

Come ragionare (se proprio dovete) I *Elementi di Logica*

Marcello D'Agostino

Dispensa 4, Lezioni 10–12

Copyright ©2013 Marcello D'Agostino

Indice

<i>Il condizionale: Parte II</i>	2
<i>Il condizionale booleano come approssimazione del condizionale ordinario</i>	2
<i>Regole di eliminazione per il condizionale booleano</i>	5
<i>Regole di introduzione per il condizionale booleano</i>	7
<i>Le anomalie del condizionale booleano</i>	10
<i>Le origini della “querelle”: Filone, Diodoro e Crisippo</i>	12
<i>Deduzioni e controesempi con il condizionale booleano</i>	14
<i>L'arte della deduzione</i>	20
<i>Un metodo sistematico per applicare le regole di inferenza</i>	20
<i>L'incompletezza delle regole intelim</i>	23
<i>Il ragionamento per casi e la regola di bivalenza</i>	24
<i>Il ragionamento per assurdo</i>	28
<i>Tautologie e contraddizioni</i>	31

Il condizionale: Parte II

Il condizionale booleano come approssimazione del condizionale ordinario

Nell'ultimo paragrafo della Dispensa 3 abbiamo sostenuto che, in alcuni contesti, asserire la *falsità* di un condizionale come:

Se Arabella è aggressiva con Carlo, allora Carlo è aggressivo con Bianca (1)

equivale ad asserire:

È possibile che Arabella sia aggressiva con Carlo e Carlo non sia aggressivo con Bianca. (2)

Dunque, asserire la *verità* della (1) equivale ad asserire:

Non è possibile che Arabella sia aggressiva con Carlo e Carlo non sia aggressivo con Bianca. (3)

Così, in generale, dire che un condizionale della forma $P \rightarrow Q$ è *vero*, in alcuni casi equivale a dire che:

Non è possibile che P sia vera e Q sia falsa. (4)

Esercizio 1 Spiegate perché, nell'interpretazione data dalla (4), il *modus ponens* e il *modus tollens* (vedi Dispensa 3) sono regole corrette.

L'esercizio precedente conferma che, come abbiamo sostenuto nella Dispensa 3, il *modus ponens* e il *modus tollens* sono schemi di ragionamento corretti—e di grande utilità—nel ragionamento ordinario. Tuttavia, nell'interpretazione data dalla (4) un condizionale asserisce l'esistenza di una *connessione* fra la verità dell'antecedente e la verità del conseguente (di tipo logico, fisico, psicologico o di qualunque altra natura) che richiede, per essere espressa, il concetto di *possibilità* il quale non è riducibile alla verità o falsità *fattuale*. Per stabilire se qualcosa è possibile o non è possibile, non è sufficiente considerare ciò che accade di fatto: “è possibile che domani venga estratto il 5 come primo numero sulla ruota di Napoli” è vero anche se domani non viene estratto il 5. E anche se sappiamo che il 5 non è stato estratto, dobbiamo continuare a pensare che l'estrazione del 5 fosse possibile, altrimenti dovremmo concludere che l'urna era truccata.

Supponiamo che qualcuno, diciamo A , sia fermamente convinto che:

Se Mario vince al supernealotto, smette di lavorare, (5)

mentre B è fermamente convinto del contrario. Consideriamo tutte le possibili circostanze fattuali.

Alcuni sostenitori radicali del *determinismo*, ritengono che tutto ciò che accade *non potrebbe accadere diversamente*: l'intera evoluzione dell'universo è completamente determinata (da leggi ineluttabili) fin dalla sua origine. In tal caso, “possibile” o “impossibile” sono espressioni che possono riferirsi solo alla nostra *ignoranza* su quale sia lo stato di cose che effettivamente si verifica o si verificherà. Secondo questi deterministi radicali, in una situazione di *informazione perfetta*, non ci sarebbe nessuna differenza fra “è falso” e “è impossibile”. Aristotele non era fra questi. Nel cap. IX del *De Interpretatione* sostenne che la proposizione “Domani ci sarà una battaglia navale” non può essere oggi né vera, né falsa, in quanto si riferisce a un evento davvero *indeterminato*, cioè che può accadere e può anche non accadere.

1. Mario non vince e smette di lavorare. In queste circostanze sia *A* sia *B* potranno continuare a sostenere di avere ragione. *A* potrà far notare che, secondo la (5), la vincita era una condizione *sufficiente* e non necessaria. Dunque che Mario abbia lasciato il lavoro pur avendo vinto non prova affatto che l'affermazione di *A* fosse falsa: quest'ultimo può sempre sostenere che la vincita *sarebbe stata* sufficiente a farlo dimettere, anche se le sue dimissioni hanno avuto, di fatto, qualche altra motivazione. D'altra parte *B* può continuare a sostenere che l'affermazione di *A* fosse falsa e che, anche se Mario *avesse vinto*, ciò *non sarebbe stato* sufficiente a farlo dimettere se non fossero intervenute altre motivazioni a spingerlo verso questa decisione. Dunque, in questo caso le circostanze fattuali non sono sufficienti a determinare la verità o la falsità del condizionale (5).
2. Mario non vince e non smette di lavorare. Anche in queste circostanze sembra che i fatti non provino nulla. *A* e *B* possono continuare a dibattere su chi avesse ragione o torto, argomentando su ciò che *sarebbe accaduto* se Mario *avesse vinto*.
3. Mario vince e smette di lavorare. In questo caso *A* sosterrà trionfalmente che i fatti provano la sua asserzione. Ma *B* potrebbe comunque ribattere che non è così, che non è affatto scontato che vi sia una connessione fra la vincita e le dimissioni: è perfettamente *possibile*, in assenza di ulteriori informazioni, che Mario si sia dimesso dal posto di lavoro per altre ragioni (per esempio per motivi di salute) e si può così mettere in dubbio che *A* avesse ragione nell'asserire la (5), e cioè nell'asserire che la vincita al superenalotto fosse una condizione *sufficiente* perché Mario smettesse di lavorare.
4. Mario vince e non smette di lavorare. Questa è l'unica situazione chiara. In queste circostanze *A* aveva torto nel sostenere che la (5) fosse vera — i fatti dimostrano che la vincita al superenalotto non era una condizione sufficiente perché Mario smettesse di lavorare — e *B* aveva ragione nel sostenere che fosse falsa.

La discussione precedente mostra che spesso un condizionale, come quello espresso dalla (5), asserisce l'esistenza di una relazione fra la verità dell'antecedente e quella del conseguente che non può essere stabilita guardando solo a ciò che accade di fatto: in tre casi su quattro le circostanze fattuali sono compatibili sia con la verità del condizionale sia con la sua falsità. In particolare, la tesi di *B*, il quale sostiene che la (5) è falsa, è *compatibile con qualunque stato di fatto* riguardo alla verità o falsità dell'antecedente e del conseguente. Questo significa che la falsità della (5) non implica nessuna conseguenza specifica riguardo alla verità o falsità di fatto del suo antecedente e

del suo conseguente. Così la teoria consequenzialista (vedi Dispensa 1) è inadeguata a stabilire il significato di un condizionale.

Esercizio 2 *Costruite altri esempi concreti in cui, per determinate proposizioni P e Q , il condizionale $P \rightarrow Q$ può essere considerato falso indipendentemente dalla verità o falsità di P e di Q .*

Ma le cose non vanno meglio per la seconda teoria del significato che abbiamo considerato, quella vero-condizionale (vedi Dispensa 2). La discussione della verità e della falsità della (5) mostra che le condizioni della verità di un condizionale sono altamente indeterminate: l'unico caso chiaro in cui un condizionale non può essere vero è quello in cui il suo antecedente è vero e il suo conseguente è falso (caso 4). Ma tutti gli altri casi sono compatibili sia con la verità sia con la falsità del condizionale, e dunque non possiamo specificare con precisione da quali informazioni sull'antecedente e sul conseguente è lecito inferire la verità di un condizionale. Dunque la verità o falsità di fatto dell'antecedente e del conseguente non determinano, tranne che nel caso 4, la verità o la falsità del condizionale.¹

Una soluzione di questo problema consiste nell'uscire dai confini della logica booleana, nell'indagare cioè il condizionale mediante regole di significato più complesse di quelle a cui può condurre la teoria consequenzialista (che abbiamo studiato nella Dispensa 1) o la teoria vero-condizionale (che abbiamo studiato nella Dispensa 2),

Un'altra soluzione, che è quella che adotteremo in questo corso, consiste nell'adottare un atteggiamento molto frequente nel discorso scientifico: quando un problema non può essere risolto *esattamente*, provate a trovare una soluzione *approssimata*. Si tratta dunque, in questo caso, di cercare un'espressione booleana che costituisca la *migliore approssimazione possibile* al significato del condizionale nel ragionamento ordinario.

Se accettiamo l'idea che il significato ordinario di un condizionale $P \rightarrow Q$ sia vicino a quello espresso nella (4)—in qualche senso della parola “possibile” da specificare ulteriormente—e una volta chiarito che “è possibile” non è una parola logica booleana, la migliore approssimazione della (4) in termini di parole logiche booleane, è indubbiamente la seguente:

È falso che P sia vera e Q sia falsa. (6)

Una volta convenuto che (6) costituisce la migliore approssimazione booleana possibile della (4), possiamo usarla per dare una *definizione esplicita* del condizionale booleano come segue:

$$P \rightarrow Q =_{\text{def}} \neg(P \wedge \neg Q). \quad (7)$$

In altri termini un condizionale booleano $P \rightarrow Q$ viene considerato equivalente, per definizione, a “è falso che P sia vera e Q falsa”, cioè

¹ Per questa ragione, come abbiamo anticipato nell'ultimo paragrafo della Dispensa 3 *non esiste* una parola logica booleana che possa pienamente rendere conto del significato del condizionale nel ragionamento ordinario. Come abbiamo visto, le parole logiche booleane sono caratterizzate dal fatto che soddisfano la *proprietà vero-funzionale*—la verità o la falsità di una proposizione che contiene una certa parola logica booleana (come parola logica principale) dipende esclusivamente dalla verità o dalla falsità dei suoi costituenti immediati. Come abbiamo appena mostrato, il condizionale ordinario *non soddisfa questa proprietà*: la verità di un condizionale come quello espresso dalla (5) in un determinato stato di cose in molti casi è del tutto *indipendente* dalla verità o falsità del suo antecedente e del suo conseguente (cioè dei suoi costituenti immediati) in quello stesso stato di cose, e dunque deve dipendere da qualcos'altro.

Definizione esplicita del condizionale booleano in termini di congiunzione e negazione

alla falsità della congiunzione dell'antecedente con la negazione del conseguente.

Regole di eliminazione per il condizionale booleano

Nella Dispensa 3 e nell'Esercizio 1 abbiamo sostenuto che il *modus ponens* e il *modus tollens* sono schemi di ragionamento che corrispondono fedelmente all'uso del condizionale nel ragionamento scientifico e in quello ordinario. Adesso mostreremo che entrambe queste regole di eliminazione del condizionale vero possono essere derivate dalla nostra definizione esplicita del condizionale data nella (7).

Cominciamo con il *modus ponens* e supponiamo che le sue premesse siano vere, cioè:

$$\begin{array}{l} V P \rightarrow Q \\ V P \end{array}$$

Dobbiamo mostrare che, se il condizionale è definito come nella (7), possiamo *dedurre* che deve essere vera anche la conclusione " $V Q$ ".

Se il condizionale è definito come nella (7) le premesse del *modus ponens* equivalgono a:

$$\begin{array}{l} V \neg(P \wedge \neg Q) \\ V P. \end{array}$$

Abbiamo semplicemente sostituito la proposizione $P \rightarrow Q$ con una proposizione che, secondo la (7), è equivalente ad essa per definizione. A questo punto, però, siamo in grado di applicare le regole note per la negazione e la congiunzione e dedurre la conclusione del *modus ponens* nel modo seguente:

$$\begin{array}{ll} (1) & V \neg(P \wedge \neg Q) \quad (=_{def} V P \rightarrow Q) \\ (2) & V P \\ \hline (3) & F P \wedge \neg Q \quad \text{elim-}\neg V (1) \\ (4) & F \neg Q \quad \text{elim-}\wedge F1 (3,2) \\ (5) & V Q \quad \text{elim-}\neg F (4) \end{array}$$

Dimostrazione che il *modus ponens* è una regola corretta per il condizionale booleano

Questa deduzione mostra che se la (1) e la (2) sono vere deve essere vera anche la conclusione (5). Ma, dato che la (1) è equivalente per definizione a $V P \rightarrow Q$, questo è sufficiente a concludere che sulla base della definizione (7) il *modus ponens*:

$$\begin{array}{l} V P \rightarrow Q \\ V P \\ \hline V Q \end{array}$$

è una regola di inferenza corretta.

Esercizio 3 *Mostrate, con un ragionamento analogo, che anche il modus tollens è una regola di inferenza corretta per il condizionale booleano, cioè per il condizionale definito dalla (7).*

Il fatto che il *modus ponens* e il *modus tollens*—cioè i due schemi di ragionamento tipici del condizionale ordinario—siano regole corrette anche per il condizionale booleano definito dalla (7) conferma che quest'ultimo costituisce una *buona approssimazione* al condizionale ordinario.

Proviamo ora a dedurre, sempre usando la definizione (7), quali devono essere le regole di *eliminazione per il condizionale (booleano) falso* che non eravamo riusciti a stabilire per il condizionale ordinario. Supponiamo di sapere che un certo condizionale $P \rightarrow Q$ è falso. Sostituendo $P \rightarrow Q$ con la proposizione che, secondo la (7), è ad essa equivalente, e applicando le regole note per la negazione e la congiunzione, possiamo dedurre le conseguenze dell'aspezione che $P \rightarrow Q$ è falsa nel modo seguente:

(1)	$F \neg(P \wedge \neg Q)$	$(=_{def} F P \rightarrow Q)$
(2)	$V P \wedge \neg Q$	elim $\neg$ F (1)
(3)	$V P$	elim $\wedge$ V ₁ (2)
(4)	$V \neg Q$	elim $\wedge$ V ₂ (2)
(5)	$F Q$	elim $\neg$ V (4)

Conseguenze della falsità di un condizionale booleano

Dunque, dalla falsità di un condizionale booleano segue sia la verità del suo antecedente sia la falsità del suo conseguente. Questo vuol dire che, per il condizionale booleano, sono corrette le seguenti *regole di eliminazione del condizionale falso*:

ELIM $\rightarrow$ F1: Se un condizionale (booleano) è falso, allora il suo antecedente è vero

ELIM $\rightarrow$ F2: Se un condizionale (booleano) è falso, allora il suo conseguente è falso.

Cioè, sono corrette la seguenti regole di inferenza:

$\frac{F P \rightarrow Q}{V P}$	$\frac{F P \rightarrow Q}{F Q}$
---------------------------------	---------------------------------

o, nella versione non-segnata,

$\frac{\neg(P \rightarrow Q)}{P}$	$\frac{\neg(P \rightarrow Q)}{\neg Q}$
-----------------------------------	--

Regole di eliminazione del condizionale (booleano) falso

Riassumendo, le regole di eliminazione del condizionale booleano, cioè del condizionale definito dalla (7), sono quelle espresse nella Tabella 1.

$$\frac{VP \rightarrow Q \quad VP}{VQ} \quad \frac{VP \rightarrow Q \quad FQ}{FP} \quad \frac{FP \rightarrow Q \quad VP}{VP} \quad \frac{FP \rightarrow Q \quad FQ}{FQ}$$

o, nella versione non segnata,

$$\frac{P \rightarrow Q \quad P}{Q} \quad \frac{P \rightarrow Q \quad \neg Q}{\neg P} \quad \frac{\neg(P \rightarrow Q) \quad P}{P} \quad \frac{\neg(P \rightarrow Q) \quad \neg Q}{\neg Q}$$

Regole di introduzione per il condizionale booleano

Le regole di eliminazione del condizionale booleano che abbiamo esaminato nel paragrafo precedente ci dicono, in accordo con la teoria consequenzialista, quali sono le conseguenze immediate della verità e della falsità di una proposizione che contiene il condizionale booleano come parola logica principale. Possiamo ora provare a specificare opportune regole di introduzione che, in accordo con la teoria vero-condizionale, ci dicano quali sono le condizioni sufficienti per la verità o falsità di un condizionale, ossia da quali premesse è possibile concludere che un certo condizionale $P \rightarrow Q$ è vero o falso.

Abbiamo visto che asserire che un condizionale booleano $P \rightarrow Q$ è *vero* equivale ad asserire che è *falsa* la congiunzione $P \wedge \neg Q$ del suo antecedente con la negazione del suo conseguente. D'altra parte, secondo le regole di introduzione della congiunzione falsa che abbiamo studiato nella Dispensa 2, per poter asserire che una certa congiunzione è falsa è sufficiente sapere che è falsa una delle due proposizioni congiunte, in questo caso P e $\neg Q$. Dunque, per asserire che un certo condizionale $P \rightarrow Q$ è vero, cioè che la congiunzione $P \wedge \neg Q$ è falsa, è sufficiente sapere o che è falsa P oppure che è falsa $\neg Q$. Ma per sapere che è falsa $\neg Q$ è sufficiente sapere che Q è vera. Dunque per potere concludere che un certo condizionale $P \rightarrow Q$ è vero, è sufficiente avere a disposizione come premesse o la falsità del suo antecedente P o la verità del suo conseguente Q . Il ragionamento sottostante è rappresentato dalle seguenti due deduzioni schematiche:

$$\begin{array}{ll} (1) & FP \\ (2) & FP \wedge \neg Q \quad \text{int}\wedge F1 (1) \\ (3) & V \neg(P \wedge \neg Q) (=_{def} VP \rightarrow Q) \quad \text{int}\neg V (2) \end{array}$$

Tabella 1: Regole di eliminazione del condizionale booleano.

Non dovete lasciarvi fuorviare dall'uso delle lettere schematiche P e Q . Ricordate che P e Q rappresentano proposizioni *qualsiasi*, non importa se elementari o complesse. E' ovvio che se avessimo usato altre lettere al posto di P e Q sarebbe stata esattamente la stessa cosa. Per esempio, le regole di introduzione della congiunzione falsa, potrebbero anche essere espresse come segue:

$$\frac{FR}{FR \wedge S} \quad \text{e} \quad \frac{FS}{FR \wedge S}$$

usando le lettere schematiche R e S al posto della P e della Q che abbiamo usato nella Dispensa 2, e avrebbero esattamente lo stesso significato di prima, e cioè che se una *qualsiasi* proposizione (elementare o complessa) è falsa allora è falsa la sua congiunzione con *qualsiasi* altra proposizione (elementare o complessa). E' dunque chiaro che noi possiamo applicare le regole usando qualunque proposizione al posto delle lettere schematiche che abbiamo usato, in particolare anche l'antecedente P di un condizionale $P \rightarrow Q$ e la negazione $\neg Q$ del suo conseguente, dove P e Q stanno di nuovo per proposizioni *qualsiasi* (elementari o complesse). In altri termini, se è chiaro che al posto di delle lettere schematiche possiamo mettere proposizioni qualsiasi, dovrebbe essere chiaro anche che al posto di ciascuna di esse possiamo anche mettere la negazione di una proposizione qualsiasi,

- | | | |
|-----|--|---------------------------|
| (1) | $V Q$ | |
| (2) | $F \neg Q$ | $\text{int}\neg F$ (1) |
| (3) | $F P \wedge \neg Q$ | $\text{int}\wedge F2$ (2) |
| (4) | $V \neg(P \wedge \neg Q) (=_{\text{def}} V P \rightarrow Q)$ | $\text{int}\neg V$ (3) |

Ne segue che le nostre *regole di introduzione del condizionale vero* saranno le seguenti:

INT $\rightarrow$ V1: Se l'antecedente di un condizionale è falso, allora il condizionale è vero.

INT $\rightarrow$ V2: Se il conseguente di un condizionale è vero, allora il condizionale è vero.

Cioè, sono corrette la seguenti regole di inferenza:

$$\frac{F P}{V P \rightarrow Q} \quad \frac{V Q}{V P \rightarrow Q}$$

o, nella versione non-segnata,

$$\frac{\neg P}{P \rightarrow Q} \quad \frac{Q}{P \rightarrow Q}$$

Regole di introduzione del condizionale (booleano) vero

Resta da determinare quali siano opportune condizioni sufficienti a introdurre la *falsità* di un condizionale. Dovrebbe essere chiaro (vedi anche la discussione nel Paragrafo “Il condizionale booleano come approssimazione del condizionale ordinario”), che se l'antecedente di un condizionale è vero e il suo conseguente è falso, allora ciò è sufficiente a concludere che il condizionale è falso. Abbiamo anche visto che questo è l'unico caso in cui anche il condizionale del linguaggio ordinario è *chiaramente* falso (se è vero che Mario vince al superenalotto” ed è falso che “Mario smette di lavorare”, il condizionale “se Mario vince al superenalotto, allora smette di lavorare” deve necessariamente essere falso).

Così avremo un'unica *regola di introduzione del condizionale falso* che sarà la seguente:

INT $\rightarrow$ F: Se l'antecedente di un condizionale è vero e il suo conseguente è falso, allora il condizionale è falso.

Cioè, è corretta la seguente regole di inferenza:

$$\frac{V P}{F Q} \quad \text{o, nella versione non-segnata,} \quad \frac{P}{\neg Q} \quad \frac{F P \rightarrow Q}{\neg(P \rightarrow Q)}$$

Regola di introduzione del condizionale falso

Come abbiamo detto, questa regola è corretta per il condizionale del linguaggio ordinario e non è difficile dimostrare essa è corretta anche per il condizionale booleano.

Esercizio 4 Usate le regole di introduzione della congiunzione e della negazione, e la definizione (7) del condizionale booleano, per mostrare che la regola $\text{int} \rightarrow F$ è corretta per il condizionale booleano.

Ricapitolando, le regole di introduzione del condizionale booleano sono quelle elencate nella Tabella 2

$$\frac{F P}{V P \rightarrow Q} \quad \frac{V Q}{V P \rightarrow Q} \quad \frac{V P \quad F Q}{F P \rightarrow Q}$$

o, nella versione non segnata,

$$\frac{\neg P}{P \rightarrow Q} \quad \frac{Q}{P \rightarrow Q} \quad \frac{P \quad \neg Q}{\neg(P \rightarrow Q)}$$

Tabella 2: Regole di introduzione del condizionale booleano.

Possiamo riassumere il significato del condizionale booleano, come abbiamo fatto nella Dispensa n.1 per le altre parole logiche, in una *tavola di verità*. Nella Tabella 3 viene specificato in quali circostanze il condizionale *booleano* $P \rightarrow Q$ è vero e in quali circostanze è falso. Come al solito, da questa tavola è possibile derivare sia

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabella 3: Tavola di verità per il condizionale booleano.

le regole di introduzione sia le regole di eliminazione. Per quanto riguarda le regole di introduzione, la prima regola di introduzione del condizionale vero:

$$\frac{F P}{V P \rightarrow Q}$$

può essere derivata dalle ultime due righe della tavola. Infatti queste ci dicono che se l'antecedente di un condizionale è falso, il condizionale è vero indipendentemente dalla verità o falsità del conseguente. Lo stesso vale per l'altra regola di introduzione del condizionale vero:

$$\frac{V Q}{V P \rightarrow Q}$$

che può essere “letta” dalla prima e dalla terza riga. Infine, la regola di introduzione del condizionale falso:

$$\frac{V P \quad F Q}{F P \rightarrow Q}$$

può essere derivata dalla seconda riga della tavola.

Esercizio 5 *Mostrate che anche le regole di eliminazione del condizionale booleano possono essere derivate dalla tavola di verità in Tabella 3.*

Le anomalie del condizionale booleano

Il condizionale booleano è stato presentato come un’*approssimazione* del condizionale ordinario, anzi come *la migliore* approssimazione che può essere ottenuta nell’ambito delle parole logiche booleane.²

Come tutte le buone approssimazioni, essa fornisce i risultati attesi in alcuni “casi paradigmatici”. Abbiamo visto la nostra approssimazione corrisponde perfettamente all’uso ordinario e all’uso scientifico per quanto riguarda le regole di eliminazione del condizionale vero (*modus ponens* e *modus tollens*) e la regola di introduzione del condizionale falso. Essa invece non sembra corrispondere altrettanto bene all’uso ordinario per quanto riguarda le altre regole, cioè le regole di eliminazione del condizionale falso e quelle di introduzione del condizionale vero.

La regola elim $\rightarrow$ F1 sembra particolarmente anomala, in quanto ci consente di concludere, per esempio, dalla falsità di un condizionale come “se Mario vince al superenalotto, smette di lavorare”, la verità del suo antecedente e cioè che “Mario vince al superenalotto”, una conseguenza che ben difficilmente è intesa da chi asserisce la falsità del condizionale in questione. Appena un po’ meno anomala appare la regola elim $\rightarrow$ F2. Essa ci consente di concludere, per usare lo stesso esempio di prima, dalla falsità di “se Mario vince al superenalotto, smette di lavorare”, la falsità del suo conseguente e cioè che “Mario non smette di lavorare”, contrariamente all’intuizione almeno di alcuni parlanti (vedi il caso 2 di p. 3).

Per quanto riguarda le regole di introduzione, la regola int $\rightarrow$ V1 ci consente di concludere, da una premessa che asserisca la falsità di “Mario vince al superenalotto”, che è vero il condizionale “se Mario vince al superenalotto, allora smette di lavorare”. Anzi, dalla quella stessa premessa essa ci consente di concludere che è vero qualunque condizionale che abbia “Mario vince al superenalotto” come antecedente, non importa quale sia il suo conseguente, per esempio che è vero anche il condizionale “se Mario vince al superenalotto, allora mio fratello è un frigorifero”. D’altra parte, la regola int $\rightarrow$ V2 ci

² Ricordate che abbiamo chiamato *booleane* quelle parole logiche che soddisfano la proprietà vero-funzionale (vedi ultimo paragrafo della Dispensa 3) e il cui significato può perciò essere definito adeguatamente in accordo con la teoria consequenzialista (Dispensa 1) e con la teoria vero-condizionale (Dispensa 2).

consente di concludere, da una premessa che asserisca la verità di “Mario smette di lavorare”, non solo che è vero il condizionale “se Mario vince al superenalotto, allora smette di lavorare”, ma anche qualunque condizionale che abbia “Mario smette di lavorare” come conseguente, non importa quale sia il suo antecedente, per esempio che è vero anche il condizionale “se Mio fratello è un frigorifero, allora Mario smette di lavorare”. Entrambe queste regole sembrano a prima vista, piuttosto lontane dall’uso ordinario, tanto che la loro correttezza nella logica booleana viene spesso vista come altamente anomala, a tal punto che queste ultime due regole vengono spesso chiamate “paradossi del condizionale booleano”.

Abbiamo visto che se una proposizione della forma “se P , allora Q ” viene interpretata nel senso del condizionale booleano, cioè nel senso della (7), asserirne la verità equivale asserire “è falso che l’antecedente P sia vero e il conseguente Q falso”, ed asserirne la falsità equivale ad asserire “è vero che l’antecedente P è vero e il conseguente Q falso”. In tal caso, dal significato stesso della congiunzione e della negazione segue che tutte le regole “anomale” sono corrette.

D’altra parte, va anche osservato che queste regole—come è stato messo in evidenza dalla discussione nel primo paragrafo di questa dispensa—trattano casi per i quali il *comportamento del condizionale ordinario non è affatto chiaro* e non è affatto scontato che possa essere descritto da regole precise. Il condizionale booleano può allora essere considerato come una proposta *normativa* per “regolamentare” il condizionale, attribuendogli un significato che corrisponde bene al condizionale ordinario nei casi “paradigmatici” in cui il suo uso è chiaramente determinato (le regole di eliminazione del condizionale vero e la regola di introduzione del condizionale falso), mentre viene semplicemente imposto “per decreto”—anche a costo di apparire a volte come controintuitivo—nei casi più oscuri, in cui l’uso del condizionale ordinario è tutt’altro che chiaro e, anzi, appare altamente indeterminato. In questo senso, il condizionale booleano va visto come una “precisazione” dell’uso ordinario del condizionale—secondo un approccio che è in parte *descrittivo* e in parte *normativo*—che corrisponde ad esso in tutti i casi chiari e detta invece una nuova norma nei casi oscuri. Per “riappacificarsi” con il condizionale booleano è dunque sufficiente interpretarlo come una risposta semi-normativa ad un uso linguistico che non è sufficientemente determinato, cioè come uno dei possibili modi di rendere *più chiaro* il significato che il condizionale ha nell’uso ordinario.

“Uno dei possibili modi” non significa né “l’unico”, né “il migliore”, e molti altri tentativi sono stati fatti di definire regole più complesse che si avvicinino di più al “vero condizionale”. Tuttavia, nessuno di questi tentativi è mai riuscito a convincere tutti, e

si ha ormai l'impressione che *qualunque nuovo sistema di regole* finisca inesorabilmente per scontrarsi con qualche uso del condizionale che se ne discosta in modo più o meno evidente. Questa situazione suggerisce fortemente che forse è vana la ricerca di un sistema di regole che corrispondano esattamente al condizionale ordinario, per il semplice motivo che forse *non esiste* un'unica parola logica che rappresenti adeguatamente *tutti* gli usi dell'espressione "se...,allora---" *in qualunque contesto*. Tanto più che il dibattito su quale sia il "vero condizionale" è cominciato nel IV secolo a.C. e non si è ancora concluso.

Le origini della "querelle": Filone, Diodoro e Crisippo

La definizione del condizionale booleano, cioè quello governato dalle regole che abbiamo esaminato in questa Dispensa, risale addirittura a Filone di Megara, filosofo greco del IV secolo a.C., e la polemica contro questa definizione, cominciò subito. Ecco come le diverse posizioni che si configurarono al tempo vengono riassunte da Sesto Empirico (III secolo d.C.):

Filone dice che 'un condizionale vero è un condizionale che non comincia con una verità e finisce con una falsità', così che secondo lui ci sono tre modi in cui un condizionale può essere vero e uno solo in cui può essere falso. Infatti, è vero quando comincia con il vero e finisce con il vero [...], quando comincia con il falso e finisce con il falso [...] e infine quando comincia con il falso e finisce con il vero. È falso soltanto quando comincia con il vero e finisce con il falso. (Sesto Empirico, *Contro i logici*, p.169 e *Schizzi pirroniani*, pp. 83-84)

La posizione di Filone può essere riassunta così: l'unico caso chiaro in cui un condizionale è falso, si ha quando il suo antecedente è vero e il suo conseguente è falso (come nella regola $\text{int} \rightarrow \text{F}$). In tutti gli altri casi non è falso e dunque, se accettiamo il *principio di bivalenza* (vedi Dispensa 3)—secondo cui una proposizione o è vera o è falsa—deve essere vero.

Così, la posizione di Filone è quella codificata dalle nostre regole. Sesto Empirico riporta poi la posizione di Diodoro Crono (IV sec. a.C.):

Ma Diodoro dice che 'un condizionale vero è uno che non ha potuto né può cominciare con una verità e finire con una falsità'. E questo è in contrasto con la posizione di Filone. Infatti, un condizionale come 'se è giorno, sto conversando' è vero secondo Filone quando è giorno e sto conversando poiché comincia con il vero, 'è giorno', e finisce con il vero, 'sto conversando'. Invece, secondo Diodoro, esso è falso, poiché è possibile che cominci con una proposizione che è in un certo tempo vera e finisca con una proposizione falsa, 'sto conversando', quando ho smesso di conversare. (*Contro i logici*, p. 170)

Sesto riporta anche una terza posizione forse sostenuta da Crisippo (III sec. a.C.):

[...] quelli che introducono la nozione di connessione dicono che un condizionale è vero quando la negazione del conseguente è incompatibile con il suo antecedente. (*Ibid.* p. 170)

La posizione di Crisippo è essenzialmente quella espressa nella (4).

L'eco di questa controversia si ritrova alle origini della logica moderna in un lavoro del grande logico e filosofo americano, il pragmatista C.S. Peirce (1839-1914), che la descrive così:

Filone sosteneva che la proposizione 'se lampeggia, tuonerà' è vera se non lampeggia o se tuonerà ed è falsa se lampeggia e non tuona. Diodoro non era d'accordo. O gli storici antichi non hanno compreso Diodoro o lui stesso si spiegava male: il fatto è che nessuno è stato capace di formulare con chiarezza la sua posizione, benché ci abbiano provato in molti. La maggior parte dei logici migliori sono stati seguaci di Filone mentre i più scadenti sono stati seguaci di Diodoro. Per quanto mi riguarda, io sono un seguace di Filone, anche se penso che non sia mai stata resa giustizia a Diodoro. (cfr. C.S. Peirce, *Reasoning and the logic of things*, Harvard University Press, 1992, p.125).

Peirce ammetteva infatti che

il condizionale ordinario asserisce non solo che qui e ora o l'antecedente è falso o il conseguente è vero, ma che in ogni stato di cose possibile—entro una gamma di possibilità ben definita—o l'antecedente è falso o il conseguente è vero. La proposizione 'se lampeggia, tuonerà' significa che in tutti gli stati di cose compatibili con il corso della natura, o non lampeggia o tuona subito dopo. (*Ibid.* p. 125)

Anche la posizione di Diodoro, in questa rappresentazione che ne dà Peirce, può essere associata alla (4), anche se qui la componente temporale sembra svolgere un ruolo più importante.

Ma continuava a difendere il condizionale di Filone poiché

è del tutto irrilevante ciò che accade nel linguaggio ordinario. L'idea stessa di logica formale comporta che vengano costruite certe forme canoniche di espressione i cui significati sono governati da regole inflessibili. [...] Queste forme canoniche di espressione debbono essere definite senza il minimo riguardo per l'uso, in modo che corrispondano a classificazioni naturali, proprio come fanno i botanici o gli zoologi. (*Ibid.*, p. 126).

Cfr. quando detto alla fine del paragrafo precedente. La posizione di Peirce è molto più estrema. Per noi non è "del tutto irrilevante ciò che accade nel linguaggio ordinario". Anzi, le regole fissate dalla logica devono sforzarsi di corrispondere all'uso ordinario almeno nei casi in cui questo è chiaramente determinato (il *modus ponens*, il *modus tollens*, la regola di introduzione del condizionale falso).

Come abbiamo visto, secondo i critici del condizionale di Filone (che noi abbiamo chiamato *condizionale booleano*, ma che è noto anche come *condizionale materiale o classico*), esso non cattura una proprietà essenziale del condizionale ordinario, e cioè il fatto che quest'ultimo intende esprimere una *connessione* fra l'antecedente e il conseguente che di solito non può essere ridotta a questioni di fatto relative alla verità o alla falsità di questi ultimi. Nella formulazione per esempio di Crisippo, se un condizionale è vero, non solo non si dà il caso che il suo antecedente sia vero e il suo conseguente falso, ma *non è possibile* che il primo sia vero e il secondo falso, proprio come nella (4). Il contrasto tra i due approcci risalta bene considerando un esempio—che è dello stesso Crisippo—come "se gli atomi non esistono, allora gli atomi esistono". Secondo l'approccio "filoniano", questo condizionale deve essere considerata vero da chi crede che gli atomi esistono (in base alla regola condIV₁); secondo l'approccio "crisippiano", esso deve invece essere considerata falso anche da chi crede che gli atomi

esistano purché creda possibile un mondo in cui gli atomi non esistono; infatti, in un mondo del genere l'antecedente risulterebbe vero e il conseguente falso.

Il contrasto tra i due approcci ha a che vedere con una assunzione fondamentale dell'approccio filoniano che è drasticamente respinta da quello crisippiano. Si tratta dell'assunzione che abbiamo chiamato "priorietà verofunzionale", secondo cui il valore di verità di una proposizione in un dato stato dipende esclusivamente dal valore di verità dei suoi costituenti immediati in quello stesso stato. Dunque, mentre l'approccio filoniano implica che per determinare il valore di verità di una proposizione P in un dato stato è sufficiente conoscere i valori che i suoi costituenti immediati assumono in quello stesso stato, per l'approccio crisippiano questo non è in generale sufficiente: il valore di verità di P in un certo stato s può dipendere anche dal valore che i suoi costituenti assumono in altri stati possibili, o, come abbiamo anche detto in un linguaggio più metaforico, in altri "mondi possibili".

Deduzioni e controesempi con il condizionale booleano

Esempio 1 Torniamo al problema della piccionaia (vedi Dispensa 2). Supponiamo di avere le seguenti informazioni iniziali:

- (1) $(O(m,2) \vee O(m,3)) \rightarrow (O(t,3) \vee O(t,4))$
- (2) $O(m,3)$

Siamo in grado di determinare la posizione di Tina? Vediamo. Dalla (2), per una delle nostre regole di introduzione della disgiunzione vera, int $\vee$ V2, possiamo dedurre che è vera la proposizione " $O(m,2) \vee O(m,3)$ ". Da quest'ultima e dalla (1) applicando il *modus ponens* (elim $\rightarrow$ V1) possiamo dedurre che è vero il conseguente della (1) e cioè la proposizione " $O(t,3) \vee O(t,4)$ ". Ora, è parte delle nostre informazioni di sfondo che due piccioni distinti non possono occupare la stessa celletta. Così, in particolare, Mike e Tina non possono entrambi occupare la 3, ossia è *falsa* la congiunzione $O(m,3) \wedge O(t,3)$. Dunque, dalla falsità di questa congiunzione e dalla (2) possiamo concludere, per eliminazione della congiunzione falsa (elim $\wedge$ F2) che Tina non occupa la 3, cioè " $\neg O(t,3)$ ". Ma dato che avevamo precedentemente dedotto dalle informazioni iniziali che Tina occupa la 3 o la 4, possiamo concludere per eliminazione della disgiunzione vera (elim $\vee$ V1) che Tina occupa la 4.

Per rappresentare questa deduzione nel formato standard³, dobbiamo scrivere le informazioni iniziali e le conclusioni ottenute una sotto l'altra specificando per ogni conclusione la regola usata e le premesse a cui è stata applicata:

³ Cfr. p. 21 della Dispensa 2.

1	$(O(m,2) \vee O(m,3)) \rightarrow (O(t,3) \vee O(t,4))$	IR
2	$O(m,3)$	IR
3	$O(m,2) \vee O(m,3)$	Int $\vee$ V2 (2)
4	$O(t,3) \vee O(t,4)$	Elim $\rightarrow$ V1 (1,3)
5	$\neg(O(m,3) \wedge O(t,3))$	IS
6	$\neg O(t,3)$	Elim $\wedge$ F1 (5,2)
7	$O(t,4)$	Elim $\vee$ V (4, 6)

Esempio 2 Abbiamo i seguenti dati:

- (1) $\neg O(m,1) \rightarrow (O(t,2) \rightarrow O(d,3))$
- (2) $O(t,2)$
- (3) $O(d,4)$

Possiamo inferire la posizione di Mike? È sempre conveniente cercare di applicare le regole di eliminazione ogni volta che è possibile. Dato che la (1) ha la forma di un condizionale vero, per poter applicare una delle regole di eliminazione pertinenti a questa informazione dovremmo avere, come seconda premessa, o la verità del suo antecedente oppure la falsità del suo conseguente. Cioè dovremmo avere a disposizione o l'informazione che " $\neg O(m,1)$ " è vera, oppure l'informazione che $O(t,2) \rightarrow O(d,3)$ è falsa. Tuttavia, nessuna di queste due informazioni è al momento disponibile e la forma delle altre informazioni, entrambe proposizioni elementari, esclude la possibilità di applicare immediatamente altre regole di eliminazione. Allo stato attuale, dunque, non può essere applicata nessuna delle regole di eliminazione. È questo il momento in cui è opportuno considerare la possibilità di applicare le regole di introduzione, con l'obiettivo di ottenere una delle premesse aggiuntive che ci mancano per applicare la regola di eliminazione pertinente alla (1). Per applicare il *modus ponens* alla (1) dovremmo avere a disposizione l'informazione che è vera $\neg O(m,1)$, e per ottenere quest'ultima come conclusione di una regola di introduzione, dovremmo avere a disposizione l'informazione che è falsa $O(m,1)$. Ma non abbiamo questa informazione e dunque svanisce la possibilità di applicare il *modus ponens* alla (1). E il *modus tollens*? Per potere applicare questa regola alla (1) dovremmo avere a disposizione l'informazione che è falso il condizionale $O(t,2) \rightarrow O(d,3)$, e per ottenere questa informazione mediante la regola di introduzione del condizionale falso (int $\rightarrow$ F), dovremmo sapere che è vero il suo antecedente " $O(t,2)$ " e che è falso il suo conseguente " $O(d,3)$ ". La prima di queste due premesse fa parte delle nostre informazioni iniziali. Per quanto riguarda la seconda, basta osservare che essa può essere ottenuta dalla (3) e dall'informazione di sfondo secondo cui uno stesso piccione non può occupare due cellette diverse. In questo caso particolare,

Duke non può occupare contemporaneamente la 3 e la 4, dunque è falsa la congiunzione " $O(d,3) \wedge O(d,4)$ ". Ma, dato che, per la (3), è vero che $O(d,4)$, possiamo dedurre che $\neg O(d,3)$ per $\text{elim}\wedge\text{F}$. A questo punto, sapendo che è vero l'antecedente del condizionale $O(t,2) \rightarrow O(d,3)$ e che è falso il suo conseguente, possiamo applicare la regola di introduzione del condizionale falso ($\text{int}\rightarrow\text{F}$) per concludere $\neg(O(t,2) \rightarrow O(d,3))$. Avendo dedotto che il conseguente della (1) è falso, possiamo finalmente applicare ad essa il modus tollens e concludere che $\neg\neg O(m,1)$. Infine, applichiamo la regola di eliminazione della negazione falsa ($\text{elim}\neg\text{F}$) a quest'ultima proposizione per stabilire che $O(m,1)$.

Esercizio 6 *Trascrivete la precedente deduzione nel formato standard⁴, specificando per ogni conclusione ottenuta, la regola usata e le premesse a cui è stata applicata.*

⁴ Cfr. p. 16 della Dispensa 2.

Esempio 3 Avete le seguenti informazioni:

- (1) È falso che Arabella è aggressiva sia con Carlo sia con Bianca
- (2) Bianca è aggressiva solo con quelli che sono aggressivi con lei
- (3) Arabella è aggressiva con Carlo
- (4) Carlo è aggressivo con tutti quelli che non sono aggressivi con Arabella

Possiamo determinare se Carlo è aggressivo con Bianca? Per prima cosa dobbiamo tradurre le informazioni ricevute in LA. Se avete risolto correttamente l'Esercizio 11 della Dispensa n. 3, sapete già che il modo corretto di esprimere l'informazione (2) è il seguente:

$$(G(b,a) \rightarrow G(a,b)) \wedge (G(b,c) \rightarrow G(c,b)).$$

Dunque le informazioni ricevute, espresse in LA, sono le seguenti:

- (1) $\neg(G(a,c) \wedge G(a,b))$
- (2) $(G(b,a) \rightarrow G(a,b)) \wedge (G(b,c) \rightarrow G(c,b))$
- (3) $G(a,c)$
- (4) $(\neg G(a,a) \rightarrow G(c,a)) \wedge (\neg G(b,a) \rightarrow G(c,b)) \wedge (\neg G(c,a) \rightarrow G(c,c))$

Come abbiamo visto, è opportuno cercare di applicare regole di eliminazione ogni volta che è possibile. In questo caso è certamente possibile applicare le regole di eliminazione della congiunzione vera sia alla (2) sia alla (4). Nel tradurre la (4) abbiamo ommesso le parentesi in virtù della *proprietà associativa* della congiunzione e dunque possiamo applicare la *regola generalizzata* di eliminazione della congiunzione vera⁵ ($\text{elim}\wedge\text{V}$). Applicando questa regola alla (2) e alla (4) otteniamo:

⁵ Vedi Dispensa 3.

(1)	$\neg(G(a, c) \wedge G(a, b))$	
(2)	$(G(b, a) \rightarrow G(a, b)) \wedge (G(b, c) \rightarrow G(c, b))$	
(3)	$G(a, c)$	
(4)	$(\neg G(a, a) \rightarrow G(c, a)) \wedge (\neg G(b, a) \rightarrow G(c, b)) \wedge (\neg G(c, a) \rightarrow G(c, c))$	
(5)	$(G(b, a) \rightarrow G(a, b))$	elim $\wedge$ V (2)
(6)	$(G(b, c) \rightarrow G(c, b))$	elim $\wedge$ V (2)
(7)	$\neg G(a, a) \rightarrow G(c, a)$	elim $\wedge$ V (4)
(8)	$\neg G(b, a) \rightarrow G(c, b)$	elim $\wedge$ V (4)
(9)	$\neg G(c, a) \rightarrow G(c, c)$	elim $\wedge$ V (4)

È possibile applicare altre regole di eliminazione alle informazioni disponibili? Sì. Infatti, la (1) e la (3) esemplificano le premesse di elim $\wedge$ F1, per cui da esse possiamo dedurre la conclusione $\neg G(a, b)$. Poi, usando questa conclusione insieme alla (5), possiamo applicare il *modus tollens* e ottenere $\neg G(b, a)$. E una volta ottenuta questa ulteriore informazione, possiamo usarla, insieme alla (8) per concludere, via *modus ponens*, che Carlo è aggressivo con Bianca:

(1)	$\neg(G(a, c) \wedge G(a, b))$	
(2)	$(G(b, a) \rightarrow G(a, b)) \wedge (G(b, c) \rightarrow G(c, b))$	
(3)	$G(a, c)$	
(4)	$(\neg G(a, a) \rightarrow G(c, a)) \wedge (\neg G(b, a) \rightarrow G(c, b)) \wedge (\neg G(c, a) \rightarrow G(c, c))$	
(5)	$G(b, a) \rightarrow G(a, b)$	elim $\wedge$ V (2)
(6)	$G(b, c) \rightarrow G(c, b)$	elim $\wedge$ V (2)
(7)	$\neg G(a, a) \rightarrow G(c, a)$	elim $\wedge$ V (4)
(8)	$\neg G(b, a) \rightarrow G(c, b)$	elim $\wedge$ V (4)
(9)	$\neg G(c, a) \rightarrow G(c, c)$	elim $\wedge$ V (4)
(10)	$\neg G(a, b)$	elim $\wedge$ F1 (1,3)
(11)	$\neg G(b, a)$	elim $\rightarrow$ V2 (5,10)
(12)	$G(c, b)$	elim $\rightarrow$ V1 (8,11)

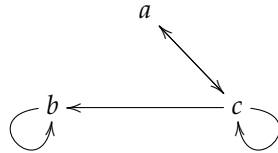
È possibile dedurre dalle premesse (1)-(4) se Bianca è aggressiva con Carlo o meno? Non sembra che siamo in grado di ottenere questa informazione applicando le nostre regole. Ma come facciamo ad essere *sicuri* che una delle due conclusioni $G(b, c)$ o $\neg G(b, c)$ non segua dalle premesse (1)-(4)? A questo stadio, l'unico modo di essere sicuri che le cose stanno così consiste nel costruire un controesempio a ciascuna delle due inferenze seguenti:

(1)	$\neg(G(a, c) \wedge G(a, b))$	
(2)	$(G(b, a) \rightarrow G(a, b)) \wedge (G(b, c) \rightarrow G(c, b))$	
(3)	$G(a, c)$	
(4)	$(\neg G(a, a) \rightarrow G(c, a)) \wedge (\neg G(b, a) \rightarrow G(c, b)) \wedge (\neg G(c, a) \rightarrow G(c, c))$	
	$G(b, c)$	

e

- $$\begin{array}{l}
(1) \quad \neg(G(a, c) \wedge G(a, b)) \\
(2) \quad (G(b, a) \rightarrow G(a, b)) \wedge (G(b, c) \rightarrow G(c, b)) \\
(3) \quad G(a, c) \\
(4) \quad (\neg G(a, a) \rightarrow G(c, a)) \wedge (\neg G(b, a) \rightarrow G(c, b)) \wedge (\neg G(c, a) \rightarrow G(c, c)) \\
\hline
\neg G(b, c)
\end{array}$$

Un controesempio alla prima inferenza è il seguente:



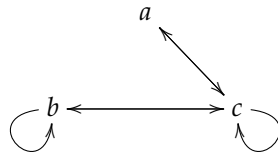
Per verificare che questo mondo possibile costituisca effettivamente un controesempio, dobbiamo controllare che in esso le premesse della prima inferenza risultino *vere* e la sua conclusione risulti *falsa*. La (1) asserisce la falsità di una congiunzione. Perché la (1) sia vera è dunque sufficiente che sia falsa almeno una delle due proposizioni congiunte. Nel mondo possibile che abbiamo illustrato è falso che Arabella sia aggressiva con Bianca e dunque la (1) risulta vera in esso. La (2) è la congiunzione di due condizionali. Perché essa sia vera in un dato mondo possibile, in esso devono essere vere entrambe le proposizioni congiunte, cioè sia il condizionale $G(b, a) \rightarrow G(a, b)$ sia il condizionale $G(b, c) \rightarrow G(c, b)$.

Quando abbiamo discusso il condizionale booleano, abbiamo visto che la falsità dell'antecedente è una condizione sufficiente per la verità di un condizionale.⁶ Dato che nel mondo possibile che abbiamo illustrato, Bianca non è aggressiva né con Arabella né con Carlo, entrambi gli antecedenti risultano falsi in esso, e ciò è sufficiente affinché entrambi i condizionali risultino veri. Ne segue che anche la loro congiunzione deve essere vera e dunque la (2) è vera nel mondo possibile che stiamo considerando. Visto che la (3) è ovviamente vera, soffermiamoci sulla (4). Si tratta della congiunzione di tre condizionali e dunque per stabilire la sua verità dobbiamo stabilire che tutti e tre i condizionali in questione sono veri. Abbiamo visto che la verità del conseguente è una condizione sufficiente per la verità di un condizionale⁷, per cui tutti e tre i condizionali risultano veri e, dunque, lo anche anche l'intera congiunzione espressa dalla (4). Infine, è chiaro che in questo mondo possibile Bianca non è aggressiva con Carlo, perciò si tratta di un mondo possibile in cui le premesse della prima inferenza sono tutte vere e la sua conclusione è falsa, cioè di un *controesempio* sufficiente a mostrare che l'inferenza è *scorretta*.

⁶ Vedi, a questo proposito, la discussione delle regole di introduzione del condizionale vero.

⁷ Cfr. nota 6.

Esercizio 7 Verificate che il seguente mondo possibile



costituisce effettivamente un controesempio alla seconda delle inferenze che abbiamo proposto sopra.

Esercizio 8 *Mostrate che, applicando le regole del condizionale booleano, la seguente inferenza è corretta:*

- (1) *È falso che se Carlo è aggressivo con Arabella, allora Arabella è aggressiva con Carlo*
- (2) *Se Arabella non è aggressiva con Carlo, allora è aggressiva con Bianca.*

Arabella è aggressiva con Bianca

Esercizio 9 *Il condizionale booleano può anche essere definito in termini di disgiunzione e negazione—invece che di congiunzione e negazione come nella (7)—nel modo seguente:*

$$P \rightarrow Q =_{\text{def}} \neg P \vee Q.$$

Provate a spiegare perché.

Esercizio 10 *Mostrate che, applicando le regole del condizionale, la seguente inferenza è corretta:*

- (1) *Se Arabella non è aggressiva con Carlo, allora è vero anche che se Carlo non è aggressivo con Bianca, Arabella non è aggressiva con Bianca.*
- (2) *È falso che sia Arabella sia Carlo siano aggressivi con Bianca*
- (3) *Arabella è aggressiva con Bianca.*

Arabella è aggressiva con Carlo

Suggerimento: usate la regola di introduzione del condizionale falso.

In alcuni degli esempi e degli esercizi di questa dispensa sono state usate le regole “anomale” del condizionale booleano (introduzione del condizionale vero ed eliminazione del condizionale falso), mentre in altri sono state usate solo le regole non controverse (eliminazione del condizionale vero e introduzione del condizionale falso). Dovrebbe essere chiaro, a questo punto, che le deduzioni che non fanno uso delle regole “anomale” saranno corrette in qualunque interpretazione del condizionale compatibile con l’uso ordinario, mentre le altre saranno corrette solo per l’interpretazione “canonica” del condizionale fornita dal condizionale booleano definito nella (7).

Esercizio 11 Verificate in quali esempi ed esercizi di questa dispensa sono state usate le regole “anomale” del condizionale booleano.

L'arte della deduzione

Un metodo sistematico per applicare le regole di inferenza

Qualunque teoria scientifica è associata ad una certa classe di problemi che la teoria intende risolvere. La logica, come abbiamo visto, si interessa dei problemi *deduttivi*, del tipo: è la proposizione P una conseguenza logica delle informazioni a nostra disposizione? In altri termini, deve P essere necessariamente vera, se lo sono le informazioni iniziali? Se denotiamo con Γ l'insieme delle informazioni iniziali, una risposta affermativa a queste domande significa, nella terminologia che abbiamo usato in queste dispense, che l'inferenza che ha come premesse le informazioni in Γ e come conclusione P è un'inferenza *corretta*, mentre una risposta negativa significa che l'inferenza in questione è *scorretta*. Per risolvere problemi deduttivi di questo tipo, come abbiamo visto, possiamo provare a *dedurre* la conclusione dalle premesse mediante le nostre regole (di eliminazione e di introduzione). Se ci riusciamo, allora la conclusione è una conseguenza logica delle informazioni iniziali, cioè l'inferenza da Γ a P è corretta. Altrimenti, possiamo provare a costruire un *controesempio*, cioè un mondo possibile in cui le premesse sono vere e la conclusione falsa. Se ci riusciamo, siamo sicuri che l'inferenza è *scorretta*, il che significa che non è possibile dedurre la conclusione dalle premesse per mezzo delle regole di inferenza che abbiamo considerato.

Ma quando cerchiamo di dedurre la conclusione dalle premesse, come dobbiamo procedere? Le nostre regole di inferenza ci indicano quello che *possiamo* fare—se le premesse della regola sono nella lista delle informazioni disponibili, si può aggiungere alla lista anche la conclusione della regola—ma non ci dicono che cosa *dobbiamo* fare, o cosa è *opportuno* fare in determinate circostanze. In particolare, non ci dicono, quando abbiamo di fronte delle scelte, quale regola ci conviene applicare in una determinata situazione. Questo problema non è particolarmente drammatico per quanto riguarda le regole di eliminazione. Anche applicandole a caso, ogni volta che è possibile applicarle, tali regole producono sempre una conclusione che è meno complessa di una della premessa principale, per cui si arriva sempre, dopo un numero finito di passi, a una conclusione a cui non è più possibile applicare regole di eliminazione. Così applicare queste regole ogni volta che è possibile può, al massimo, generare informazione inutile rispetto alla soluzione del problema, ma non ci conduce su sentieri che ci allontanano drasticamente dalla sua soluzione.

La situazione è profondamente diversa per quanto riguarda le regole di introduzione. Data una qualsiasi proposizione P , è *sempre* possibile applicare ad essa una regola di introduzione. Per esempio, la regola di introduzione della disgiunzione vera ci consente di inferire dalla premessa P , la conclusione $P \vee Q$, per *qualunque* proposizione Q . Da quest'ultima conclusione, potremmo inferire, per introduzione della negazione falsa, che $\neg\neg(P \vee Q)$, da questa, che $\neg(\neg(P \vee Q) \wedge R)$, per introduzione della congiunzione falsa, dove R è di nuovo una proposizione *qualsiasi*. E potremmo continuare *all'infinito*. Chiaramente, nella maggior parte dei casi, queste conclusioni sono del tutto inutili e ci portano completamente fuori strada. Considerate, a questo proposito, la deduzione svolta nell'Esempio 2. Avremmo potuto correttamente inferire dalla premessa (2) la conclusione $O(t, 2) \vee O(m, 2)$, applicando la regola di introduzione della disgiunzione vera. E poi da questa conclusione avremmo potuto ottenere $\neg\neg(O(t, 2) \vee O(m, 2))$, applicando la regola di introduzione della negazione falsa. Poi, applicando a quest'ultima conclusione la regola di introduzione della congiunzione falsa, avremmo potuto inferire la proposizione $\neg(\neg(O(t, 2) \vee O(m, 2)) \wedge O(t, 3))$, e così via all'infinito. Ma a che cosa sarebbe servito? È ovvio che tutte queste conclusioni, per quanto corrette, ci avrebbero allontanato dalla soluzione del nostro problema. Dunque *le regole di introduzione non devono essere applicate a caso*. Nell'Esempio 2, l'unica regola di introduzione che abbiamo applicato aveva uno scopo chiaro: quello di rendere disponibile un'opportuna seconda premessa per applicare il *modus tollens* alla premessa (1). A volte, quando la proposizione che vogliamo ottenere è complessa, le regole di introduzione possono essere necessarie per dedurla dalle informazioni iniziali. Per esempio, se vogliamo dedurre dalle informazioni iniziali:

1. $O(m, 1)$

2. $O(d, 2)$

che è falso il condizionale $O(m, 1) \rightarrow O(t, 2)$. In tal caso procediamo come segue:

- | | | |
|-----|-------------------------------------|---------------------------|
| (1) | $O(m, 1)$ | IR |
| (2) | $O(d, 2)$ | IR |
| (3) | $\neg(O(d, 2) \wedge O(t, 2))$ | IS |
| (4) | $\neg O(t, 2)$ | Elim $\wedge$ F1 (3,2) |
| (5) | $\neg(O(m, 1) \rightarrow O(t, 2))$ | Int $\rightarrow$ F (1,4) |

Proviamo ora a riassumere questi suggerimenti sul modo di usare le regole in una strategia generale che possiamo usare in tutti i problemi.

È utile, per facilitare l'esposizione, introdurre un po' di convenzioni terminologiche. Nel seguito useremo a volte i termini "E-regole" per riferirci alle regole di eliminazione e "I-regole" per riferirci a quelle di introduzione. A seconda della loro forma logica, le proposizioni complesse possono essere distinte in due tipi, che chiameremo " α " e " β " come illustrato dalla Tabella 4. Le proposizioni di tipo

Proposizioni di tipo α		Proposizioni di tipo β	
segnate	non-segnate	segnate	non-segnate
$V \neg P$		$V P \vee Q$	$P \vee Q$
$F \neg P$	$\neg \neg P$	$F P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
$V P \wedge Q$	$P \wedge Q$	$V P \rightarrow Q$	$P \rightarrow Q$
$F P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$		
$F P \rightarrow Q$	$\neg(P \rightarrow Q)$		

Tabella 4: Proposizioni di tipo α e β .

α sono quelle a cui può essere applicata una regola di eliminazione *a una sola premessa*, quelle di tipo β sono invece quelle a cui può essere applicata una regola di eliminazione *a due premesse*. Quando una regola di eliminazione ha due premesse, chiameremo *premissa maggiore* quella che contiene la parola logica che viene "eliminata", e *premissa minore* l'altra. Per esempio, in un'applicazione del *modus ponens*, la premissa maggiore è quella che esemplifica $P \rightarrow Q$ e la premissa minore è quella che esemplifica P . Infine, chiameremo le regole di eliminazione e di introduzione, nel loro insieme, *regole intelim*.

La strategia che abbiamo usato finora può dunque essere riassunta nel modo seguente:

STRATEGIA PER L'APPLICAZIONE DELLE REGOLE INTELIM:

- Specificate le informazioni iniziali in un opportuno linguaggio booleano.
- Applicare le E-regole ogni volta che è possibile alle informazioni che avete a disposizione
 - se nella lista delle informazioni disponibili c'è una proposizione di tipo α , potete applicare immediatamente la E-regola pertinente;
 - per applicare una E-regola a una proposizione di tipo β (come premessa maggiore) dovete assicurarvi che sia disponibile anche la relativa premessa minore.
- Applicare le I-regole *solo* al fine di ottenere informazioni che vi interessano, cioè
 - la conclusione stessa, oppure
 - una premessa minore che vi serve per applicare la E-regola pertinente a qualche proposizione di tipo β .

L'incompletezza delle regole intelim

Le regole intelim che abbiamo esaminato, ci consentono di eseguire un gran numero di ragionamenti deduttivi corretti. Ma ci consentono di eseguirli *tutti*?

Esempio 4 Considerate la seguente inferenza:

$$\begin{array}{l}
 (1) \quad O(m, 1) \vee O(m, 2) \\
 (2) \quad O(m, 1) \rightarrow O(t, 3) \\
 (3) \quad O(m, 2) \rightarrow O(t, 3) \\
 \hline
 O(t, 3)
 \end{array}$$

Non è difficile verificare che si tratta di un'inferenza corretta. Dato che Mike sta nella 1 o nella 2 e che, in entrambi i casi, Tina sta nella 3, possiamo concludere che "Tina occupa la 3" segue logicamente dalle premesse (1)-(3).

Questo è un tipico esempio di *ragionamento per casi* e non è possibile ottenere la conclusione $O(t, 3)$ dalle premesse (1)–(3) applicando esclusivamente le regole intelim. Vediamo perché. Le proposizioni (1)–(3) sono tutte proposizioni di tipo β , per cui l'applicazione ad esse delle E-regole pertinenti richiede che sia disponibile una opportuna premessa minore. Per applicare una delle regole di eliminazione della disgiunzione vera alla (1) ci servirebbe o $\neg O(m, 1)$ oppure $\neg O(m, 2)$. Per applicare una delle regole di eliminazione del condizionale vero alla (2) ci servirebbero o $O(m, 1)$ oppure $\neg O(t, 3)$. Infine, per la (3) ci

servirebbero o $O(m, 2)$ oppure $\neg O(t, 3)$. Nessuna di queste premesse minori è disponibile. Inoltre, tutte le potenziali premesse minori hanno la forma o di una proposizione elementare o della negazione di una proposizione elementare. Dunque non possono essere ottenute mediante l'applicazione di regole di introduzione, perché nessuna regola di introduzione ha come conclusione una proposizione elementare o la negazione di una proposizione elementare. Infine, la conclusione stessa ha la forma di una proposizione elementare e non può essere ottenuta come conclusione di una regola di introduzione. Riassumendo: non è possibile applicare le regole di eliminazione e sarebbe del tutto inutile applicare le regole di introduzione (cfr. la strategia generale delineata nel paragrafo precedente).

Questo esempio mostra che le regole intelim non sono sufficienti a dimostrare la correttezza di *tutte* le inferenze intuitivamente corrette. In questo senso, il sistema delle regole intelim *non è un sistema deduttivo completo*. Con questo intendiamo che vi sono delle *inferenze intuitivamente corrette* la cui correttezza dipende, come in questo esempio, solo dal significato delle parole logiche booleane, ma *non può essere dimostrata* solo per mezzo delle regole del sistema.

Il ragionamento per casi e la regola di bivalenza

Nel ragionamento per casi illustrato nell'Esempio 4, anche se non possiamo dedurre la conclusione dalle premesse applicando esclusivamente le regole intelim, possiamo tuttavia ottenere facilmente la conclusione desiderata aggiungendo a queste regole uno schema generale di *ragionamento per casi*.

Nella Dispensa n. 2, quando abbiamo discusso alcuni problemi logici ambientati nell'isola dei cavalieri e dei lestofanti, per risolverli abbiamo già fatto uso di una *forma particolare* di ragionamento per casi, che abbiamo chiamato *ragionamento per esclusione*, secondo cui se vi sono solo due casi possibili e uno può essere scartato perché conduce a conclusioni contraddittorie, l'altro deve essere quello che necessariamente si verifica. Nell'Esempio 4, tuttavia, il ragionamento per esclusione non si può applicare perché nessuno dei due casi possibili conduce a conclusioni contraddittorie. Invece, la conclusione segue dalle premesse perché risulta vera in *in entrambi i casi* che possono essere distinti sulla base della prima premessa.

Come si può catturare il principio generale del ragionamento per casi in una regola che possa essere applicata sistematicamente come le altre regole? Un modo di farlo è introducendo il seguente schema:

RAGIONAMENTO PER CASI: Se 1) le informazioni disponibili contengono una disgiunzione $P \vee Q$ e 2) la stessa conclusione R può essere dedotta sia aggiungendo alle altre informazioni la premessa P sia aggiungendo ad esse la premessa Q , allora R segue logicamente dalle informazioni disponibili.

Usando questo schema, il nostro ragionamento intuitivo prenderebbe la forma seguente:

(1) $O(m, 1) \vee O(m, 2)$	
(2) $O(m, 1) \rightarrow O(t, 3)$	
(3) $O(m, 2) \rightarrow O(t, 3)$	
(4.1) $O(m, 1)$	(4.2) $O(m, 2)$
(5.1) $O(t, 3)$ $\text{elim} \rightarrow V_1$ (2,4.1)	(5.2) $O(t, 3)$ $\text{elim} \rightarrow V_1$ (3,4.2)

Mostriamo ora come schema di ragionamento per casi che abbiamo appena enunciato può essere derivato da uno schema *ancora più semplice e generale* la cui aggiunta alle regole intelim è *sufficiente* ad ottenere un sistema deduttivo completo.

Nei problemi dei cavalieri e dei lestofanti abbiamo usato esplicitamente, anche se in modo informale, un principio fondamentale della logica classica che abbiamo poi usato implicitamente in altri esercizi ed esempi: il *principio di bivalenza*. Questo principio può essere formulato come una regola formale, che chiameremo *Regola di bivalenza* (RB):

REGOLA DI BIVALENZA (RB): In qualunque ragionamento deduttivo e per qualsiasi proposizione P è possibile distinguere due casi, quello in cui P è vera e quello in cui P è falsa.

Regola di bivalenza (RB).

Una regola come RB è sufficiente, insieme alle altre regole di inferenza che abbiamo studiato, a dedurre la conclusione desiderata dalle premesse (1)–(3). Scegliamo di applicare la regola alla proposizione $P = \text{“Mike occupa la 1”}$. Il ragionamento viene allora diviso in due *rami* distinti, uno corrispondente all’ipotesi che Mike occupi la 1 e l’altro corrispondente all’ipotesi che Mike non occupi la 1.

(1) $O(m, 1) \vee O(m, 2)$	
(2) $O(m, 1) \rightarrow O(t, 3)$	
(3) $O(m, 2) \rightarrow O(t, 3)$	
(4.1) $O(m, 1)$	(4.2) $\neg O(m, 1)$
(5.1) $O(t, 3)$ $\text{elim} \rightarrow V_1$ (2,4.1)	(5.2) $O(m, 2)$ $\text{elim} \vee V_1$ (1,4.2)
	(6.2) $O(t, 3)$ $\text{elim} \rightarrow V_1$ (3,5.2)

Dato che la stessa conclusione, $O(t, 3)$ può essere dedotta dalle premesse sia sotto l’ipotesi che Mike occupi la 1, sia sotto l’ipotesi che

Mike non la occupi, possiamo concludere che $O(t, 3)$ segue logicamente dalle premesse *indipendentemente* da quale delle due ipotesi sia vera. In questo caso diciamo che RB è stata *applicata alla proposizione* $O(m, 1)$ e che $O(t, 3)$ è *deducibile* dalle premesse iniziali (1)–(3).

Ma avremmo potuto ottenere la stessa conclusione in entrambi i rami se avessimo applicato RB a $O(m, 2)$.

Esercizio 12 *Provate a dedurre la conclusione $O(t, 3)$ in entrambi i rami dopo aver applicato RB alla proposizione $O(m, 2)$.*

In generale, se la stessa conclusione può essere ottenuta dalle informazioni disponibili sia sotto l'ipotesi che P sia vera, sia sotto l'ipotesi che P sia falsa, allora questa conclusione segue dalle informazioni disponibili *indipendentemente* dal fatto che P sia vera o falsa.

L'uso di RB può essere reiterato. In altri termini, dopo che abbiamo distinto i due casi possibili per una data proposizione P —corrispondenti, rispettivamente, all'ipotesi che P sia vera e all'ipotesi che P sia falsa—in ciascuno dei due rami in cui è stato suddiviso il ragionamento possiamo nuovamente applicare la regola RB ad un'altra proposizione P' . Per esempio, nel ragionamento seguente:

		(1) $O(m, 1) \vee O(m, 2)$		
		(2) $O(m, 1) \rightarrow O(t, 5)$		
		(3) $O(m, 2) \rightarrow (O(d, 3) \vee O(d, 4))$		
		(4) $O(d, 3) \rightarrow O(t, 5)$		
		(5) $O(d, 4) \rightarrow O(t, 5)$		
(6.1) $O(m, 1)$		(6.2) $\neg O(m, 1)$		
(7.1) $O(t, 5)$	elim $\rightarrow$ V1 (2,6.1)	(7.2) $O(m, 2)$	elim $\vee$ V1 (1,6.2)	
		(8.2) $O(d, 3) \vee O(d, 4)$	elim $\rightarrow$ V1 (3,7.2)	
(9.2.1) $O(d, 3)$		(9.2.2) $\neg O(d, 3)$		
(10.2.1) $O(t, 5)$	elim $\rightarrow$ V1 (4,9.2.1)	(10.2.2) $O(d, 4)$	elim $\vee$ V1 (8.2,9.2.2)	
		(11.2.2) $O(t, 5)$	elim $\rightarrow$ V1 (5,10.2.2)	

Con l'aggiunta di RB le deduzioni non hanno più la forma lineare che avevano prima, quando venivano usate solo le regole di introduzione e di eliminazione, ma assumono una struttura ramificata che viene detta *ad albero*.⁸ Perché un ragionamento di questo genere costituisca una deduzione di una data conclusione a partire dalle informazioni iniziali è necessario che, come negli esempi precedenti, la stessa conclusione sia raggiunta in *tutti i rami*.

È possibile però che qualcuno di questi rami contenga *informazioni contraddittorie*. Supponiamo, per esempio, di sostituire alla premessa (5) dell'esempio precedente la proposizione " $O(d, 4) \rightarrow \neg O(m, 2)$ ". Possiamo sempre ottenere la stessa conclusione, cioè che "Tina occupa la 5" mediante un ragionamento di questo tipo:

⁸ In particolare, si tratta di *alberi binari* in quanto ogni applicazione di RB produce esattamente due rami distinti.

(1) $O(m, 1) \vee O(m, 2)$ (2) $O(m, 1) \rightarrow O(t, 5)$ (3) $O(m, 2) \rightarrow (O(d, 3) \vee O(d, 4))$ (4) $O(d, 3) \rightarrow O(t, 5)$ (5) $O(d, 4) \rightarrow \neg O(m, 2)$		
(6.1) $O(m, 1)$ (7.1) $O(t, 5)$ $\text{elim} \rightarrow V_1$ (2,6.1)	(6.2) $\neg O(m, 1)$	
	(7.2) $O(m, 2)$	$\text{elim} \vee V_1$ (1,6.2)
	(8.2) $O(d, 3) \vee O(d, 4)$	$\text{elim} \rightarrow V_1$ (3,7.2)
	(9.2.1) $O(d, 3)$	(9.2.2) $\neg O(d, 3)$
	(10.2.1) $O(t, 5)$ $\text{elim} \rightarrow V_1$ (4,9.2.1)	(10.2.2) $O(d, 4)$ $\text{elim} \vee V_1$ (8.2,9.2.2)
		(11.2.2) $\neg O(m, 2)$ $\text{elim} \rightarrow V_1$ (5,10.2.2) $\times$ (11.2.2, 7.2)

Il segno “ $\times$ ” indica che nel ramo corrispondente è contenuta una contraddizione. Infatti, proposizioni 11.2.2 e 7.2 si contraddicono a vicenda. Questo significa che il ramo del ragionamento che contiene le due proposizioni contraddittorie, quello più a destra, non rappresenta un caso davvero possibile e che le ipotesi $\neg O(m, 1)$ e $\neg O(d, 3)$, che sono state introdotte in quel ramo da RB, prese insieme sono *incompatibili con le informazioni iniziali*: non rappresentano casi effettivamente possibili. Gli altri rami, che non contengono contraddizioni, contengono tutti la conclusione $O(t, 5)$ e ciò è sufficiente a stabilire che essa segue dalle informazioni iniziali, in quanto è vera in tutti i casi che sono effettivamente possibili (date le informazioni iniziali).

In un albero deduttivo un ramo che contiene una contraddizione, cioè sia una proposizione P sia la sua negazione $\neg P$ (oppure $V P$ e $F P$ se si usano proposizioni segnate) si dice *chiuso*. Un ramo che non è chiuso si dice (ovviamente) *aperto*. Dunque il nostro criterio di correttezza di una deduzione può essere riformulato, più in generale, nel modo seguente:

Criterio di deduzione: Perché un albero deduttivo rappresenti una deduzione di una certa conclusione P a partire dalle informazioni iniziali, P deve essere contenuta in *tutti i rami aperti*.

Questo vuol dire che i rami chiusi “non contano”, in quanto contengono ipotesi aggiuntive (introdotte via RB) che, nel loro insieme, sono *incompatibili con le informazioni iniziali*: non esiste un mondo possibile in cui tutte le proposizioni contenute nel ramo (a partire dalle informazioni iniziali) siano vere.

Esercizio 13 Considerate il seguente insieme di informazioni iniziali:

1. $O(m, 1) \vee O(m, 2)$
2. $O(m, 1) \rightarrow O(t, 3)$
3. $O(m, 2) \rightarrow O(d, 4)$

4. $O(m, 2) \rightarrow O(t, 4)$

Dimostrate, usando le regole di inferenza e la regola di bivalenza (RB) che la conclusione " $O(t, 3)$ " è deducibile da queste informazioni iniziali.

Che cosa succede se tutti i rami di un albero deduttivo sono chiusi?

Considerate l'esempio seguente:

(1) $O(m, 1) \vee O(m, 2)$			
(2) $O(m, 1) \vee O(t, 2)$			
(3) $O(m, 1) \rightarrow O(d, 3)$			
(4) $O(m, 1) \rightarrow O(t, 3)$			
(5.1)	$O(m, 1)$		(5.2) $\neg O(m, 1)$
(6.1)	$O(d, 3)$	elim $\rightarrow$ V1 (3,5.1)	(6.2) $O(m, 2)$ elim $\vee$ V1 (1,5.2)
(7.1)	$O(t, 3)$	elim $\rightarrow$ V1 (4,5.1)	(7.2) $O(t, 2)$ elim $\vee$ V1 (2,5.2)
(8.1)	$\neg(O(d, 3) \wedge O(t, 3))$	IS	(8.2) $\neg(O(m, 2) \wedge O(t, 2))$ IS
(9.1)	$\neg O(t, 3)$	elim $\wedge$ F1 (8.1,6.1)	(9.2) $\neg O(t, 2)$ elim $\wedge$ F1 (8.2,6.2)
$\times (9.1, 7.1)$			$\times (9.2, 7.2)$

Qui abbiamo dedotto una contraddizione in entrambi i rami! Questo significa che, assumendo che le informazioni iniziali siano tutte vere, sia l'ipotesi che Mike occupi la 1, sia quella che Mike non la occupi conducono a una contraddizione. Ma, dato che una delle due ipotesi deve essere vera, ciò significa che le informazioni iniziali *non possono essere tutte vere nello stesso tempo*, ossia che le informazioni iniziali sono *incoerenti*.

Diciamo che un insieme di proposizioni (segnate o non-segnate) è *incoerente* se le proposizioni di questo insieme *non possono* essere tutte vere simultaneamente, cioè non esiste alcun "mondo possibile" in cui esse sono tutte vere.

Insiemi di proposizioni incoerenti

Dovrebbe a questo punto essere chiaro che:

Se tutti i rami di un albero deduttivo sono chiusi, allora l'insieme delle informazioni iniziali è incoerente.

Il ragionamento per assurdo

Consideriamo di nuovo l'Esempio 4. Se proviamo ad applicare RB, invece che alla proposizione $O(m, 1)$, alla stessa conclusione che vogliamo ottenere, cioè a $O(t, 3)$ otteniamo la seguente deduzione ramificata:

	(1)	$O(m, 1) \vee O(m, 2)$	
	(2)	$O(m, 1) \rightarrow O(t, 3)$	
	(3)	$O(m, 2) \rightarrow O(t, 3)$	
(4.1)	$O(t, 3)$	(4.2)	$\neg O(t, 3)$
		(5.2)	$\neg O(m, 1)$ $\text{elim} \rightarrow V_2 (2, 4.2)$
		(6.2)	$\neg O(m, 2)$ $\text{elim} \rightarrow V_2 (3, 4.2)$
		(7.2)	$O(m, 2)$ $\text{elim} \vee V_1 (1, 5.2$
			$\times (7.2, 6.2)$

Secondo il criterio di deduzione che abbiamo enunciato prima, questo albero rappresenta una deduzione della conclusione $O(t, 3)$ dalle informazioni iniziali, dal momento che la conclusione è contenuta in *tutti i rami aperti* (cioè, in questo caso, nell'unico ramo aperto).

La deduzione mostra semplicemente che se le premesse dell'inferenza sono vere, la conclusione non può essere falsa e dunque, per il principio di bivalenza rappresentato dalla nostra regola RB, *deve essere vera*. È questa la giustificazione di uno schema di ragionamento noto come *ragionamento per assurdo*:

RAGIONAMENTO PER ASSURDO: Per dimostrare che una certa conclusione P segue da un insieme Γ di premesse,

1. fate l'ipotesi che la conclusione P sia falsa, cioè che sia vera la sua negazione $\neg P$,
2. aggiungete questa ipotesi alle vostre premesse;
3. se riuscite a mostrare che l'insieme di informazioni così ottenuto è *incoerente* — cioè riuscite a costruire a partire da esse un albero deduttivo in cui tutti i rami sono chiusi — allora potete concludere che P è deducibile dalle premesse iniziali Γ .

Dunque un ragionamento per assurdo mostra che la conclusione segue logicamente dalle premesse mostrando che *l'ipotesi che essa sia falsa è incompatibile con le premesse*.

Nel rappresentare un ragionamento per assurdo, possiamo fare a meno di applicare esplicitamente RB alla conclusione del ragionamento, come abbiamo fatto prima, e limitarci a mostrare che l'insieme formato dalle premesse e dalla negazione della conclusione è incoerente:

- | | | |
|-------|-------------------------------|-----------------------------|
| (1) | $O(m, 1) \vee O(m, 2)$ | |
| (2) | $O(m, 1) \rightarrow O(t, 3)$ | |
| (3) | $O(m, 2) \rightarrow O(t, 3)$ | |
| (4) | $\neg O(t, 3)$ | |
| <hr/> | | |
| (5) | $\neg O(m, 1)$ | elim $\rightarrow$ V2 (2,4) |
| (6) | $\neg O(m, 2)$ | elim $\rightarrow$ V2 (3,4) |
| (7) | $O(m, 2)$ | elim $\vee$ V1 (1,5 |
| | $\times(6,7)$ | |

In questo semplice caso, per dimostrare che l'insieme costituito dalle informazioni (1)–(4) è incoerente abbiamo costruito un albero deduttivo che contiene un solo ramo. In casi più complessi può essere necessario usare il ragionamento per casi basato sulla regola di bivalenza e ottenere un albero deduttivo in cui tutti i rami sono chiusi. Per esempio, l'albero deduttivo che abbiamo costruito a p. 28 contiene due rami, tutti e due chiusi. Dimostrando che le quattro informazioni iniziali sono incoerenti, quell'albero mostra, al tempo stesso, che tre qualsiasi di esse implicano logicamente la negazione dell'altra. In altri termini, se tre qualsiasi delle informazioni iniziali dell'esempio a p. sono vere, allora quella che rimane deve essere falsa — in quanto l'albero mostra che non possono essere tutte e quattro vere — e dunque la sua negazione deve essere vera.

Il ragionamento per assurdo si basa allora sul seguente principio:

Una proposizione P (o $\vee P$ se usiamo proposizioni segnate) è deducibile da un insieme Γ di premesse se e solo se l'insieme di proposizioni ottenuto aggiungendo a Γ l'ipotesi $\neg P$ (oppure $F P$ se usiamo proposizioni segnate) è incoerente.

Deducibilità e incoerenza

Che un insieme di informazioni è incoerente, come abbiamo detto, significa che non esiste un mondo possibile in cui le informazioni in questione sono tutte vere. Dunque, dimostrando che non esiste un mondo possibile in cui le informazioni in $\Gamma \cup \{\neg P\}$ ⁹ (cioè l'insieme ottenuto aggiungendo $\neg P$ a Γ) sono tutte vere, dimostriamo che

non esiste un mondo possibile in cui le informazioni Γ sono tutte vere e la conclusione P falsa.

Ma questo vuol dire che l'inferenza che ha come premesse le informazioni in Γ e come conclusione P non ha controesempi. Dunque si tratta di un'inferenza corretta.

⁹ Nel linguaggio della teoria degli insiemi il simbolo " $\cup$ " si usa per l'operazione di *unione* di due insiemi. $A \cup B$ indica l'insieme ottenuto aggiungendo agli elementi di A tutti gli elementi di B . Inoltre, " $\{a_1, \dots, a_n\}$ " indica l'insieme contenente gli oggetti $a_1, \dots, a_n$. Per esempio, $\{1, 5, 7\}$ è l'insieme che contiene i numeri 1, 5 e 7. Dunque $\{\neg P\}$ è l'insieme che contiene solo la proposizione $\neg P$ e $\Gamma \cup \{\neg P\}$, dove Γ è un insieme di proposizioni, è l'insieme ottenuto aggiungendo a Γ la proposizione $\neg P$.

Tautologie e contraddizioni

Considerate la proposizione

O Arabella è aggressiva con Bianca, oppure Arabella
non è aggressiva con Bianca . (8)

Non è difficile rendersi conto che una proposizione del genere non dice nulla di particolarmente interessante. Il motivo è semplice: la (8) è sempre vera, *qualunque cosa accada*, cioè *in tutti i mondi possibili*.

Una proposizione che è vera in tutti i mondi possibili viene detta *tautologia*.

Tautologie

Altri esempi di tautologie sono le proposizioni seguenti:

1. Se domani piove, allora domani piove
2. Domani piove oppure non piove
3. Se domani piove, allora è falso che domani non piove
4. È falso che oggi piove e non piove.

Ma alcune tautologie sono più difficili da riconoscere. Per esempio:

$$[(O(m, 1) \vee O(m, 2)) \wedge (O(m, 1) \rightarrow O(t, 3)) \wedge \\ \wedge (O(m, 2) \rightarrow O(t, 3))] \rightarrow O(t, 3) \quad (*)$$

è anch'essa una tautologia. Infatti abbiamo dimostrato prima (per assurdo) che l'inferenza

$$\begin{array}{l} (1) \quad O(m, 1) \vee O(m, 2) \\ (2) \quad O(m, 1) \rightarrow O(t, 3) \\ (3) \quad O(m, 2) \rightarrow O(t, 3) \\ \hline O(t, 3) \end{array}$$

è un'inferenza corretta. Questo vuol dire (vedi Dispensa n.1) che la conclusione è vera in tutti i mondi possibili in cui le premesse sono vere, ossia che non ci sono controesempi, cioè non esiste un mondo possibile in cui le premesse sono vere e la conclusione falsa. Ma in tal caso non esiste un mondo possibile in cui il condizionale (*) è falso. Perché il condizionale (*) sia falso è necessario che sia vero l'antecedente e falso il conseguente, cioè che siano vere tutte e tre le proposizioni (1)–(3) e falsa la proposizione $O(t, 3)$. Ma dato che l'inferenza è corretta, un modo di questo tipo non può esistere e dunque non esiste un mondo possibile in cui il condizionale (*) è falso. Dunque il condizionale è vero in tutti i mondi possibili.

In generale vale che:

INFERENZE CORRETTE E TAUTOLOGIE L'inferenza dalle premesse $P_1, \dots, P_n$ alla conclusione Q è un'inferenza corretta se e solo se il condizionale

$$(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$$

è una tautologia.

Considerate ora la proposizione:

Arabella è aggressiva con Bianca e Arabella non è
aggressiva con Bianca . (9)

Mentre la (8) non può essere falsa, la (9) *non può essere vera*. Proposizioni come questa, che non possono mai essere vere, si dicono contraddizioni.

Una proposizione che è falsa in tutti i mondi possibili viene detta *contraddizione*.

Contraddizioni

Nei casi più semplici, come quello che abbiamo illustrato qui sopra, è immediato riconoscere che una proposizione è una contraddizione. Ma nei casi più complicati, è necessario un notevole lavoro deduttivo. Considerate, per esempio, l'insieme di informazioni la cui incoerenza è stata dimostrata a p. 28. È chiaro che la congiunzione delle informazioni iniziali, cioè

$$(O(m, 1) \vee O(m, 2)) \wedge (O(m, 1) \vee O(t, 2)) \wedge \\ \wedge (O(m, 1) \rightarrow O(d, 3)) \wedge (O(m, 1) \rightarrow O(t, 3)) \quad (10)$$

è una *contraddizione*. Infatti, dato che si tratta di un insieme incoerente di proposizioni, non esiste un mondo possibile in cui queste proposizioni sono tutte vere e, dunque, non esiste un mondo possibile in cui è vera la loro congiunzione. Tuttavia, in questo caso, per dimostrarlo abbiamo dovuto eseguire un ragionamento non del tutto elementare.

In generale vale che:

INCOERENZA E CONTRADDIZIONE Un insieme di proposizioni $P_1, \dots, P_n$ è incoerente se e solo se la congiunzione

$$P_1 \wedge \dots \wedge P_n$$

è una contraddizione.

Osservate che, per definizione, *la negazione di una tautologia è una contraddizione*: infatti se una tautologia è sempre vera la sua negazione è sempre falsa. Analogamente, *la negazione di una contraddizione è una tautologia*: dato che una contraddizione è sempre falsa, la sua negazione è sempre vera.