza corretta (è uno dei sillogisimi aristotelici della terza figura). Se provate a descrivere un controesempio non ci riuscirete mai. Dimostriamolo per assurdo usando le nostre regole.

1	$\neg(\forall x)(A(x) \to B(x))$	Non tutti gli A sono B
2	$(\forall x)(A(x) \to C(x))$	Tutti gli A sono C
3	$\neg\neg(\forall x)(C(x) \to B(x))$	È falso che non tutti i C sono B
4	$(\forall x)(C(x) \to B(x))$	Elim$\neg\neg$ (3)
5	$\neg(A(p) \to B(p))$	Elim$\forall$F (1)
6	$A(p)$	Elim$\to$F1 (5)
7	$\neg B(p)$	Elim$\to$F2 (5)
8	$A(p) \to C(p)$	Elim$\forall$V (2)
9	$C(p)$	Elim$\to$1 (8,6)
10	$C(p) \to B(p)$	Elim$\forall$V (4)
11	$B(p)$	Elim$\to$1 (10,9)
	$\times$	$(7, 11)$

Notate che nel passo 5 abbiamo introdotto un parametro nuovo p, come richiesto dalla regola Elim∀F, ma nel passo 8 abbiamo riutilizzato lo stesso parametro dal momento che la regola applicata (Elim∀V) non ha restrizioni sui parametri.

Esercizio 15 *Sul modello dell'esempio precedente, dimostrate per assurdo che la seguente inferenza è corretta:*

$$\begin{array}{cl} (\forall x)(A(x) \to B(x)) & \textit{Tutti gli } A \textit{ sono } B \\ \neg(\forall x)(C(x) \to B(x)) & \textit{Non tutti i } C \textit{ sono } B \\ \hline \neg(\forall x)(C(x) \to A(x)) & \textit{Non tutti i } C \textit{ sono } A \end{array}$$

Esercizio 16 *Dimostrate per assurdo che la seguente inferenza è corretta:*

$$\begin{array}{cl} (\exists x)(A(x) \wedge B(x)) & \textit{Qualche } A \textit{ è } B \\ \neg(\exists x)(C(x) \wedge A(x)) & \textit{Nessun } C \textit{ è } A \\ \hline (\exists x)(B(x) \wedge \neg C(x)) & \textit{Qualche } B \textit{ non è } C \end{array}$$

Consideriamo ora la seguente inferenza:

$$\begin{array}{cl} (\forall x)(A(x) \to B(x)) & \text{Tutti gli } A \text{ sono } B \\ (\exists x)(B(x) \wedge C(x)) & \text{Qualche } B \text{ è } C \\ \hline (\exists x)(A(x) \wedge C(x)) & \text{Qualche } A \text{ è } C \end{array} \tag{28}$$

Si tratta di un'inferenza *scorretta*. Un controesempio si può descrivere facilmente utilizzando i *diagrammi di Eulero-Venn* in cui gli insiemi sono rappresentati da ovali (vedi Fig. 1). L'informazione secondo cui "Qualche B è C", cioè $(\exists x)(B(x) e C(x))$ è rappresentata dal fatto che i due ovali — che denotano rispettivamente l'insieme degli oggetti che sono B e l'insieme degli oggetti che sono C — hanno un'*intersezione* non vuota, cioè hanno degli elementi in comune.

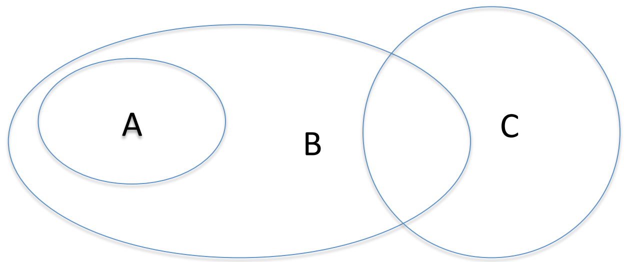


Figura 1: Controesempio all'inferenza (28).

Consideriamo infine un ultimo esempio, dovuto a Bertrand Russell.[2]

[2] Si tratta di una versione intuitiva di un celebre paradosso formulato da Russell stesso intorno al 1918 che colpiva alle fondamenta l'allora nascente teoria assiomatica degli insiemi. Il paradosso di Russell, mostrava che quest'ultima era incoerente, dal momento che consentiva di asserire l'esistenza dell' "insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi", mentre si mostra facilmente che un insieme del genere non può esistere, dal momento che dovrebbe al tempo stesso contenere se stesso e non contenere se stesso. In seguito a paradossi di questo tipo, la teoria degli insiemi dovette essere rifondata modificandone gli assiomi, per evitare che fossero deducibili contraddizioni.

IL BARBIERE DI RUSSELL: Esiste un barbiere che rade tutte e solo le persone che non si radono da sé.

Questa proposizione è una *contraddizione*, cioè non esiste un mondo possibile in cui è vera. Per dimostrarlo, dobbiamo prima esprimerla correttamente in un linguaggio quantificazionale.

A questo scopo, usiamo $R(x, y)$ come abbreviazione della proposizione aperta "x rade y". Allora, "x rade tutti quelli che non si radono da sé" si traduce così:

$$(\forall y)(\neg R(y, y) \to R(x, y)).$$

Mentre "x rade solo quelli che non si radono da sé" si traduce così:

$$(\forall y)(R(x, y) \to \neg R(y, y)).$$

Dunque "x rade tutti e solo quelli che non si radono da sé" si traduce così:

$$(\forall y)(\neg R(y, y) \to R(x, y)) \land (\forall y)(R(x, y) \to \neg R(y, y))$$

Il paradosso del barbiere dice che esiste *almeno un* elemento del dominio di cui questa proposizione aperta è vera, cioè:

$$(\exists x)\left[(\forall y)(\neg R(y, y) \to R(x, y)) \land (\forall y)(R(x, y) \to \neg R(y, y))\right] \qquad (29)$$

Mostriamo ora che questa proposizione è *incoerente* costruendo un albero deduttivo in cui *tutti i rami sono chiusi*.

1	$(\exists x)\big[(\forall y)(\neg R(y,y) \to R(x,y)) \wedge (\forall y)(R(x,y) \to \neg R(y,y))\big]$		
2	$(\forall y)(\neg R(y,y) \to R(p,y)) \wedge (\forall y)(R(p,y) \to \neg R(y,y))$		
3	$(\forall y)(\neg R(y,y) \to R(p,y))$		
4	$(\forall y)(R(p,y) \to \neg R(y,y))$		
5	$\neg R(p,p) \to R(p,p)$		
6	$R(p,p) \to \neg R(p,p)$		
7.1	$R(p,p)$	7.2	$\neg R(p,p)$
8.1	$\neg R(p,p)$	8.2	$R(p,p)$
	$\times$		$\times$

Questo dimostra che il barbiere di Russell non può esistere e che, dunque, assumerne l'esistenza è autocontraddittorio.

Esercizio 17 *Mostrate che è autocontraddittoria la proposizione:*

Arabella ama tutte e solo le persone che non la amano.