Come ragionare (se proprio dovete) I
Elementi di Logica

Marcello D'Agostino

Dispensa 3, Lezioni 7–9

Indice

Interludio 2 2

Relazioni notevoli fra congiunzione e disgiunzione 2

Traduzioni 3

Il condizionale: parte I 7

Il condizionale nel linguaggio ordinario 7

Il condizionale nel ragionamento ordinario 12

Il problema dell'aggressività 16

Condizionale booleano vs condizionale ordinario 20

Interludio 2

Relazioni notevoli fra congiunzione e disgiunzione

Le regole di eliminazione e di introduzione per le parole logiche che abbiamo discusso nelle Dispense 1 e 2 mostrano come il significato della congiunzione possa essere messo in una specie di relazione inversa con quello della disgiunzione. Considerate, per esempio, la prima regola di eliminazione della disgiunzione vera (elim$\vee$V1):

$$\begin{array}{l} V\ P \vee Q \\ F\ P \\ \hline V\ Q. \end{array}$$

Ora, sostituite "è vero che" con "è falso che" (e viceversa) e il simbolo "$\vee$" con il simbolo "$\wedge$". Quello che ottenete è la prima regola di eliminazione della congiunzione falsa. Naturalmente, il procedimento funziona anche in senso inverso: se partite dalla prima regola di eliminazione della congiunzione falsa, sostituendo "è falso che" con "è vero che" (e viceversa), e il simbolo "$\wedge$" con il simbolo "$\vee$" ottenete la prima regola di eliminazione della disgiunzione vera. Questa relazione, che si chiama *proprietà duale* vale per *tutte* le regole di inferenza che riguardano queste due parole logiche.

Proprietà duale di congiunzione e disgiunzione

Esercizio 1 *Verificate che la proprietà duale vale per le altre regole di inferenza che riguardano la congiunzione e la disgiunzione.*

Viste la relazione fra congiunzione e negazione messa in evidenza dalla proprietà duale, possiamo chiederci: è possibile definire esplicitamente una di queste due parole logiche in termini dell'altra? Con l'aiuto della negazione, che come sappiamo ci consente di asserire che una proposizione è falsa, possiamo rispondere positivamente a questa domanda.

Conderiamo prima la disgiunzione. Abbiamo visto che la disgiunzione (inclusiva) è vera se e soltanto se *almeno una* delle proposizioni disgiunte è *vera*. Dunque possiamo dire che $P \vee Q$ è vera se e soltanto se *è falso che P e Q siano entrambe false*. In altre parole,

Definizione della disgiunzione in termini di congiunzione e negazione

$$P \vee Q \text{ è logicamente equivalente a } \neg(\neg P \wedge \neg Q). \tag{1}$$

Il ragionamento che ci ha portato alla (1) fa un uso implicito del *Principio di Bivalenza*, una delle assunzioni fondamentali della logica classica: una qualunque proposizione è o vera o falsa e non ci sono altre possibilità. In molti dei ragionamenti che abbiamo svolto finora abbiamo già fatto un uso implicito di questo principio che verrà enunciato in modo esplicito a p. 13.

Dalla (1) segue immediatamente, negando entrambe le proposizioni e eliminando la doppia negazione nella proposizione di destra, che

$$\neg(P \vee Q) \text{ è logicamente equivalente a } \neg P \wedge \neg Q. \tag{2}$$

Come abbiamo già visto, dire che una disgiunzione è falsa significa dire che entrambe le proposizioni disgiunte sono false e non che è falsa almeno una delle due. Dunque la negazione non si distribuisce rispetto alla disgiunzione:

$$\neg(P \vee Q) \textit{ non } \text{è logicamente equivalente a } \neg P \vee \neg Q. \tag{3}$$

Per quanto riguarda la congiunzione, abbiamo visto che $P \wedge Q$ è vera se e soltanto se *entrambe* le proposizioni P e Q sono *vere*. Dunque $P \wedge Q$ è vera se è falso che almeno una delle due proposizioni sia falsa, cioè:

Definizione della congiunzione in termini di disgiunzione e negazione

$$P \wedge Q \text{ è logicamente equivalente a } \neg(\neg P \vee \neg Q). \tag{4}$$

Di nuovo, il ragionamento che ci ha portato alla (4) fa un uso implicito del Principio di Bivalenza (vedi p. 13 sotto).

Dalla (4) segue immediatamente che

$$\neg(P \wedge Q) \text{ è logicamente equivalente a } \neg P \vee \neg Q. \tag{5}$$

Come abbiamo già visto, dire che una congiunzione è falsa significa dire che almeno una delle due proposizioni congiunte è falsa, e non che lo sono entrambe. Dunque la negazione non si distribuisce neppure rispetto alla congiunzione:

$$\neg(P \wedge Q) \textit{ non } \text{è logicamente equivalente a } \neg P \wedge \neg Q. \tag{6}$$

Traduzioni

Supponiamo di voler esprimere, nel Linguaggio della Piccionaia (vedi Dispensa 2) la seguente proposizione:

$$\text{La celletta n. 1 è occupata.} \tag{7}$$

Le risorse espressive di questo linguaggio (che abbreviamo in LP) non ci consentono di esprimere *direttamente* questa proposizione. Per poterlo fare dovremmo avere a disposizione proposizioni aperte del tipo "la celletta n. ... è occupata", in cui lo spazio vuoto deve essere riempito, per formare una proposizione elementare, dal nome di una celletta, cioè da un numerale compreso fra "1" e "5". Ma l'unica proposizione aperta di LP è "... occupa la celletta n. ---" che abbiamo abbreviato con "O(...,---)". Tuttavia una proposizione come la (7) può essere ugualmente espressa in LP, osservando che:

- il numero dei piccioni è finito

- il numero delle cellette è finito
- sono stati assegnati nomi sia ai piccioni sia alle cellette.

È facile allora constatare che la (7) è logicamente equivalente a:

$$O(m,1) \vee O(d,1) \vee O(t,1), \tag{8}$$

cioè alla proposizione che asserisce che o Mike o Duke o Tina occupano la celletta n. 1.

Tuttavia, a ben vedere, la (8) *non è una proposizione di LP*. In LP la disgiunzione è una parola logica che combina *due* proposizioni e non tre. Dunque la (8) dovrebbe più correttamente essere scritta:

$$O(m,1) \vee ((O(d,1) \vee (O(t,1)), \tag{9}$$

oppure

$$(O(m,1) \vee (O(d,1)) \vee O(t,1), \tag{10}$$

Ma, ci rendiamo conto che in questo caso le parentesi sono effettivamente ridondanti. Infatti la (9) e la (10) *significano esattamente la stessa cosa*, cioè sono vere (o false) esattamente negli stessi stati della piccionaia. Ciò dipende dal fatto che la disgiunzione gode della cosiddetta *proprietà associativa*:

Proprietà associativa della disgiunzione

> PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DELLA DISGIUNZIONE:
> $P \vee (Q \vee R)$ è logicamente equivalente a $(P \vee Q) \vee R$

Grazie a questa proprietà possiamo tranquillamente omettere le parentesi in una proposizione come la (8) senza rischi di ambiguità.

Non solo: la disgiunzione gode anche della cosiddetta *proprietà commutativa*:

Proprietà commutativa della disgiunzione

> PROPRIETÀ COMMUTATIVA DELLA DISGIUNZIONE:
> $P \vee Q$ è logicamente equivalente a $Q \vee P$.

Dunque, in una disgiunzione non è importante l'ordine in cui ricorrono le proposizioni disgiunte; così una proposizione come:

$$O(d,1) \vee O(m,1) \vee O(t,1), \tag{11}$$

ha esattamente lo stesso significato della (8)

Tuttavia, a rigore, le nostre regole di eliminazione e di introduzione della disgiunzione si applicano a disgiunzioni di due proposizioni. Non è però difficile capire che la proprietà associativa e quella commutativa garantiscono che sono corrette le seguenti versioni generalizzate di queste regole, che si applicano a disgiunzioni di un qualsiasi numero finito di proposizioni.

ELIMINAZIONE DELLA DISGIUNZIONE VERA (ELIM∨V): Se una disgiunzione è vera, ed è falsa una delle proposizioni disgiunte, allora è vera la disgiunzione delle proposizioni rimanenti.

Regola generalizzata di eliminazione della disgiunzione vera

ELIMINAZIONE DELLA DISGIUNZIONE FALSA (ELIM∨F): Se una disgiunzione è falsa, allora sono false tutte le proposizioni disgiunte.

Regola generalizzata di eliminazione della disgiunzione falsa

INTRODUZIONE DELLA DISGIUNZIONE VERA (INT∨V): Se è vero uno dei disgiunti di una data disgiunzione, allora la disgiunzione è vera.

Regola generalizzata di introduzione della disgiunzione vera

INTRODUZIONE DELLA DISGIUNZIONE FALSA (INT∨F): Se tutti i disgiunti di una data disgiunzione sono falsi, allora la disgiunzione è falsa.

Regola generalizzata di introduzione della disgiunzione falsa

Un esempio di applicazione della prima di queste regole è il seguente:

(1)	$V\ O(m,1) \vee O(t,2) \vee O(d,3)$	
(2)	$F\ O(t,2)$	
(3)	$V\ O(m,1) \vee O(d,3)$	elim∨V (1,2)

Un esempio di applicazione della seconda è invece il seguente:

(1)	$F\ O(m,1) \vee O(t,2) \vee O(d,3)$	
(2)	$F\ O(m,1)$	elim∨F (1)
(3)	$F\ O(t,2)$	elim∨F (1)
(4)	$F\ O(d,3)$	elim∨F (1).

Ecco un esempio di applicazione della terza:

(1)	$V\ O(m,1)$	
(2)	$V\ O(m,2) \vee O(m,1) \vee O(m,3)$	int∨V (1),

e uno della quarta:

(1)	$F\ O(m,1)$	
(2)	$F\ O(t,3)$	
(3)	$F\ O(d,4)$	
(4)	$F\ O(t,3) \vee O(m,1) \vee O(d,4)$	int∨V (1,2,3),

Supponiamo ora di volere esprimere in LP la seguente proposizione:

La celletta n. 1 è vuota. (12)

Di nuovo, le risorse espressive di LP non ci consentono di esprimere direttamente questa proposizione, ma ci consentono di tradurla in una proposizione logicamente equivalente:

$$\neg O(m,1) \wedge \neg O(d,1) \wedge \neg O(t,1). \tag{13}$$

Anche in questo caso possiamo fare a meno delle parentesi, dal momento che le proprietà associativa e commutativa valgono anche per la congiunzione:

Proprietà associativa e commutativa della congiunzione

PROPRIETÀ ASSOCIATIVA DELLA CONGIUNZIONE:
$P \wedge (Q \wedge R)$ è logicamente equivalente a $(P \wedge Q) \wedge R$

PROPRIETÀ COMMUTATIVA DELLA CONGIUNZIONE:
$P \wedge Q$ è logicamente equivalente a $Q \wedge P$.

Osservate che la proprietà commutativa vale per la congiunzione booleana in quanto quest'ultima è una congiunzione *atemporale*, mentre non varrebbe per la congiunzione temporale "e poi" discussa nell'Esercizio 9 della Dispensa 1.

In virtù delle proprietà associativa e commutativa, possiamo generalizzare anche le regole di eliminazione e di introduzione della congiunzione, come abbiamo fatto per quelle della disgiunzione, nel modo seguente:

Regola generalizzata di eliminazione della congiunzione vera

ELIMINAZIONE DELLA CONGIUNZIONE VERA (ELIM$\wedge$V): Se una congiunzione è vera, allora sono vere tutte le proposizioni congiunte.

Regola generalizzata di eliminazione della congiunzione falsa

ELIMINAZIONE DELLA CONGIUNZIONE FALSA (ELIM$\wedge$F): Se una congiunzione è falsa, e una delle proposizioni congiunte è vera, allora è falsa la congiunzione delle proposizioni rimanenti.

Regola generalizzata di introduzione della congiunzione vera

INTRODUZIONE DELLA CONGIUNZIONE VERA (INT$\wedge$V): Se tutti i congiunti di una data congiunzione sono veri, allora la congiunzione è vera.

Regola generalizzata di introduzione della congiunzione falsa

INTRODUZIONE DELLA CONGIUNZIONE FALSA (INT$\wedge$F): Se uno dei congiunti di una data congiunzione è falso, allora la congiunzione è falsa.

Un esempio di applicazione della prima di queste regole è il seguente:

(1)	$V\, O(m,1) \wedge O(t,2) \wedge O(d,3)$	
(2)	$V\, O(m,1)$	elim∧V (1)
(3)	$V\, O(t,2)$	elim∧V (1)
(4)	$V\, O(d,3)$	elim∧V (1).

Un esempio di applicazione della seconda è invece il seguente:

(1)	$F\, O(m,1) \wedge O(t,2) \wedge O(d,3)$	
(2)	$V\, O(t,2)$	
(3)	$F\, O(m,1) \wedge O(d,3)$	elim∧F (1,2)

Esercizio 2 *Traducete in LP le seguenti proposizioni:*

1. *Mike è presente nella piccionaia*
2. *Mike è assente dalla piccionaia*
3. *Le cellette sono tutte occupate*
4. *Almeno una celletta è occupata*
5. *Le cellette sono tutte vuote*
6. *Almeno una celletta è vuota*
7. *Tutti i piccioni sono presenti*
8. *Almeno un piccione è presente*
9. *Tutti i piccioni sono assenti*
10. *Almeno un piccione è assente*

N.B: Quando vi si chiede di tradurre una proposizione in LP non dovete curarvi del fatto che la proposizione tradotta soddisfi le informazioni di sfondo. È possibile tradurre correttamente anche proposizioni false!

Il condizionale: parte I

Il condizionale nel linguaggio ordinario

È venuto il momento di definire il significato dell'ulltima delle parole logiche booleane che prenderemo in considerazione, il condizionale "se..., allora ---".

Il condizionale fornisce una proposizione di un dato linguaggio booleano L quando i suoi due spazi vuoti vengono riempiti da una coppia di proposizioni di L. La proposizione che occupa la prima posizione viene detta *antecedente* del condizionale, mentre quella che occupa la seconda posizione viene detta il suo *conseguente*. Per esempio, "Se diminuirà la pressione fiscale, l'economia potrà ripartire" è un condizionale il cui antecedente è la proposizione (elementare) "la pressione fiscale diminuirà" e il cui conseguente è la proposizione (elementare) "l'economia potrà ripartire". Un altro esempio, riferito al problema della piccionaia introdotto nella Dispensa 2, è "se Mike occupa la 1 o la 2, allora Tina occupa la 3", in cui l'antecedente è la proposizione (complessa) "Mike occupa la 1 oppure la 2" e il conseguente è la proposizione (elementare) "Tina occupa la 3".

Antecedente e conseguente

Osservate che vi sono molti modi equivalenti in italiano per esprimere la proposizione espressa da un condizionale. Per esempio, le seguenti proposizioni:

- Q se P
- P solo se Q
- P è una condizione sufficiente per Q
- Supponiamo che P sia vera. Allora Q è vera

sono tutte equivalenti a "se P allora Q".

In primo luogo osservate che una proposizione della forma:

$$Q \text{ se } P$$

è solo una variante linguistica di "se P, allora Q" e ha esattamente lo stesso significato. "Tina occupa la 2 se Mike occupa la 1" e "se Mike occupa la 1, allora Tina occupa la 2" hanno esattamente lo stesso significato. In entrambi i casi la proposizione "Mike occupa la 1" è l'*antecedente* del condizionale, indipendentemente dal fatto che sia collocata, nella costruzione della frase, prima o dopo la proposizione "Tina occupa la 2" che esprime invece il *conseguente*. Possiamo convenire che il formato standard in cui rappresentare un condizionale sia "se P, allora Q". Dunque, ogni volta che incontriamo una proposizione come "Tina occupa la 2, se Mike occupa la 1" la rappresentiamo nel formato standard, come "se Mike occupa la 1, allora Tina occupa la 2", in modo da rendere chiaro quali siano l'antecedente ("Mike occupa la 1") e il conseguente ("Tina occupa la 2").

Nel linguaggio comune, l'uso dell'espressione "solo se" è spesso circondato da una certa confusione, per cui è bene cercare di chiarirlo subito. Chiediamoci dunque quale sia il significato di proposizioni della forma

$$P \textit{ solo se } Q$$

e in che modo questo significato sia distinto da quello di proposizioni della forma "*P se Q*". Considerate la seguente proposizione:

Differenza fra "se" (condizione sufficiente) e "solo se" (condizione necessaria)

Claudio è nonno solo se *Claudio è padre*. (14)

Si tratta certamente di una proposizione vera, che è equivalente a

se *Claudio è nonno,* allora *Claudio è padre*. (15)

La verità di "Claudio è padre" è, cioè, una *condizione necessaria* per la verità di "Claudio è nonno". Ma non è certamente una *condizione sufficiente*. Invece la proposizione

Claudio è nonno se *Claudio è padre* (16)

che, come abbiamo visto, è equivalente a

se *Claudio è padre,* allora *Claudio è nonno* (17)

asserisce che la verità di "Claudio è padre" è una condizione sufficiente per la verità di "Claudio è nonno". Dunque non ha assolutamente lo stesso significato ed è, ovviamente, falsa.

Osservate che nella (15) — che è equivalente alla (14) — mentre la verità di "Claudio è padre" è una condizione necessaria per la verità di "Claudio è nonno", è anche vero che la verità di "Claudio è nonno" è una condizione sufficiente per la verità di "Claudio e padre". In altri termini:

L'*antecedente* di un condizionale esprime una *condizione sufficiente* per la verità del conseguente, mentre il *conseguente* esprime una *condizione necessaria* per la verità dell'antecedente.

Esercizio 3 *Considerate le proposizioni:*

Ci sarà la ripresa economica *solo se* scenderà la pressione fiscale (*)

e

Ci sarà la ripresa economica *se* scenderà la pressione fiscale. (**)

Rappresentatele sotto forma di condizionali standard (della forma "Se P allora Q") e illustrate la differenza di significato fra la prima e la seconda.

In conclusione, una proposizione della forma

P solo se Q

va rappresentata, nel formato standard del condizionale, come

se P allora Q.

e significa:

- Q è una *condizione necessaria* per P, cioè Q si verifica nesseriamente ogni volta che P si verifica,
- P è una condizione sufficiente per Q, cioè ogni volta che si verifica P, ciò è sufficiente perché si verifichi anche Q.

Viceversa, una proposizione della forma

P se Q

va rappresentata, nel formato standard del condizionale come

se Q allora P.

e significa:

- Q è una *condizione sufficiente* per P,
- P è una condizione necessaria per Q.

Rappresenteremo la parola logica "se..., allora ---" con il simbolo "$\rightarrow$" posto fra l'antecedente e il conseguente, così una proposizione della forma "se P allora Q" verrà rappresentata con l'espressione "$P \rightarrow Q$".

A volte vogliamo esprimere il fatto che il verificarsi di una certa proposizione Q è una *condizione necessaria e sufficiente* per il verificarsi di P. Per esempio, qualcuno potrebbe sostenere che abbassare la pressione fiscale è una condizione necessaria e sufficiente per la ripresa economica, cioè che la ripresa economica ci sarà *se e solo se* scenderà la pressione fiscale. Un'asserzione della forma

Condizione necessaria e sufficiente

P se e solo se Q

è equivalente alla congiunzione delle due asserzioni "*P se Q*" e "*P solo se Q*", cioè a:

$$(Q \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow Q). \tag{18}$$

Spesso per rappresentare "se e solo se" viene usata la doppia freccia, per cui la (18) viene abbreviata come segue:

$$P \leftrightarrow Q. \tag{19}$$

L'uso corrente del condizionale è complicato dal fatto che spesso, nel discorso comune, ricorrono espressioni *ambigue*, come

> *la legislatura proseguirà* purché *venga approvata la riforma della giustizia*

oppure

> *la legislatura proseguirà* a condizione che *venga approvata la riforma della giustizia*,

in cui non è chiaro se si intenda dire che l'approvazione della riforma sia una condizione *necessaria* per il proseguimento della legislatura, o sia invece una condizione *sufficiente*, oppure ancora una condizione *necessaria e sufficiente*. Il significato comunemente attribuito allle due proposizioni precedenti, oscilla infatti queste tre interpretazioni:

(a) *la legislatura prosegue* $\to$ *viene approvata la riforma della giustizia*

(b) *viene approvata la riforma della giustizia* $\to$ *la legislatura prosegue*

(c) la congiunzione delle due proposizioni precedenti.

A complicare il quadro interviene il fatto che spesso il linguaggio comune è ellittico.[1] A volte si dice "P se Q" intendendo ciò che in modo più preciso dovrebbe essere espresso come "P solo se Q" oppure "P se e solo se Q". Per tornare all'esempio precedente, se un politico dice

la legislatura prosegue se *viene approvata la riforma della giustizia* (20)

non è chiaro se intenda che l'approvazione della riforma è una condizione sufficiente per il proseguimento della legislatura, secondo l'interpretazione letterale corrispondente alla versione (b) qui sopra, oppure che è una condizione necessaria, come nella versione (a), nel qual caso "se" è un'espressione ellittica per "solo se", oppure ancora che è una condizione necessaria e sufficiente, come nella versione (c), nel qual caso "se" è un'espressione ellittica per "se e solo se". Il significato effettivo di queste asserzioni, nel linguaggio comune, a volte si può evincere dal *contesto*. Spesso però sarebbe necessaria una precisazione da parte di chi le asserisce, ma c'è da scommettere che un politico "navigato" non accetterà mai, neppure sotto tortura, di chiarire *in anticipo* il significato preciso di un condizionale come quello nella (20), riservandosi di scegliere *successivamente* una delle tre interpretazioni possibili, a seconda delle circostanze e della convenienza, come quella "corretta" ("Sono stato frainteso! Intendevo dire che...").

Esercizio 4 *Traducete le proposizioni seguenti nel Linguaggio della Piccionaia (vedi Dispensa 2), usando il formato standard del condizionale, cioè il formato* $P \to Q$ *(= se P, allora Q).*

1. *Tina occupa la celletta n. 3 solo se Duke occupa la celletta n. 2.*
2. *Che Duke occupi la celletta n. 2 è una condizione sufficiente perché Mike occupi la n. 4.*
3. *Supponiamo che Mike occupi la 1 o la 2. Allora Tina occupa la 3 o la 4.*
4. *Mike occupa la 2 o la 3, se Tina occupa la 4.*

[1] Si ricorda che in grammatica per "ellissi" si intende l'omissione di qualche parola che si può considerare sottintesa.

La logica fornisce uno strumento importante per ridurre le ambiguità presenti nel discorso comune, offrendo un rimedio (nei limiti del possibile) all'*inaccuratezza* del linguaggio ordinario in qualsiasi campo di applicazione. L'obiettivo della *precisione linguistica* non è infatti una prerogativa del discorso matematico o scientifico, ma riguarda qualunque attività pratica o intellettuale. Secondo Italo Calvino anche la *letteratura*: per lui la "leggerezza" è un valore letterario che, tuttavia, "si associa con la precisione e la determinazione, non con la vaghezza e l'abbandono al caso [...] Paul Valery ha detto: 'Il faut être léger comme l'oiseau, et non comme la plume'." (I. Calvino, *Lezioni Americane I: Leggerezza*). D'altra parte, la ricerca della precisione parte dalla consapevolezza che il mondo sembra andare in tutt'altra direzione: "mi sembra che il linguaggio venga sempre usato in modo approssimativo, casuale, sbadato, e ne provo un fastidio intollerabile"; ma "non si creda che questa mia reazione corrisponda a un'intolleranza per il prossimo: il fastidio peggiore lo provo quando sento parlare me stesso." (I. Calvino, *Lezioni Americane III: Esattezza*.)

5. *Che Mike occupi la 2 è una condizione necessaria perché Tina occupi la 1.*

6. *Mike occupa la 1 se e solo se Tina occupa la 3.*

Il condizionale nel ragionamento ordinario

L'uso del condizionale nel ragionamento ordinario è caratterizzato da due importantissimi schemi *corretti*, noti come *modus ponens* e *modus tollens*, ma anche da due schemi *scorretti* noti come *fallacie del condizionale*. Cominciamo illustrando gli schemi corretti.

ELIM→V1 (MODUS PONENS): *Se un condizionale è vero ed è vero il suo antecedente, allora è vero anche il suo conseguente.* Cioè, è corretta la seguente regola di inferenza:

$$\frac{V\,P \to Q \qquad V\,P}{V\,Q} \quad \text{o, nella versione non-segnata,} \quad \frac{P \to Q \qquad P}{Q}$$

Prima regola di eliminazione del condizionale vero

Per esempio:

(1) se non piove, vado a lavorare a piedi,

(2) non piove,

---

dunque, vado a lavorare a piedi.

Il fatto che la conclusione, date le premesse, ci appare del tutto ovvia mostra come il *modus ponens* sia una regola di inferenza indissolubilmente connessa al significato del condizionale nel discorso ordinario. Il *modus ponens* sarà dunque la nostra prima *regola di eliminazione del condizionale vero* (in breve elim→V1).

Esercizio 5 *Traducete ciascuna delle seguenti coppie di premesse nel Linguaggio della Piccionaia (Dispensa 2) e stabilite se la regola del* modus ponens *può o non può essere applicata. Nel caso in cui la regola sia applicabile, indicate quale deve essere la conclusione*

1.1 Se Mike occupa la 1, allora Tina occupa la 2
1.2 Mike occupa la 1

2.1 Mike occupa la 3 solo se Duke occupa la 1
2.2 Mike occupa la 3

3.1 Tina occupa la 3 solo se Mike occupa la 2
3.2 Mike occupa la 2

4.1 Che Tina occupi la 3 è una condizione sufficiente perché Mike occupi la 1
4.2 Mike occupa la 1

5.1 Che Duke occupi la 2 è una condizione necessaria perché Mike occupi la 1

5.2 *Mike occupa la 1*

Un altro schema di ragionamento corretto relativo al condizionale è il *modus tollens*:

> ELIM$\rightarrow$V2 (MODUS TOLLENS): *Se un condizionale è vero ed è falso il suo conseguente, allora è falso anche il suo antecedente.* Cioè, è corretta la seguente regola di inferenza:
>
> $$\frac{\begin{array}{l} V\, P \rightarrow Q \\ F\, Q \end{array}}{F\, P} \quad \text{o, nella versione non-segnata,} \quad \frac{\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \neg Q \end{array}}{\neg P}$$

Seconda regola di eliminazione del condizionale vero

Il *modus tollens* è appena meno ovvio del *modus ponens*, ma è anch'esso uno schema di ragionamento molto frequente nell'uso ordinario del condizionale. Per esempio:

(1) se c'è vento, le foglie degli alberi si agitano,

(2) le foglie degli alberi non si agitano,

---

dunque, non c'è vento.

Possiamo dunque sostenere che anche questa regola di inferenza è indissolubilmente connessa al significato del condizionale nel discorso ordinario, per cui sarà la nostra seconda *regola di eliminazione del condizionale vero* (in breve elim$\rightarrow$V2).

Il *modus tollens* svolge un ruolo cruciale nella *confutazione di un'ipotesi* ed è dunque uno schema di ragionamento di fondamentale importanza sia nel ragionamento scientifico sia in quello pratico. Infatti, un modo efficace di mostrare che una certa ipotesi P è *falsa*, consiste nel dimostrare che è vero un condizionale della forma $P \rightarrow Q$, dove Q è una proposizione comunemente ritenuta falsa, oppure la cui falsità può essere facilmente stabilita. In queste circostanze il *modus tollens* ci consente di concludere che l'ipotesi P è *falsa*.[2]

Il *modus tollens* e la confutazione delle ipotesi

È interessante osservare che il *modus tollens* può essere derivato dal *modus ponens* mediante un semplice ragionamento per esclusione (vedi Dispensa 2). Tale ragionamento è imperniato, come tutti i ragionamenti per esclusione, sul *Principio di Non-Contraddizione*, che abbiamo introdotto nella Dispensa 2, ma anche su un altro principio fondamentale detto *Principio di Bivalenza*:

[2] Non a caso il filosofo della scienza Karl Popper—che ha sempre difeso una visione del progresso scientifico come un alternarsi di *congetture* e *confutazioni*—ha sostenuto che il *modus tollens* è la regola chiave nella "logica della scoperta scientifica". (Il termine "congettura" è sinonimo di "ipotesi", e indica una proposizione della cui verità non siamo certi.)

> PRINCIPIO DI BIVALENZA: data una qualunque proposizione P, e un qualunque stato di cose S, o P è vera in S oppure P è falsa in S.

Il *Principio di Bivalenza*, insieme al *Principio di Non-Contraddizione* (vedi Dispensa 2), sta alla base della *logica classica*. È equivalente al *Principio del Terzo Escluso* che Aristotole enuncia nella *Metafisica*—"Ma non è neppure possibile che vi sia qualcosa di intermedio tra due enunciati contrari, bensì di un'unica cosa è necessario affermare o negare un'unico predicato qualunque esso sia" (*Metafisica*, IV, 7, 1011b)—sebbene nel *De Interpretatione* (cap. IX) ne metta in dubbio la validità in relazione alle proposizioni future che esprimono qualcosa di contingente, cioè di non necessario ("Domani ci sarà una battaglia navale").

Se accettiamo il Principio di Non-Contraddizione, il Principio di Bivalenza e la correttezza del *modus ponens*, allora dobbiamo accettare anche la correttezza del *modus tollens*. Infatti, assumiamo che le premesse di un'applicazione del *modus tollens* siano vere, cioè che siano vere

- $V\,P \to Q$ (nella versione non segnata $P \to Q$), e
- $F\,P$ (nella versione non segnata $\neg Q$).

Facciamo l'ipotesi che la conclusione sia falsa, cioè che sia vera P. Ma in tal caso, dato che una delle premesse dice che è vero il condizionale $P \to Q$, per il *modus ponens* dovremmo concludere che è vera anche Q. Ma questo contraddice la nostra seconda premessa. Dunque, se accettiamo il *modus ponens*, non è possibile che le premesse di un'applicazione del *modus tollens* siano vere e la sua conclusione falsa, perché in tal caso la proposizione Q dovrebbe essere vera e falsa al tempo stesso, il che è escluso dal Principio di Non-Contraddizione. Dunque, se accettiamo le premesse di un'applicazione del *modus tollens*, la sua conclusione non può essere falsa. Ma, per il Principio di Bivalenza, se una proposizione non è falsa deve essere vera. Abbiamo così dimostrato che la conclusione di qualunque applicazione del *modus tollens* deve per forza essere vera quando sono vere le sue premesse, cioè che il *modus tollens* è una regola di inferenza *corretta*. Possiamo rappresentare schematicamente questo ragionamento nel modo seguente ("×" significa "contraddizione!"):

Derivazione del *modus tollens* da *modus ponens*, Principio di Non-Contraddizione e Principio di Bivalenza

$$\begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{l}{V\,P \to Q} \\
\multicolumn{2}{l}{F\,Q} \\
\hline
V\,P & F\,P \\
V\,Q & \\
\times &
\end{array}$$

Esercizio 6 *Traducete ciascuna delle seguenti coppie di premesse nel Linguaggio della Piccionaia (Dispensa 2) e stabilite se la regola del* modus tollens *può o non può essere applicata. Nel caso in cui la regola sia applicabile, indicate quale deve essere la conclusione*

1.1 *Se Mike occupa la 1, allora Tina occupa la 2*
1.2 *Mike non occupa la 1*

2.1 *Mike occupa la 3 solo se Duke occupa la 1*
2.2 *Duke non occupa la 1*

3.1 *Tina occupa la 3 se Mike occupa la 2*
3.2 *Tina non occupa la 3*

4.1 *Che Tina occupi la 3 è una condizione sufficiente perché Mike occupi la 1*
4.2 *Mike occupa la 1*

5.1 *Che Duke occupi la 2 è una condizione necessaria perché Mike occupi la 1*

5.2 *Mike non occupa la 1*

Consideriamo ora alcune schemi di ragionamento *scorretti*, detti anche "fallacie", che talvolta vengono usati in relazione al condizionale. Il primo di questi schemi è noto come *negazione dell'antecedente*. Un tipico esempio è il seguente:

Fallacie del condizionale

Negazione dell'antecedente

(1) se giochiamo bene, vinciamo la partita

(2) non giochiamo bene

---

dunque, non vinciamo la partita.

Si tratta chiaramente di un ragionamento scorretto. La prima premessa asserisce che giocare bene è una condizione *sufficiente* per vincere la partita, ma non che è una condizione *necessaria*, cioè si ammette la possibilità che si possa vincere anche senza giocare bene. Un controesempio è un "mondo possibile" in cui, pur rimanendo vero che se giochiamo bene vinciamo, di fatto giochiamo male e vinciamo lo stesso (magari per qualche svista arbitrale): è chiaro che non c'è niente di "logicamente impossibile" in una situazione di questo tipo, e dunque si tratta di un legittimo controesempio. Osservate che il ragionamento diventa *corretto* se, al posto di "se" si mette "solo se" (che introduce, appunto, una condizione necessaria). Cioè il seguente ragionamento:

(1) *solo* se giochiamo bene, vinciamo la partita

(2) non giochiamo bene

---

dunque, non vinciamo la partita.

è invece corretto e non ha controesempi.

Esercizio 7 *Rappresentate la premessa (1) nel formato standard del condizionale ($P \rightarrow Q$) e mostrate che il ragionamento costituisce un'applicazione corretta del* modus tollens*.*

Esercizio 8 *Costruite un'altra inferenza scorretta che rappresenta questa fallacia e descrivete un controesempio.*

Un'altra tipica fallacia del condizionale è nota come *affermazione del conseguente*:

Affermazione del conseguente

(1) se c'è un'invasione di meduse, nessuno fa il bagno

(2) nessuno fa il bagno

---

dunque, c'è un'invasione di meduse.

Anche in questo caso si tratta di un ragionamento scorretto. Il fatto che il conseguente sia vero non costituisce una *garanzia* della verità dell'antecedente (dopo tutto è *possibile* che nessuno faccia il bagno per altre ragioni) sebbene a volte possa esssere un segno della sua *plausibilità*: se vediamo che in una bella giornata di sole in acqua non c'è nessuno, possiamo ritenere *probabile* che ci sia un'invasione di meduse, ma non possiamo in alcun modo esserne certi, anche se siamo certi della verità del condizionale "se c'è un'invasione di meduse, allora nessuno fa il bagno". Osservate, di nuovo, che sostituendo "se" con "solo se" il ragionamento diventa *corretto*.

Esercizio 9 *Costruite un'altra inferenza scorretta che rappresenta questa fallacia e descrivete un controesempio.*

La nostra discussione suggerisce fortemente che dietro le cosiddette "fallacie del condizionale", su cui sono stati versati fiumi di inchiostro, possa esservi a volte—se non nella maggior parte dei casi—solo un uso non del tutto accurato del linguaggio, più che un vero e proprio "errore" di ragionamento: o un uso ellittico ("se" al posto di "solo se") o l'asserzione categorica di una conclusione ("dunque c'è un'invasione di meduse") laddove sarebbe stata più opportuna una formulazione in termini di probabilità ("dunque è *probabile* che ci sia un'invasione di meduse").

Fallacie o imprecisione linguistica?

Il problema dell'aggressività

Nella Dispensa 2 abbiamo discusso una tipica classe di problemi che possono essere formulati in un linguaggio booleano, come il Linguaggio della Piccionaia (LP). Abbiamo anche visto come alcuni di questi problemi possono essere risolti mediante le regole di eliminazione e di introduzione che abbiamo derivato dalle due teorie del significato (quella consequenzialista e quella vero-funzionale) che abbiamo illustrato nella Dispensa 1. Abbbiamo anche visto come costruire *deduzioni* per dimostrare che determinate inferenze sono *corrette* e come costruire *controesempi* per mostrare invece che altre inferenze sono *scorrette*. In questo paragrafo introdurremo un'altra classe di problemi che possono essere formulati efficacemente in un linguaggio booleano e (in alcuni casi) risolti per mezzo delle regole di inferenza che abbiamo fissato.

Uno psicologo è interessato alle relazioni di aggressività tra tre ragazzi, Arabella, Bianca e Carlo. Un "mondo possibile" , in questo caso, consiste nella specificazione, per ogni coppia di ragazzi, se l'uno è aggressivo con l'altro oppure no. Si ammette, naturalmente, anche la possibilità che un ragazzo sia aggressivo con se stesso. Un linguaggio booleano (che chiamiamo LA) adatto a codificare informazioni su questo tipo di situazioni dovrà comprendere la proposizione aperta in due spazi vuoti "... è aggressivo con ---" (che abbreviamo con "G(...,---)" e i nomi dei tre ragazzi (abbreviati rispettivamente dalle lettere a, b e c).

Il Linguaggio dell'Aggressività

LA, proprio come LP, è un linguaggio con risorse espressive molto limitate che però—grazie alle parole logiche booleane e al fatto il discorso verte solo su tre ragazzi bene identificati—ci consente di esprimere attraverso parafrasi anche proposizioni che non sono direttamente esprimibili in esso. Considerate la proposizione:

$$\text{Arabella è aggressiva con qualcuno.} \tag{21}$$

Anche se non può essere espressa direttamente in LA, questa proposizione è chiaramente equivalente a:

$$G(a, a) \vee G(a, b) \vee G(a, c). \tag{22}$$

Esercizio 10 *Traducete le seguenti proposizioni in LA:*

1. *Arabella è aggressiva con tutti*

2. *Arabella non è aggressiva con nessuno*

Supponiamo ora di voler esprimere in LA la seguente proposizione:

Arabella è aggressiva con tutti quelli che sono aggressivi con lei. (23)

Per stabilire se la (23) può effettivamente essere tradotta in LA, ed eventualmente come, dobbiamo riflettere attentamente sul suo significato. Questa proposizione significa che *se* uno dei ragazzi è aggressivo con Arabella, *allora* Arabella ricambia questa aggresività. Il modo in cui abbiamo appena parafrasato la (23) suggerisce dunque che essa può essere espressa in LA facendo ricorso al *condizionale*. È sufficiente, a questo scopo, asserire che le proposizioni ottenute dal condizionale aperto $G(..., a) \rightarrow G(a, ...)$ riempiendo lo spazio vuoto indicato dei puntini con lo stesso nome, sono *tutte vere*, cioè che è vera la loro *congiunzione*. Dunque la (23) può essere tradotta in LA nel modo seguente:

$$(G(a, a) \rightarrow G(a, a)) \wedge (G(b, a) \rightarrow G(a, b)) \wedge (G(c, a) \rightarrow G(a, c)). \tag{24}$$

In questo caso particolare, il primo condizionale "$G(a, a) \rightarrow G(a, a)$", cioè "se Arabella è aggressiva con se stessa allora è aggressiva con se stessa" non dà nessuna informazione (si tratta di una proposizione *banalmente vera*, cioè è vera *in qualunque mondo possibile*), per cui può anche essere omesso. Dunque, la (24) può essere espressa in modo non-ridondante nel modo seguente:

$$(G(b, a) \rightarrow G(a, b)) \wedge (G(c, a) \rightarrow G(a, c)). \tag{25}$$

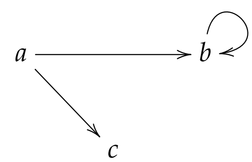
Osservate che la (25) non esclude che Arabella possa essere aggressiva *anche* con qualcuno che non è aggressivo con lei. Si limita ad asserire che lo è con *tutti* quelli che sono aggressivi con lei, senza pronunciarsi sugli altri. Se dico "mi piacciono tutti i film horror" non intendo necessariamente implicare che non mi piace nessun film di altro genere.

Esercizio 11 *Provate a tradurre in LA la seguente proposizione*

Arabella è aggressiva solo *con quelli che sono aggressivi con lei.*

Riflettete attentamente sul significato di questa proposizione e sulla differenza fra essa e la (25)*.*

Per rappresentare graficamente i "mondi possibili" relativi ad LA useremo diagrammi come il seguente:



Questo diagramma rappresenta il mondo possibile in cui Arabella è aggressiva con Bianca e con Carlo, Carlo non è aggressivo con nessuno e Bianca è aggressiva solo con se stessa.

Esercizio 12 *Date una rappresentazione grafica del mondo possibile in cui Bianca è aggressiva con Arabella e Carlo, mentre Carlo e Arabella sono aggressivi solo con se stessi.*

Esercizio 13 *Considerate le seguenti due proposizioni*

1. *Arabella è aggressiva con tutti quelli che sono aggressivi con lei,*

2. *Arabella è aggressiva solo con quelli che sono aggressivi con lei.*

Descrivete con opportuni diagrammi: (a) un mondo possibile in cui la 1 è vera e la 2 è falsa, (b) un mondo possibile in cui la 2 è vera e la 1 è falsa.

Proviamo ora a risolvere un semplice problema deduttivo in LA facendo uso delle regole di eliminazione del condizionale vero che abbiamo introdotto in precedenza.

Supponete di avere ricevuto le seguenti informazioni:

(1) Arabella è aggressiva con tutti quelli che sono aggressivi con lei

(2) non è vero che Bianca sia aggressiva con Carlo

(3) Se Bianca non è aggressiva sia con se stessa sia con Carlo, allora Arabella non è aggressiva con Bianca.

Possiamo dedurre da queste informazioni che Bianca non è aggressiva con Arabella? Vediamo.

In primo luogo dobbiamo tradurre le premesse in LA.

(1*) $(G(b,a) \to G(a,b)) \wedge (G(c,a) \to G(a,c))$.

(2*) $\neg G(b,c)$

(3*) $\neg(G(b,b) \wedge G(b,c)) \to \neg G(a,b)$

Dalla (2*), per int∧F, otteniamo

(4) $\neg(G(b,b) \wedge G(b,c))$.

Così, per *modus ponens* (elim→V1) dalla (3*) e dalla (4) otteniamo

(5) $\neg G(a,b)$.

Ora, dalla (1*), per elim∧V1, otteniamo

(6) $G(b,a) \to G(a,b)$

e dunque, per *modus tollens* (elim→V2) dalla (6) e dalla (5), possiamo concludere

(7) $\neg G(b,a)$.

Ricapitolando:

(1)	$(G(b,a) \to G(a,b)) \wedge (G(c,a) \to G(a,c))$	(IR)
(2)	$\neg G(b,c)$	(IR)
(3)	$\neg(G(b,b) \wedge G(b,c)) \to \neg G(a,b)$	(IR)
(4)	$\neg(G(b,b) \wedge G(b,c))$	Int∧F2 (2)
(5)	$\neg G(a,b)$	elim→V1 (3,4)
(6)	$G(b,a) \to G(a,b)$	elim∧V1 (1)
(7)	$\neg G(b,a)$	elim→V2 (6,5)

Esercizio 14 *Traducete le seguenti proposizioni in LA*

(1) Arabella è aggressiva con tutti quelli che non sono aggressivi con lei

(2) Non è vero che Bianca sia aggressiva sia con se stessa sia con Carlo

(3) Se Bianca non è aggressiva con se stessa, allora Arabella non è aggressiva con Bianca.

(4) Bianca è aggressiva con Carlo

e provate a dedurre, usando le regole di inferenza studiate finora, la conclusione che Bianca è aggressiva con Arabella.

Condizionale booleano vs condizionale ordinario

Nel paragrafo "Il condizionale nel ragionamento ordinario" abbiamo introdotto due importanti regole di eliminazione, il *modus ponens* e il *modus tollens*, che rispecchiano fedelmente l'uso del condizionale in qualunque contesto. Entrambe le regole determinano, in accordo con la teoria consequenzialista del significato (vedi Dispensa 1), le conseguenze immediate dell'asserzione che un condizionale è vero, con l'aiuto di una premessa addizionale—la verità dell'antecedente nel caso del *modus ponens*, e la falsità del conseguente nel caso del *modus tollens*. Queste regole governano però solo *una parte* del significato del condizionale. Se vogliamo trattare il condizionale alla stregua delle altre parole logiche booleane che abbiamo incontrato fino ad ora, per determinare completamente il significato del condizionale dobbiamo anche stabilire—come abbiamo fatto per congiunzione, disgiunzione e negazione—quali devono essere le conseguenze immediate dell'asserzione che un condizionale è *falso*, dobbiamo cioè fissare opportune *regole di eliminazione del condizionale falso*.

Questo è però un compito tutt'altro che semplice. In realtà *non esistono* regole di eliminazione del condizionale falso che abbiano una forma altrettanto semplice di quelle per altre parole logiche booleane e, al tempo stesso, corrispondano fedelmente all'uso del condizionale nel ragionamento ordinario.

Che cosa intendiamo per "una forma altrettanto semplice di quelle per le altre parole logiche booleane"? Intendiamo che le regole di eliminazione del condizionale falso dovrebbero avere la forma seguente:

$$\frac{\begin{array}{l} F\ P \to Q \\ \text{[eventuale seconda premessa]} \end{array}}{F\ P | V\ P | F\ Q | V\ Q \text{ [una di queste possibili conclusioni]}}$$

Ma, *nessuna* fra tutte le possibili regole con questa forma, rispecchia fedelmente l'uso del condizionale nel linguaggio ordinario.[3]

Sembra, infatti, che la falsità di un condizionale in un certo stato di cose S non abbia necessariamente conseguenze che possano essere descritte solo in termini di ciò che è vero o falso in S stesso.

Se dico che, in un certo stato S, è *falsa* la proposizione

Se Arabella è aggressiva con Carlo, allora Carlo è aggressivo con Bianca (26)

quello che di solito intendo non è qualcosa che ha a che vedere esclusivamente con quello che è vero o falso in S. Io potrei non sapere se Arabella è effettivamente aggressiva con Carlo, e credere al tempo stesso che la (26) sia falsa. In questo caso, nell'asserire la falsità della

[3] Più che di "uso" bisognerebbe parlare di "usi", dal momento che il condizionale del linguaggio ordinario è ben lungi dall'avere un significato univoco.

(26) quello che probabilmente intendo è:

è possibile che Arabella sia aggressiva con Carlo e Carlo non sia aggressivo con Bianca, (27)

senza che ciò abbia necessariamente implicazioni su quello che *di fatto* accade fra i tre ragazzi. E se sapessi che Arabella è aggressiva con Carlo? Se avessi cioè a disposizione una premessa addizionale che asserisce la verità dell'antecedente? Non potrei forse concludere, se credo che il condizionale (26) sia falso, che allora Carlo non è aggressivo con Bianca? Non necessariamente. Anche se Carlo fosse aggressivo con Bianca, potrebbe non esserci nessuna relazione fra questo fatto e il fatto che Arabella è aggressiva con Carlo, nel qual caso potrei continuare a credere che il condizionale (26) sia falso; cioè che, come espresso dalla (27), la situazione *potrebbe* essere diversa. In altri termini, nell'asserire la falsità del condizionale (26), tutto quello che intendo è che non c'è nessun *nesso* (logico, o psicologico, o di qualunque altra natura) fra l'aggressività di Arabella verso Carlo e quella di Carlo verso Bianca (indipendentemente dalla situazione di fatto).

Se accettiamo l'idea che nel ragionamento ordinario asserire la falsità di un condizionale equivalga a dire "è *possibile* che l'antecedente sia vero e il conseguente falso", *non c'è alcun modo* di trovare regole di eliminazione per il condizionale falso che abbiano la stessa forma di quelle che abbiamo fissato per la congiunzione, la disgiunzione e la negazione. Il contenuto logico dell'espressione "è possibile" non può essere catturato facendo riferimento solo a ciò che è vero o falso in un determinato stato di cose.

C'è una ragione profonda di questa *impasse*. Le parole logiche che abbiamo considerato finora hanno tutte la seguente proprietà:

Proprietà vero-funzionale.

PROPRIETÀ VERO-FUNZIONALE: La verità o la falsità in uno stato di cose S di una proposizione P che contiene una certa parola logica (come parola logica principale) dipende esclusivamente dalla verità o dalla falsità in S dei suoi costituenti immediati.

Per *parola logica principale* di una proposizione intendiamo, in pratica, la parola logica più "esterna". Per esempio, in una proposizione della forma $(P \wedge Q) \vee (R \wedge S)$, la parola logica principale è "$\vee$".

I *costituenti immediati* di una proposizione della forma $P \wedge Q$, $P \vee Q$ o $P \to Q$ sono le proposizioni P e Q. L'unico *costituente immediato* di una proposizione della forma $\neg P$ è la proposizione P.

Per esempio, la verità e la falsità di una congiunzione $P \wedge Q$ dipende esclusivamente dalla verità e dalla falsità di P e Q (la congiunzione è vera quando sono veri entrambi i congiunti e falsa negli altri casi) e un discorso analogo vale per la disgiunzione e la negazione. Le *tavole di verità*, che abbiamo discusso nella Dispensa n. 2, mostrano con chiarezza che queste tre parole logiche soddisfano la proprietà vero-funzionale. Anche la disgiunzione esclusiva "aut" e l'espressione "né...né---" (che abbiamo discusso nelle Dispense 1 e 2) soddisfano questa proprietà, mentre la congiunzione "temporale" descritta nell'Esercizio 9 della dispensa 1 non la soddisfa (perché?).

Possiamo restringere il campo della parole logiche booleane alle parole logiche che soddisfano la proprietà vero-funzionale. Allora, la nostra discussione precedente mostra che il *condizionale ordinario non corrisponde a nessuna parola logica booleana*, dal momento che le conseguenze della sua falsità non possono essere catturate da nessuna regola booleana.

Riferimenti bibliografici