Come ragionare (se proprio dovete) I Elementi di Logica

Marcello D'Agostino

Dispensa 1, Lezioni 1–3

Indice

Introduzione

"Ragionare dobbiamo, e spesso. Di ragionamenti facciamo un uso essenziale ed esplicito quando dobbiamo risolvere problemi importanti, si tratti di problemi pratici relativi a decisioni che influenzano significativamente la nostra vita oppure di problemi teorici che hanno a che vedere con la nostra conoscenza del mondo fisico e sociale".[1] Ciò che accade in questo tipo di situazioni è che cerchiamo di estrarre una risposta alle nostre domande a partire dalle informazioni di cui disponiamo (i "dati" del problema). Il ruolo pervasivo del ragionamento nelle attività umane è diventato forse ancora più evidente negli ultimi decenni, caratterizzati da una graduale ridefinizione di porzioni sempre più ampie della realtà in termini *informazionali*. Luciano Floridi ha introdotto il termine *infosfera* per riferirsi allo "spazio semantico costitutito dalla totalità dei documenti, degli agenti e delle loro operazioni" [2]. Vista l'enorme mole di nuovi documenti che ogni giorni diventano direttamente disponibili grazie ad internet, il problema principale non consiste tanto nella capacità di ottenere informazioni, quanto in quella di *esaminarle criticamente*, per valutarne per esempio la *coerenza*, e di estrarre da esse nuove informazioni che non sono direttamente disponibili.

[1] M. Mondadori and M. D'Agostino. *Logica*. Bruno Mondadori, Milano, 1997

[2] Luciano Floridi. *Infosfera*. Giappichelli, 2009

A grandi linee, dunque, un ragionamento è essenzialmente un processo di *elaborazione delle informazioni* che ci consente di estrarre da informazioni che possediamo eplicitamente altre informazioni che non possediamo esplicitamente. Si tratta di un metodo per estendere e affinare le nostre conoscenze che non richiede ulteriori esperienze o osservazioni. Questa natura del ragionamento è bene espressa da Sherlock Holmes ne *Il Segno dei Quattro*:

> — Ma lei ha parlato proprio adesso di osservazione e di deduzione. Mi sembra che la prima in un certo senso implichi la seconda.
>
> — Perchè? Tutt'altro — replicò Holmes sprofondandosi ancor più comodamente nella poltrona mentre dalla sua pipa uscivano dense volute azzurrognole. — Poniamo un esempio: l'osservazione mi dimostra che lei stamane si è recato all'ufficio postale di Wigmore Street mentre la deduzione mi permette di capire che ha spedito un telegramma.
>
> — È esatto! — ammisi. — Esattissimo. Però confesso che non riesco a capire come sia arrivato a questa conclusione. È stata una decisione improvvisa da parte mia e non ne avevo fatto cenno con nessuno...
>
> — La cosa è di una semplicità elementare — replicò Holmes ridacchiando del mio stupore. - È così ridicolmente semplice che ogni spiegazione è superflua. Tuttavia, potrà servire a definire i limiti tra osservazione e deduzione. L'osservazione mi dice che sulla tomaia della sua scarpa c'è una piccola impronta rossastra. Proprio di fronte all'Ufficio Postale di Wigmore Street hanno buttato all'aria il selciato e rimosso del terriccio in modo che è difficile evitarlo nell'entrare.

> Questo terriccio è di una tinta rossastra inconfondibile e lo si trova, per quel che ne so, solo in quelle parti della città. Questo per quel che riguarda l'osservazione: il resto è deduzione.
>
> —- Come ha fatto a dedurre che io ho spedito un telegramma, mi dica!
>
> - Beh, naturalmente sapevo che lei non aveva scritto nessuna lettera, giacché le sono stato seduto di fronte tutta la mattina. Vedo pure che nel cassetto aperto della sua scrivania c'è un intero foglio di francobolli e un grosso pacco di cartoline. Per quale motivo dunque lei si sarebbe recato all'ufficio postale se non per spedire un telegramma? Eliminato ogni altro fattore quello che resta deve esser il fattore esatto.[3]

[3] Arthur Conan Doyle. Il segno dei quattro. In *L'infallibile Sherlock Holmes*. Mondadori, Milano, 1964

Nel linguaggio ordinario il termine "deduzione" viene usato in modo piuttosto vago per indicare ragionamenti di qualsiasi tipo, inclusi quelli in cui la conclusione è solo una conseguenza "plausibile" o "probabile" dei dati. Noi useremo questo termine in un senso più restrittivo secondo cui una deduzione è un ragionamento la cui conclusione segue *infallibilmente* dalle premesse. Così, molte raffinate "deduzioni" di Sherlock Holmes, le cui conclusioni lasciano stupefatto il candido Watson, appartengono al regno del ragionamento plausibile più che a quello del ragionamento deduttivo vero e proprio. Il paradigma della deduzione, in questo senso stretto, sono le *dimostrazioni matematiche* in cui una certa conclusione (il teorema) viene stabilita in modo indubitabile a partire dagli assiomi della teoria considerata.

Esempio 1 *Gli* Elementi *di Euclide (300 a.c. circa) sono il primo trattato di Geometria della storia e costituiscono il primo esempio dell'uso sistematico della dimostrazione come strumento di organizzazione e di giustificazione della conoscenza matematica. La struttura degli* Elementi *è quella di un sistema assiomatico che, da Euclide in poi, è diventato un modello incontrastato per le teorie matematiche. Gli assiomi (o "postulati") sui quali, secondo Euclide, doveva basarsi l'intera conoscenza conoscenza geometrica erano i seguenti:*[4]

[4] Attilio Frajese and Lamberto Maccioni, editors. *Gli Elementi di Euclide*. UTET, Torino, 1970

> *Risulti postulato:*
>
> I *Che si possa condurre una retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.*
>
> II *E che una retta terminata (= finita) si possa prolungare continuamente in linea retta.*
>
> III *E che si possa descriver un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza (= raggio).*
>
> IV *E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro.*
>
> V *E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (= tali che la loro somma sia minore di due retti), le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti.*

Per spiegare il significato dei termini "punto", "retta", etc. che ricorrono nei cinque postulati Euclide fornì anche una serie di "definizioni" il cui ruolo era quello di dare una descrizione intuitiva degli enti geometrici da cui potesse emergere che i postulati erano "autoevidenti" e non necessitavano perciò di alcuna giustificazione. Per esempio:

- *Un punto è ciò che non ha parti.*
- *Una linea è una lunghezza senza larghezza.*
- *Una retta è una linea che giace ugualmente rispetto ai punti su di essa.*

$\vdots$

- *Dicesi "cerchio" una figura piana delimitata da un'unica linea tale che tutte le rette che terminano su di essa a partire da un determinato punto interno alla figura (= centro) sono uguali fra loro.*

$\vdots$

Euclide si rese conto che, per costruire dimostrazioni completamente rigorose, oltre ai postulati e alle definizioni erano necessarie delle "nozioni comuni" cioè proposizioni evidentemente vere in qualunque teoria, non solo in geometria:

I *Cose che sono uguali alla stessa cosa sono anche uguali l'una all'altra.*

II *Se cose uguali vengono aggiunte a cose uguali, i risultati sono cose uguali.*

III *Se cose uguali vengono sottratte da cose uguali, i risultato sono cose uguali.*

IV *Cose che concidono sono uguali.*

V *Il tutto è maggiore della parte.*

I teoremi *della geometria euclidea non sono altro che tutte le proposizioni che possono essere* dedotte *a partire dai postulati e dalle nozioni comuni.*

Per esempio, nella proposizione 29, Euclide dimostra che gli angoli alterni interni formati da due rette parallele tagliate da una trasversale sono uguali. Il ragionamento è il seguente (Fig. 1): Se gli angoli a e c non fossero uguali fra loro, allora uno di essi sarebbe maggiore. Allora, per le nozioni comuni, la somma degli angoli a e b sarebbe maggiore della somma degli angoli b e c. Ma la somma degli angoli a e b è uguale a 180 gradi (due angoli retti), dunque la somma di b e c sarebbe minore di 180 gradi. Ma allora, per il V postulato, le due rette dovrebbero intersecarsi dalla parte di b e c. Ma questo è impossibile dal momento che si è assunto che le rette siano parallele. Dunque la supposizione che a e c siano diversi non può essere vera, per cui deve essere vero che $a = c$.

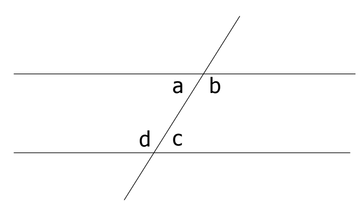

Figura 1: *Elementi*, Proposizione 29: due rette tagliate da una trasversale formano angoli alterni interni uguali.

La Proposizione 29 viene poi utilizzata nella dimostrazione della Proposizione 32 secondo cui "La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti (180 gradi)". Il ragionamento, in questo caso, è il seguente (Fig. 2): considerate la retta che prolunga la base del triangolo e la retta ad essa parallela che passa per il vertice. Le rette che prolungano i due lati tagliano trasversalmente le due parallele. Allora per la proposizione 29 gli angoli alterni interni sono uguali, per cui $a = d$ *e* $c = e$*. Dunque, per le nozioni comuni,* $a + b + c = d + b + e$*. Ma* $d + b + e$ *è uguale a 180 gradi.*

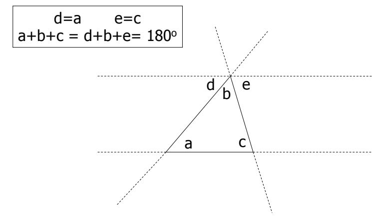

Figura 2: *Elementi*, Proposizione 32: la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due retti.

L'importanza fondamentale del ragionamento deduttivo non è certamente limitata alla matematica, ma si estende a tutte le teorie scientifiche (incluse quelle economiche). Anche nelle scienze empiriche, l'immagine popolare secondo cui le teorie sarebbero, in qualche senso, derivate "direttamente" dall'osservazione e dall'esperienza è del tutto infondata. Galileo, per esempio, sostenne che la terra gira intorno al sole e che la velocità di caduta dei gravi è indipendente dal loro peso, pur essendo consapevole che ciò era *contrario all'opinione comune e all'esperienza ordinaria*, e fornì argomentazioni deduttive molto sofisticate per convincere i suoi contemporanei che l'opinione comune era sbagliata e l'esperienza ordinaria fuorviante. L'argomento con cui Galileo mostra l'infondatezza della teoria aristotelica sulla caduta dei gravi è un brillante esempio di *confutazione*, cioè di un ragionamento in cui si mostra che una certa tesi non può essere vera in quanto da essa, unitamente ad altre tesi accettate, può essere dedotta una contraddizione.

Esempio 2 *Nella prima giornata dei* Discorsi intorno a due nuove scienze *Galileo presenta una celebre confutazione della tesi aristotelica secondo cui la velocità di caduta di un corpo è proporzionale al suo peso. Aristotele, a sua volta, aveva usato questa tesi per confutare la tesi Democritea secondo cui il movimento comporta necessariamente l'esistenza del vuoto:*

> SIMPLICIO*: Aristotele, per quanto mi sovviene, insurge contro alcuni antichi, i quali introducevano il vacuo come necessario per il moto, dicendo che questo senza quello non si potrebbe fare. A questo contrapponendosi Aristotele, dimostra che, all'opposito, il farsi (come veggiamo) il moto distrugge la posizione del vacuo. [...]*

Il punto di partenza di Galileo è la confutazione Aristotelica (esposta da Simplicio e che qui non riproduciamo), la quale poggia, come qualunque argomentazioni, su premesse iniziali che vengono da lui assunte come vere. La riposta di Galileo, per bocca di Salviati, è la seguente:

> SALVIATI: *L'argomento si vede che è* ad hominem, *cioè contro a quelli che volevano il vacuo come necessario per il moto [...] Ma per dire quel che per avventura potrebber rispondere quegli antichi [...] mi par si potrebbe andare contro agli assunti di quello [...] E quanto al primo, io grandemente dubito che*

> *Aristotele non sperimentasse mai quanto sia vero che due pietre, una più grave dell'altra dieci volte, lasciate nel medesimo istante cadere da un'altezza, e.g., di cento braccia, fusser talmente differenti nelle lor velocità che all'arrivo della maggiore in terra, l'altra si trovasse a non avere né anco scese dieci braccia.*

Dunque Galileo dubita *di una delle assunzioni usate da Aristotele nella sua argomentazione contro il vuoto. E sostiene di avere* sperimentato *il contrario:*

> SALVIATI: *Ma io, Sig. Simplicio, che n'ho fatto la prova, vi assicura che una palla d'artiglieria, che pesi cento, dugento e anco più libbre, non anticiperà di un palmo solamente l'arrivo in terra della palla d'un moschetto, che ne pesi una mezza, venendo anco dall'altezza di dugento braccia.*

Figura 3: Galileo Galilei dimostra l'esperienza della caduta dei gravi a Don Giovanni de' Medici. Giuseppe Bezzuoli, 1839. Affresco. Museo di Storia Naturale di Firenze.

Che queste "prove sperimentali" di cui parla Galileo siano state veramente effettuate con l'esito da lui dichiarato è questione storicamente piuttosto dubbia. In effetti, se si lasciano cadere una una piuma e un martello, il secondo cade molto più velocemente della prima, dando apparentemente ragione ad Aristotele! Galileo intuiva che questo effetto dipendeva dalla resistenza del mezzo (in questo caso l'aria), e che quindi in assenza di attrito il martello e la piuma avrebbero toccato terra nello stesso momento, ma non era in grado di produrre una conferma sperimentale di questa intuizione.[5] *Tuttavia riuscì con un ragionamento deduttivo a mostrare che l'assunzione di Aristotele poteva essere* confutata *(cioè dimostrata falsa)* del tutto indipendentemente dall'esperienza*:*

> SALVIATI: *Ma senz'altre esperienze, con breve e concludente dimostrazione possiamo chiaramente provare non esser vero che un mobile più grave si muova più velocemente d'un altro men grave [...]*

[5] Una conferma sperimentale venne ottenuta una dozzina di anni dopo la morte di Galileo da parte di Robert Boyle facendo cadere oggetti di peso diverso in un tubo dal quale era riuscito ad aspirare fuori l'aria. L'esperienza venne riprodotta sulla Luna, in assenza di atmosfera, durante la missione dell'Apollo 15 nel 1971. Guarda il video su http://www.youtube.com/watch?v=xF8hEUKjauY.

> *Però ditemi Signor Simplicio, se voi ammettete che di ciascheduno corpo grave cadente sia una da natura determinata velocità [...]*
> SIMPLICIO: *Non si può dubitare [...]*
> SALVIATI*: Quando dunque noi avessimo due mobili, le naturali velocità dei quali fussero ineguali, è manifesto che se noi congiugnessimo il più tardo col più veloce, questo dal più tardo sarebbe in parte ritardato, ed il tardo in parte velocitato dall'altro più veloce. Non concorrete voi meco in quest'opinione?*
> SIMPLICIO: *Parmi che così debba indubitabilmente seguire.*

Dunque Simplicio accetta *le premesse iniziali da cui muove la confutazione di Salviati. A questo punto Salviati* aggiunge *a queste premesse, che sono accettate da Simplicio, la tesi Aristotelica che vuole confutare:*

> SALVIATI: *Ma se questo è, ed è insieme vero che una pietra grande si muova, per esempio, con otto gradi di velocità, ed una minore con quattro, adunque, congiugnendole amendue insieme, il composto di loro si moverà con velocità minore di otto gradi: ma le due pietre, congiunte insieme, fanno una pietra maggiore che quella prima, che si moveva con otto gradi di velocità: adunque questa maggiore si muove men velocemente che la minore; che è contro alla vostra supposizione. Vedete dunque come dal suppor che 'l mobile più grave si muova più velocemente del men grave, io vi concludo il più grave muoversi men velocemente.*

Questo conclude la confutazione di Galileo-Salviati. Dall'assunzione che i corpi si muovano "per natura" secondo velocità proporzionali al loro peso, insieme ad altre premesse accettate *dal suo aristotelico interlocutore, segue una contraddizione, e cioè che la pietra più pesante dovrebbe, al tempo stesso, muoversi più velocemente e più lentamente di quella più leggera. Dunque Simplicio, se non vuole essere incoerente, non può accettare la verità della tesi Aristotelica.*

Ma il ragionamento deduttivo non è necessario solo nella scienza, è uno strumento indispensabile anche per orientare la nostra *azione pratica*. In qualunque processo decisionale è cruciale essere in grado di valutare attentamente le *conseguenze* delle opzioni che abbiamo a disposizione. Ma tali conseguenze dipendono non solo dalle informazioni che possediamo esplicitamente, ma anche dalla nostra capacità di "estrarre" tutte quelle implicitamente contenute in esse.

Esempio 3 *Supponiamo di avere le seguenti* informazioni iniziali*:*

1. *I consumi aumenteranno solo se diminuisce la pressione fiscale*
2. *O si riduce la spesa pubblica oppure la pressione fiscale non diminuirà.*
3. *Se i consumi non aumentano e non ci sono aiuti europei, l'economia non si riprenderà.*
4. *Se l'economia non si riprende, il paese va in default.*
5. *Se non si riduce la spesa pubblica, non ci saranno aiuti europei.*

In tal caso non è difficile costruire una deduzione in grado di estrarre dalle informazioni iniziali la seguente informazione che è implicitamente contenuta in esse:

Se non si riduce la spesa pubblica, il paese andrà in default. (C)

Un ragionamento potrebbe essere il seguente: assumiamo in via ipotetica *che sia vera la proposizione*

La spesa pubblica non si riduce (*)

A questo punto l'argomentazione può procedere nel modo seguente:

1. *I consumi aumenteranno solo se diminuisce la pressione fiscale (Informazione iniziale)*

2. *O si riduce la spesa pubblica oppure la pressione fiscale non diminuirà (Informazione iniziale)*

3. *Se i consumi non aumentano e non ci sono aiuti europei, l'economia non si riprenderà. (Informazione iniziale)*

4. *Se l'economia non si riprende il paese andrà in default (Informazione iniziale).*

5. *Se non si riduce la spesa pubblica, non ci saranno aiuti europei (informazione iniziale).*

6. *La spesa pubblica non si riduce (Assunzione ipotetica)*

7. *Non ci saranno aiuti europei (da 5 e 6)*

8. *La pressione fiscale non diminuirà (da 2 e 6)*

9. *I consumi non aumenteranno (da 1 e 8)*

10. *L'economia non si riprenderà (da 3, 7 e 9)*

11. *Il paese andrà in default (da 4 e 10).*

Dato che abbiamo assunto in via ipotetica che la spesa pubblica non si riduce e abbiamo dedotto da questa ipotesi che il paese andrà in default, questo ragionamento mostra che (C) *segue logicamente dalle informazioni iniziali 1–5. Dunque se vogliamo sostenere la tesi che si può salvare il paese dal default senza ridurre la spesa pubblica, dobbiamo respingere almeno una delle assunzioni 1-5.*

Come abbiamo visto negli esempi, una deduzione è costituita da diversi "passaggi" nei quali le informazioni iniziali o quelle ottenute in passaggi precedenti, vengono sfruttate per ottenere nuove conclusioni. Questi passaggi deduttivi vengono detti *inferenze*. Ciascuna delle inferenze che compongono la dimostrazione è intuitivamente corretta ed è proprio questo che ci spinge a considerare corretta l'intera deduzione. Ma cosa vuol dire che un'inferenza è corretta? E come facciamo a scoprire che una proposizione è "deducibile" (o, come anche si dice è "implicata" o "segue") dalle informazioni iniziali? E ancora, come facciamo a sapere che le informazioni iniziali sono "coerenti"? Sono domande alle quali la logica cerca di rispondere fin dalla sua nascita "ufficiale" nell'Organon di Aristotele (384-322 a.C.) ed è proprio a queste domande che cercheremo anche noi di rispondere in questo corso entro il quadro concettuale definito della logica moderna, la nuova forma che la logica, dopo Aristotele, ha assunto nei *Grundzüge der theoretischen Logik* (Principi di logica teorica, 1928) di David Hilbert (1862-1943) e Wilhelm Ackermann (1896-1962).

Inferenze e controesempi

La Logica ha a che vedere con quel particolare tipo di attività in cui tutti siamo impegnati quando cerchiamo di risolvere problemi: *inferire conclusioni da premesse date*. Da un punto di vista linguistico, un'inferenza è espressa nella forma di una lista di proposizioni (le premesse) seguite da parole come "dunque", "perciò", "così", ecc. e poi da un'altra proposizione (la conclusione):

premessa 1
premessa 2
⋮
premessa *n*
———
Dunque, **conclusione**

Il problema principale che la Logica si propone di risolvere è il seguente: come facciamo a distinguere le inferenze corrette da quelle scorrette? E che cosa vuol dire che un'inferenza è "corretta"?

Che cos'è un'inferenza corretta?

In quanto parlanti nativi di una lingua naturale, noi tutti possediamo una certa abilità intuitiva che ci consente di riconoscere la correttezza o la scorrettezza di molte *semplici* inferenze.

Ecco una lista di esempi. Provate a dire quali inferenze sono corrette e quali non lo sono affidandovi esclusivamente alla vostra intuizione:

Esempio 4

1) Tweety è un uccello
2) Di solito gli uccelli volano
———
Dunque, Tweety vola

Esempio 5

1) Tweety è un pinguino
2) Di solito i pinguini non volano

Dunque, Tweety non vola

Esempio 6

1) Tweety è un uccello
2) Tutti gli uccelli volano

Dunque, Tweety vola

Esempio 7

1) La Francia confina con l'Austria

Dunque, l'Austria confina con la Francia

Esempio 8

1) Romeo ama Giulietta

Dunque, Giulietta ama Romeo

Esempio 9

1) 2 è maggiore di 5

Dunque, 5 è minore di 2

Esempio 10

1) O Napoleone nacque ad Ajaccio e morì a S. Elena, oppure Napoleone nacque ad Ajaccio e morì nell'isola d'Elba

---

Dunque, Napoleone nacque ad Ajaccio.

Esempio 11

1) Vinci solo se giochi
2) Giochi

Dunque, vinci.

Esempio 12

1) Tutti gli studenti iscritti al corso di Logica per l'anno 2010-2011 hanno meno di 25 anni
2) Camilla ha meno di 25 anni

Dunque, Camilla è iscritta al corso di Logica per l'anno 2010-2011.

Esempio 13

1) Qualcuno in questa classe ha i capelli biondi
2) Qualcuno in questa classe è alto un metro e settanta

Dunque, qualcuno in questa classe ha i capelli biondi ed è alto un metro e settanta.

Confrontate ora le vostre risposte intuitive con le seguenti osservazioni. L'inferenza nell'Esempio 4 sembra, in un certo senso, corretta e lo stesso si può dire dell'inferenza nell'Esempio 5. Tuttavia, le loro conclusioni si contraddicono. Inoltre, è possibile che le loro premesse siano tutte simultaneamente vere, per cui supponiamo di credere che tutte le premesse siano effettivamente vere. Allora, dovremmo anche credere sia che Tweety vola sia che Tweety non vola!

In questo caso particolare, la soluzione del problema è ovvia: in qualche modo, la seconda inferenza ha il sopravvento sulla prima; dunque, dobbiamo ritrattare la prima conclusione e credere che Tweety non vola. In ogni caso, la nozione di inferenza corretta che stiamo applicando a questi due esempi *non* ha la seguente proprietà:

Proprietà di conservazione della verità

> Se tutte le premesse di un'inferenza sono vere, allora è vera anche la sua conclusione.

Infatti, abbiamo visto che le premesse delle inferenze negli Esempi 4 and 5 possono essere tutte simultaneamente vere, mentre soltanto una delle due conclusioni può essere vera. Così è possibile che in una di queste due inferenze le premesse siano vere, ma la conclusione falsa. La proprietà che abbiamo enunciato sopra mira ad escludere proprio questo tipo di situazioni: in un'inferenza corretta *non è possibile* che le premesse siano tutte vere e la conclusione falsa. Possiamo chiamare questa proprietà, *proprietà di conservazione della verità* e chiamare *deduttivamente corretta* un'inferenza che la soddisfa.

Un'esempio di inferenza che conserva la verità è quello dell'Esempio 6: non è possibile che le sue premesse siano vere e la sua conclusione falsa.

Attenzione: quando sosteniamo che un'inferenza è corretta non ci impegniamo a sostenere alcunché circa la verità delle sue premesse o della sua conclusione nel "mondo reale". In realtà, nel mondo reale la seconda premessa dell'inferenza nell'Esempio 6 è *falsa*: non è vero che tutti gli uccelli volano, dato che i pinguini sono uccelli che non volano, e dunque potrebbe esserlo anche la sua conclusione (nel caso in cui Tweety sia un pinguino). Dunque, quando sosteniamo che un'inferenza è corretta non ci impegniamo a sostenere né che le premesse siano vere né che lo sia la sua conclusione.

Per esempio, le seguenti inferenze:

Tutti i calciatori sono filosofi
Rafael Nadal è un calciatore
___
Dunque: Rafael Nadal è un filosofo

è un'inferenza *corretta*, anche se entrambe le sue premesse sono false, così come è falsa la sua conclusione. Dunque *non è necessario che le premesse e la conclusione di un'inferenza corretta siano vere*.

Nel dire che un'inferenza è corretta, quello che sosteniamo è soltanto che

> *se* tutte le sue premesse sono vere, *allora* deve esserlo *necessariamente* anche la sua conclusione.

Questa asserzione può essere riformulata dicendo che

Definizione di inferenza corretta

> Un'inferenza è *corretta* quando *non è possibile* che le premesse siano vere e la conclusione falsa.

Spesso questa definizione di inferenza corretta viene riformulata facendo riferimento al concetto di "mondo possibile" o "stato di cose possibile". Con ciò[6] si intende semplicemente uno fra i vari stati di cose che possono essere descritti mediante un dato linguaggio, di cui solo uno è quello "reale". Per esempio, se il nostro linguaggio comprende i predicati "piove" e "c'è vento", ci sono quattro "mondi possibili" distinti: piove e c'è vento, piove e non c'e vento, non piove e c'è vento, non piove e non c'è vento. Facendo uso di questa idea, si può dire che

> Un'inferenza è *corretta* quando la sua conclusione è vera *in tutti* i mondi possibili *in cui* lo sono le sue premesse.

[6] Il contesto in cui la nozione di mondo possibile si è sviluppata in origine è quello della metafisica leibniziana. In un celebre passo dei *Saggi di teodicea* (1710) di Lebniz, il gran sacerdote Teodoro, preoccupato del destino che Giove aveva assegnato a Sesto Tarquinio, viene condotto dalla dea Pallade in un palazzo con infinite stanze ciascuna delle quali contiene la storia completa di un "mondo possibile". In uno di questi mondi Sesto si reca a Corinto e scopre un tesoro inestimabile, mentre in un altro finisce in Tracia e sposa la figlia del re. Qualunque evento che non sia logicamente contraddittorio si "realizza" in almeno un mondo possibile raccontato in una delle stanze. D'altra parte, fra tutte queste infinite possibilità, solo una, quella corrispondente al "mondo reale", si è effettivamente realizzata.

Così, per tornare all'esempio precedente, considerate un "mondo possibile" in cui è vero sia che tutti i calciatori sono filosofi sia che Rafael Nadal è un calciatore. Allora in questo mondo deve essere necessariamente vero anche che Rafael Nadal è un filosofo.

Dato che il mondo "reale" è solo uno fra i "mondi possibili", *non è neppure sufficiente che le premesse e la conclusione di un'inferenza siano vere* perché l'inferenza in questione risulti corretta. Per esempio, l'inferenza:

Tutti gli uomini sono mortali
Francesco Totti è un calciatore
____
Dunque: Roma è la capitale d'Italia

ovviamente non è un'inferenza corretta, anche se sia le sue premesse sia la sua conclusione sono vere (nel "mondo reale"). Infatti noi possiamo benissimo immaginare un "mondo possibile" (non necessariamente quello "reale") in cui le premesse di questa inferenza sono vere—cioè è vero, come nel mondo reale, che tutti gli uomini sono mortali e che Francesco Totti è un calciatore—mentre la sua conclusione è falsa—cioè, a differenza che nel mondo reale, la capitale d'Italia *non* è Roma, ma qualche altra città.

Definizione di controesempio

> Un mondo possibile in cui tutte le premesse di un'inferenza data sono vere, ma la sua conclusione è falsa, viene detto un *controesempio* a quell'inferenza.

La nozione di inferenza corretta può essere dunque riformulata in termini di quella di controesempio, nel modo seguente:

> Un'inferenza è corretta se e solo se non ammette controesempi.

Ne segue che un'inferenza è scorretta quando essa ammette anche un solo controesempio. Così, per mostrare che un'inferenza è scorretta è sufficiente descrivere un tale controesempio, cioè un mondo possibile in cui le premesse sono vere e la conclusione è falsa.

D'altra parte, mostrare che un'inferenza è corretta è, in generale, molto più complicato: bisogna considerare un "arbitrario" mondo possibile in cui le premesse sono vere e produrre un'argomentazione che consenta di concludere che in un mondo di questo tipo anche la conclusione deve essere vera. In altri termini, bisogna mostrare che *non esistono* controesempi.

È intuitivamente chiaro che *non* c'è un mondo possibile in cui tutti gli uccelli volano, Tweety è un uccello e, tuttavia, Tweety non vola. Dunque, l'inferenza nell'Esempio 6 sembra non ammettere controesempi, cioè in tutti i mondi possibili in cui è vero che tutti gli uccelli volano ed è vero che Tweety è un uccello, deve anche essere vero che Tweety vola. Ma perché?

Regole di inferenza

Considerate di nuovo l'inferenza dell'esempio 6:

1) *Tutti gli uccelli volano*
2) *Tweety è un uccello*

Dunque, Tweety vola.

Se sostituite la parola "uccelli" con un qualsiasi sostantivo plurale, la parola "volano" con un qualsiasi verbo intransitivo, e la parola "Tweety" con un qualsiasi nome proprio, otterrete ancora un'inferenza corretta. Per esempio, se sostituite "uccelli" con "delfini", "volano" con "sono mammiferi" e "Tweety" con "Willie", otterrete l'inferenza corretta

1) *Tutti i delfini sono mammiferi*
2) *Willie è un delfino*

Dunque, Willie è un mammifero.

Invece, se sostituite la parola "tutti" con un'altra parola che appartiene alla stessa categoria grammaticale, non sempre otterrete un'inferenza corretta. Provate, per esempio, a sostituire "tutti" con "alcuni", e otterrete l'inferenza:

1) *Alcuni uccelli volano*
2) *Tweety è un uccello*

Dunque, Tweety vola

che è ovviamente scorretta.

Dunque, la correttezza dell'inferenza nell'Esempio 3 dipende esclusivamente dal *significato* della parola "tutti" e non dipende in alcun modo dal significato della altre parole che ricorrono in essa. Questo fornisce anche una risposta alla domanda con cui abbiamo concluso il paragrafo precendente. Il motivo per cui riconosciamo che la conclusione deve essere vera in tutti i mondi possibili in cui sono vere le premesse è il fatto che, se non fosse così—se fosse cioè possibile un mondo in cui "tutti gli uccelli volano" e "Tweety è un uccello", mentre "Tweety vola" è una proposizione falsa—ciò significherebbe che la parola "tutti" non viene usata nel suo significato abituale. Se il significato di "tutti" è invece quello abituale, un mondo del genere non è pensabile.

Allora se, sempre nell'inferenza dell'Esempio 6, sostituite tutte le parole che sono irrilevanti per la sua correttezza con espressioni schematiche: per esempio "uccelli" con "*A*", "volano" con "sono *B*" e "Tweety" con "*t*". Quello che ottenete è ciò che si dice uno *schema di inferenza* o una *regola di inferenza*:

Schema o regola di inferenza

1) *Tutti gli A sono B*
2) *t è A*
___
Dunque, t è B.

Tutte le inferenze che risultano da questo schema sostituendo "*A*" con un nome comune, "sono *B*" con un verbo intransitivo e "*t*" con un nome proprio, sono corrette. Una *regola di inferenza* è *corretta* quando sono corrette tutte le singole inferenze che essa esemplifica.

Considerate ora l'inferenza nell'Esempio 7 :

1) *La Francia confina con l'Austria*
___
Dunque, l'Austria confina con la Francia.

Essa sembra corretta nello stesso senso dell'inferenza dell'esempio 6: la sua conclusione non può non essere vera *se* le sue premesse sono vere (in realtà la premessa è falsa, ma, come abbiamo visto, la correttezza di un'inferenza non ha nulla a che vedere con la verità o la falsità *fattuale* delle sue premesse). La regola di inferenza corretta che è esemplificata dall'inferenza dell'esempio 7 è la seguente:

1) *t confina con s*
___
Dunque, s confina con t,

dove "*t*" e "*s*" stanno al posto di nomi di paesi.

Nello stesso senso in cui si può dire che la correttezza dell'inferenza nell'Esempio 6 dipende solo dal significato della parola "tutti", possiamo dire che la correttezza di quella nell'Esempio 7 dipende solo dal significato della parola "confina".

Parole logiche

La differenza fra le regole corrispondenti alle inferenze negli esempi 6 e 7 sembra essere solo nel grado di generalità: il campo di applicabilità della seconda è molto più ristretto di quello della prima. In Logica siamo interessati a caratterizzare l'insieme delle regole di inferenza il cui campo di applicabilità è, in un certo senso, *massimale*. Siamo perciò interessati a regole di inferenza che riguardano parole come "tutti" e non a quelle che riguardano parole come "confina". Parole come "tutti", che forniscono regole di inferenza di generalità massimale, sono dette *parole logiche* o anche *costanti logiche*. Mentre le altre parole, come per esempio "confina", sono dette *extra-logiche* o *descrittive*.[7]

Una parola logica è dunque una parola dal cui significato dipende la correttezza di un'ampia classe di inferenze. Un'esperienza di secoli ha portato a individuare le seguenti parole come parole logiche:

1. *e* (la congiunzione)
2. *oppure* (la disgiunzione)
3. *non* (la negazione)
4. *se...*, *allora* --- (il condizionale)
5. *tutti* (la generalizzazione universale)
6. *alcuni* (la generalizzazione esistenziale)

Le parole logiche 1–4 sono dette *parole logiche booleane* (o *costanti booleane*, o *connettivi booleani*, o anche *operatori booleani*) e il ramo della logica che tratta di queste parole logiche è detto *Logica Booleana* (o *Logica delle Proposizioni*, o *Logica Proposizionale*). Le parole logiche 5 e 6 sono dette *parole logiche quantificazionali* (o *operatori quantificazionali*) e il ramo della logica che tratta di esse è detto *Logica della Quantificazione* (o *Logica dei Predicati*, o anche *Logica del Primo Ordine*).

[7] Questa distinzione risale al matematico e filosofo tedesco Bernhard Bolzano (1781-1848) e allla sua celebre *Wissenschaftslhere* (Teoria della scienza, 1837). Esiste un criterio generale per stabilire se una data parola è una parola logica o extra-logica? Fu Alfred Tarski (1902–1983) a sollevare la questione: "Alla base di tutta la nostra costruzione vi è la suddivisione di tutti i termini del linguaggio che abbiamo discusso in logici e extralogici. Questa suddivisione certamente non è del tutto arbitaria. [...] D'altra parte non mi è noto alcun fondamento oggettivo che ci permetta di tracciare una netta distinzione fra questi due gruppi di termini." (A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford University Press, Oxford 1956, pp. 419–420.) Un approccio ragionevole è quello secondo cui le parole logiche sono parole che non hanno alcun contenuto descrittivo e il cui significato è interamente determinato dal ruolo che esse svolgono nel collegare fra loro le proposizioni che ricorrono in un'argomentazione. Si veda a questo proposito L.T.F. Gamut, *Logic, Language and Meaning*, vol. I, *Introduction to Logic*, The University of Chicago Press, Chicago 1991.

Discussione degli esempi 5–10

Considerate l'inferenza nell'Esempio 8:

Romeo ama Giulietta

Dunque, Giulietta ama Romeo.

Si tratta chiaramente di un'inferenza scorretta, anche se sia la sua premessa sia la sua conclusione sono vere. Si può infatti concepire benissimo un mondo in cui Romeo ama Giulietta senza essere ricambiato! Infatti, la regola di inferenza che generalizza questa inferenza, e cioè:

t ama s

Dunque, s ama t

non è corretta: sappiamo tutti che è possibile costruire esempi di questa regole (sostituendo "*t*"e "*s*" con opportuni nomi propri) in cui la premessa è vera e la conclusione è falsa.

L'inferenza nell'Esempio 9, e cioè:

1) *2 è maggiore di 5*

Dunque, 5 è minore di 2.

è dello stesso tipo dell'inferenza nell'Esempio 7: la sua correttezza dipende dal significato di parole extra-logiche come "maggiore di" e "minore di". Ovviamente, sia la sua premessa sia la sua conclusione sono false.

L'inferenza nell'Esempio 10

1) *O Napoleone nacque ad Ajaccio e morì a S. Elena, oppure Napoleone nacque ad Ajaccio e morì nell'isola d'Elba.*

Dunque, Napoleone nacque ad Ajaccio.

sembra corretta. Considerate un mondo (per esempio il nostro) in cui la premessa è di fatto vera. In questo mondo deve valere almeno una delle due alternative descritte dalla premessa. Ma in entrambi i casi, ne segue che Napoleone nacque ad Ajaccio. Dunque, se la premessa è vera, deve essere vero che Napoleone nacque ad Ajaccio. Da quali parole logiche dipende la correttezza di questa inferenza? In questo caso le parole cruciali sono "e" e "oppure". In primo luogo, elencate le proposizioni "semplici" che compaiono nella premessa:

Napoleone nacque ad Ajaccio
Napoleone morì a S. Elena
Napoleone morì nell'Isola d'Elba

Poi osservate che, se sostituite nella premessa queste proposizioni con altre a vostra scelta, ottenete sempre un'inferenza corretta. Ciò implica la correttezza della seguente regola schematica:

1) (P *e* Q) *oppure* (P *e* R)

Dunque, P

dove "P", "Q" e "R" sono lettere schematiche che stanno proposizioni arbitrarie.

L'inferenza nell'Esempio 11

1) *Vinci solo se giochi*
2) *Giochi*

Dunque, vinci

è chiaramente scorretta. Basta osservare che ci possono certamente essere mondi in cui le premesse sono entrambe vere e la conclusione è falsa: anzi, nella maggior parte dei casi giochiamo e non vinciamo, anche se è vero che non si può vincere senza giocare, cioèche giocare è una condizione necessaria per vincere.

Dunque la corrispondente regola di inferenza:

1) *P solo se Q*
2) *Q*

Dunque, P

non è corretta.

L'inferenza nell'esempio 12

1) *Tutti gli studenti iscritti al corso di Logica per l'anno 2010–2011 hanno meno di 25 anni*
2) *Camilla ha meno di 25 anni*

Dunque, Camilla è iscritta al corso di Logica per l'anno 2010-2011

non è corretta. E' facile immaginare un mondo in cui tutti gli studenti iscritti al corso di Logica di quest'anno hanno meno di 25 anni (e dunque la premessa 1 è vera), Camilla ha meno di 25 anni (per cui la premessa 2 è vera), ma Camilla non è iscritta al corso di Logica di quest'anno.

Lo stesso vale per l'inferenza nell'Esempio 13

1) *Qualcuno in questa classe ha i capelli biondi*
2) *Qualcuno in questa classe è alto un metro e settanta*

Dunque, qualcuno in questa classe ha i capelli biondi ed è alto un metro e settanta.

Sebbene sia di fatto vero che in questa classe qualcuno è biondo, qualcuno è alto 1.70 e qualcuno è sia biondo sia alto 1.70 (dunque sia le premesse sia la conclusione sono vere nel mondo "reale") è del tutto concepibile un mondo in cui le premesse sono vere e la conclusione falsa.

Esercizio 1 *Quando si dice che un'inferenza è corretta?*

Esercizio 2 *In un'inferenza corretta è possibile che una o più premesse siano false e che anche la conclusione sia falsa?*

Esercizio 3 *In un'inferenza corretta è possibile che una o più premesse siano false e la conclusione sia vera?*

Esercizio 4 *Un'inferenza in cui tutte le premesse sono vere e la conclusione è anch'essa vera, può essere scorretta?*

Esercizio 5 *Vi viene data un'inferenza e vi viene detto che tutte le premesse sono vere e che lo è anche la conclusione. E' ciò sufficiente a concludere che si tratta di un'inferenza corretta?*

Esercizio 6 *Supponiamo che le proposizioni "Claudia è nata il 31 luglio" e "Giuseppe è nato il 18 novembre" siano entrambe vere. In tal caso l'inferenza seguente è corretta?*

1) Claudia è nata il 31 luglio

Dunque, Giuseppe è nato il 18 novembre

Due teorie del significato

Come facciamo a scoprire se un'inferenza è corretta quando non siamo in grado di percepire la loro correttezza, come spesso accade quando si tratta di inferenza meno semplici di quelle considerate fin qui? A questo stadio, sappiamo quando un'inferenza è corretta (vedi sopra la definizione di inferenza corretta), ma non siamo ancora in grado di applicare la nostra definizione per riconoscere la correttezza di inferenze arbitrarie. Dunque, anche se sappiamo che cos'è un'inferenza corretta, non abbiamo ancora un *metodo* che ci consenta di riconoscere le inferenze *corrette*, anche se ne abbiamo uno (quello del controesempio) che ci consente di riconoscere quelle *scorrette*.

Cosa facciamo, in pratica, quando non siamo più in grado di percepire intuitivamente che una certa conclusione segue logicamente da un certo insieme di premesse? Di solito cerchiamo di *dedurre* la conclusione a partire dalle premesse, mediante passaggi che siano *ovviamente* corretti, cerchiamo cioè di "decomporre" l'inferenza originaria in una successione di inferenze la cui correttezza sia *intuitivamente ovvia*.

Per esempio, considerate la seguente inferenza:

1) *Camilla è aggressiva con tutti quelli che non sono aggressivi con lei*
2) *È falso che Camilla sia aggressiva sia con Dino sia con Arabella*
3) *Dino non è aggressivo con Camilla*

Dunque, Camilla non è aggressiva con Arabella.

Può non essere intuitivamente ovvio per tutti, a prima vista, se questa sia o meno un'inferenza corretta. Così per convincere noi stessi e gli altri che lo è possiamo provare a dedurre la sua conclusione dalle sue premesse, mediante una successione di passaggi la cui correttezza può essere riconosciuta immediatamente. Un esempio di una simile deduzione può essere il seguente:

4) *Camilla è aggressiva con Dino*	segue dalle premesse 1 e 3
5) *Camilla non è aggressiva con Arabella*	segue dalla premessa 2 e dalla conclusione intermedia 4

In questo caso, relativamente semplice, ce la siamo cavata con due passaggi la cui correttezza è intuitivamente riconoscibile. Ma, nei casi più complessi, possono essere necessarie anche un numero molto elevato di conclusioni intermedie.

Se riusciamo a raggiungere, dopo una successione di passaggi di questo tipo, la conclusione desiderata abbiamo stabilito che l'inferenza dalle premesse alla conclusione è corretta, ma se non ci riusciamo possiamo cercare di dimostrare che l'inferenza non è corretta costruendo un controesempio, ossia descrivendo un mondo possibile in cui le premesse sono vere e la conclusione è falsa.

Abbiamo sostenuto che la correttezza di un'inferenza dipende esclusivamente dal *significato* delle parole logiche che ricorrono in essa. Dunque, al fine di identificare regole di inferenza corrette, dobbiamo per prima cosa fissare in modo chiaro questo significato. Ci sono vari modi di definire il significato di una parola, ma quello più comune consiste nel definirlo mostrando come la parola in questione viene *usata* in pratica. Dato che le parole logiche vengono usate nelle inferenze, un modo di definirne il significato consiste nell'identificare, per ciascuna di esse, un insieme di *regole di inferenza di base* la cui correttezza viene assunta come un'*esplicazione* del significato stesso della parola logica in questione. Perché un insieme X di regole possa svolgere questo ruolo dovrebbe avere almeno tre caratteristiche fondamentali:

1. la correttezza di ciascuna regola in X dovrebbe essere *intuitivamente ovvia*;

2. ciascuna delle regole in X dovrebbe fare riferimento *solo* alla parola logica il cui significato contribuisce a definire (perchè?)

3. ciascuna delle regole in X dovrebbe essere talmente semplice da giustificare la tesi che chi non ne riconosce la correttezza attribuisce alla parola logica in questione un significato *diverso* da quello inteso.

L'idea sottostante è che, se questa "definizione operativa" delle parole logiche viene svolta in modo corretto—dal momento che la correttezza di un inferenza *arbitraria* dipende solo dal significato delle parole logiche—dovrebbe essere possibile dedurre la sua conclusione dalle sue premesse applicando *solo* le regole di base che definiscono il significato delle parole logiche.

Nei paragrafi seguenti esploreremo due teorie alternative del significato delle parole logiche e le applicheremo, in prima istanza, alla congiunzione ("e"), alla disgiunzione ("oppure") e a alla negazione ("non"), rinviando per il momento la discussione del condizionale ("se ... allora ---") il cui significato è stato sempre oggetto di accese controversie.

La prima teoria del significato

Quale deve essere la forma delle regole di inferenza? Un modo di rispondere a questa domanda consiste nell'assumere la seguente *teoria del significato* che chiameremo *teoria consequenzialista*:

> Il significato di una parola logica è definito da regole di inferenza che specificano le conseguenze immediate della verità e della falsità di proposizioni che contengono quella parola logica.

Teoria consequenzialista del significato delle parole logiche

Esploriamo ora le implicazioni di questa teoria riguardo al significato della congiunzione "e". Quali sono le conseguenze immediate della *verità* di una proposizione della forma "*P e Q*"? In altre parole, che cosa segue dal fatto che una proposizione della forma"*P e Q*" è *vera*?

Teoria consequenzialista: il significato della congiunzione

La risposta è ovvia, proprio come dovrebbe essere: segue che sono vere sia la proposizione "*P*" sia la proposizione "*Q*". Questo implica che fra le regole di inferenza che definiscono il significato della congiunzione "*e*" dobbiamo includere le seguenti:

$$\frac{\text{È vero che } P \text{ } e \text{ } Q}{\text{È vero che } P} \qquad\qquad \frac{\text{È vero che } P \text{ } e \text{ } Q}{\text{È vero che } Q}$$

Eliminazione della congiunzione vera

Secondo la teoria consequenzialista, per comprendere il significato di "e" dobbiamo necessariamente riconoscere la correttezza delle due regole qui sopra.

E quali sono invece le conseguenze immediate della *falsità* di una proposizione della forma "*P e Q*"? Ovvero, che cosa segue dal fatto che una proposizione della forma "*P e Q*" è *falsa*?

Consideriamo, per esempio, la proposizione "Napoleone nacque ad Ajaccio e morì nell'Isola d'Elba". Supponiamo di venire a sapere che è falsa (come effettivamente è). Poiché asserire che una congiunzione è vera significa asserire che entrambi i congiunti sono veri, asserire che è falsa significa asserire che almeno uno dei due congiunti è una proposizione falsa. Ma quale? Senza informazioni ulteriori non siamo in grado di inferire nessuna conclusione. Ma supponiamo di sapere che Napoleone nacque ad Ajaccio (che è vero). Possiamo allora inferire che è falso che Napoleone morì nell'Isola d'Elba.

Questo implica che fra le regole che definiscono il significato di "e" dobbiamo includere le seguenti:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{È falso che } P \text{ } e \text{ } Q\\ \text{È vero che } P\end{array}}{\text{È falso che } Q} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{l}\text{È falso che } P \text{ } e \text{ } Q\\ \text{È vero che } Q\end{array}}{\text{È falso che } P}$$

Eliminazione della congiunzione falsa

Secondo la teoria consequenzialista per afferrare il significato della parola logica "e" è necessario e sufficiente riconoscere la correttezza di tutte le inferenze che esemplificano le quattro regole che abbiamo dato sopra. Le chiameremo *regole di eliminazione per la congiunzio-*

ne. "Eliminazione" perché la parola logica "e" ricorre in una delle premesse, ma non ricorre nella conclusione.

Esercizio 7 *Quali conclusioni si possono ottenere applicando le regole pertinenti per la congiunzione alle premesse seguenti?*

1) È vero 3 > 2 e 2 > 1
2) È vero che Napoleone fu sconfitto a Trafalgar e morì a S. Elena
3) È vero che Venezia è più ad est di Palermo e che New York è più a nord di Napoli.

Esercizio 8 *Che conclusioni si possono ottenere applicando le regole pertinenti per la congiunzione alle seguenti coppie di premesse?*

1.1) È falso che Napoleone morì a S. Elena e fu sconfitto a Trafalgar
1.2) È vero che Napoleone morì a S. Elena.

2.1) È falso che Venezia è più ad est di Palermo e New York è più a nord di Napoli.
2.2) È vero che New York è più a nord di Napoli.

Esercizio 9 *C'è un uso piuttosto comune di "e" nel linguaggio ordinario che non può essere espresso in termini del tipo di congiunzione definita dalle nostre regole. Consideriamo, per esempio, la proposizione "Michele si è laureato e ha avuto un posto alla FIAT". Quello che di solito intendiamo con questa proposizione è non solo che i due eventi "Michele si è laureato" e "Michele ha avuto un posto alla FIAT" si sono entrambi verificati, ma anche che si sono verificati nell'ordine specificato, e precisamente che il primo evento è accaduto prima del secondo. Così, se nel contesto dato l'ordine è rilevante, le regole che abbiamo dato per la congiunzione non sono tutte corrette. Potete spiegare perché? Quali regole sono scorrette se si assume l'interpretazione temporale di "e"?*

Teoria consequenzialista: il significato della disgiunzione

Rivolgiamo ora la nostra attenzione alla parola logica "oppure". Supponiamo di venire a sapere che una proposizione della forma "*P* oppure *Q*" è vera, per esempio "Napoleone morì a S. Elena oppure nell'Isola d'Elba". Nessuna conclusione definita segue immediatamente da questa informazione, poiché "*P* oppure *Q*" significa solo che *almeno una* delle proposizioni *P* e *Q* deve essere vera. Supponiamo, tuttavia, di venire a sapere anche che è falso che Napoleone morì nell'Isola d'Elba. In tal caso siamo autorizzati a concludere che Napoleone morì a S. Elena.

Così, secondo la teoria consequenzialista del significato, fra le regole che definiscono il significato della parola "oppure", devono esservi le seguenti:

È vero che *P oppure Q* È falso che *P* ——————— È vero che *Q*	È vero che *P oppure Q* È falso che *Q* ——————— È vero che *P*

Eliminazione della disgiunzione vera

Supponiamo ora di venire a sapere che una proposizione della forma "*P* oppure *Q*" è falsa.

Questo significa che non è vero che almeno una delle due proposizioni *P* e *Q* è vera: dunque devono essere entrambe false. Così, le conseguenze immediate della falsità di "*P* oppure *Q*" sono "È falso che *P*" e "È falso che *Q*". Pertanto, secondo la teoria consequenzialitsta del significato, le seguenti regole devono anch'esse far parte della definizione del significato di "oppure":

È falso che *P oppure Q* ——————— È falso che *P*	È falso che *P oppure Q* ——————— È falso che *Q*

Eliminazione della disgiunzione falsa

Esercizio 10 *Il significato che le nostre regole conferiscono alla parola "oppure" è il cosiddetto significato inclusivo, secondo cui una proposizione della forma "P oppure Q" è vera se e solo se o P è vera o Q è vera, oppure sono vere entrambe. Tuttavia, la parola "oppure" viene spesso usata nel suo significato esclusivo, secondo cui "P oppure Q" è vera se e solo se o P è vera o Q è vera, ma non lo sono entrambe. Se intendiamo "oppure" nel suo significato esclusivo, quali delle regole precedenti cessa di essere valida? E quali regole dovrebbero rimpiazzarle?*

Consideriamo ora la parola "non". Scriviamo "non-P" per rappresentare la negazione della proposizione *P*. Così, se *P* è "Napoleone morì nell'Isola d'Elba", non-*P* è "Napoleone *non* morì nell'Isola d'Elba", e se *P* è "tutti gli uccelli volano", non-*P* è *non* tutti gli uccelli volano".

Teoria consequenzialista: il significato della negazione

Chiediamoci in primo luogo cosa segue dalla *verità* di una proposizione della forma "non-P". Ovviamente segue che la proposizione *P* è *falsa*. E che cosa segue invece dalla *falsità* di una proposizione della forma "non-P"? Ovviamente che la proposizione *P* è vera.

Così, secondo la teoria consequenzialista del significato, il significato di "non" risulta completamente definito dalle due regole seguenti:

È vero che *non-P* ——————— È falso che *P*	È falso che *non-P* ——————— È vero che *P*

Eliminazione della negazione vera e della negazione falsa

Secondo la teoria consequenzialista, come nel caso di "e", per comprendere il significato delle parole logiche "oppure" e "non" è necessario è sufficiente riconoscere la correttezza delle regole di eliminazione che abbiamo discusso.

Esercizio 11 *Date un altro esempio di un'inferenza che esemplifichi la prima regola della negazione.*

Esercizio 12 *Supponete di credere che la proposizione "Verdi non è l'autore de L'Aida" sia vera. Quale conclusione potete ottenere applicando la pertinente regola della negazione a questa proposizione?*

Esercizio 13 *Quale conclusione si ottiene applicando la pertinente regola della negazione alla proposizione "È falso che lo spin di un elettrone sia $\frac{1}{2}$"? Qual è l'inferenza corrispondente?*

Esercizio 14 *Cercate di formulare regole di significato in accordo con la teoria consequenzialista per la parola logica "né ... né ---".*

Esercizio 15 *Cercate di dare una definizione di "né P né Q" in termini di congiunzione e negazione.*

Esercizio 16 *Sia "*aut*" la disgiunzione esclusiva discussa nell'Esercizio 10. Cercate di definire "P* aut *Q" in termini di disgiunzione inclusiva ("oppure") di congiunzione e negazione.*

La seconda teoria del significato

La teoria consequenzialista non è la sola teoria possibile riguardo al significato delle parole logiche. Un'altra teoria ben nota è la teoria *vero-condizionale*, secondo cui il significato di una parola logica è identificato dalle *condizioni*, invece che dalle conseguenze, della verità o della falsità di una proposizione che contiene quella parola logica.

Non ci chiediamo più che cosa deve accadere *se* una proposizione della forma logica appropriata è vera o falsa, ma piuttosto che cosa deve accadere *perché* una proposizione del genere sia vera o falsa. Mentre per la teoria consequenzialista questa proposizione deve svolgere il ruolo di premessa e la conclusione deve specificare una delle sue *conseguenze immediate*, per la teoria vero-funzionale essa deve svolgere il ruolo di conclusione e le premesse devono specificare le *condizioni* sufficienti per asserire, rispettivamente, la sua verità o la sua falsità.

Teoria vero-funzionale: il significato della congiunzione

Vediamo come si comporta la teoria vero-funzionale riguardo al significato della *congiunzione*. Dobbiamo chiederci, in primo luogo, in quali condizioni possiamo asserire che una proposizione della forma "*P* e *Q*" è *vera*. Di nuovo: la risposta è ovvia (proprio come dovrebbe) e questa domanda ci conduce immediatamente alla seguente regola basata sulla teoria vero-funzionale:

È vero che P
È vero che Q
È vero che P *e* Q

Introduzione della congiunzione vera

In secondo luogo, dobbiamo chiederci in quali condizioni "P e Q" risulta *falsa*. Dato che se una congiunzione è vera devono essere veri entrambi i congiunti, la falsità di uno qualunque di essi implica la falsità dell'intera congiunzione. Dunque la seconda e la terza regola di significato per "e" sono le seguenti:

È falso che P	È falso che Q
È falso che P *e* Q	È falso che P *e* Q

Introduzione della congiunzione falsa

Vediamo ora come si comporta la disgiunzione. In quali condizioni è *vera* una proposizione della forma "P oppure Q"? La risposta è sempre quella ovvia: quando *almeno una* delle due proposizioni disgiunte è vera. Così la teoria vero-funzionale conduce alle seguenti regole:

Teoria vero-funzionale: il significato della disgiunzione

È vero che P	È vero che Q
È vero che P *oppure* Q	È vero che P *oppure* Q

Introduzione della disgiunzione vera

Chiediamoci poi in quali condizioni una proposizione della forma "P oppure Q" risulta *falsa*. Dato che "P oppure Q" è vera quando almeno una delle proposizioni disgiunte è vera, per poter asserire che "P oppure Q" è falsa dobbiamo essere in grado di asserire che P e Q sono *entrambe false*. Dunque l'ultima regola per la disgiunzione suggerita dalla teoria vero-funzionale è la seguente:

È falso che P
È falso che Q
È falso che P *oppure* Q

Introduzione della disgiunzione falsa

Le seguenti regole, infine, determinano le condizioni della verità e della falsità di proposizioni della forma "non-P":

Teoria vero-funzinale: il significato della negazione

È vero che P	È falso che P
È falso che *non-P*	È vero che *non-P*

Introduzione della negazione vera e della negazione falsa

Così come abbiamo chiamato *regole di eliminazione* le regole basate sulla teoria consequenzialista, chiamiamo *regole di introduzione* quelle basate sulla teoria vero-funzionale. Infatti mentre nelle regole di eliminazione la parola logica in questione viene "eliminata" (compare in una delle premesse e non compare più nella conclusione), nelle regole di introduzione essa viene "introdotta" (non compare nelle premesse e compare nella conclusione).

Esercizio 17 *Cercate di dare regole di significato che siano in accordo con la teoria vero-condizionale per "né ... né ---" e per la disgiunzione esclusiva.*

Esercizio 18 *Considerate l'esercizio 9 sopra. Le regole vero-condizionali per "e" sono in accordo con il significato "temporale" della congiunzione? In caso contrario, quali regole devono essere respinte?*

Abbiamo visto come la teoria consequenzialista e quella vero-funzionale forniscano definizioni alternative del significato delle parole logiche. Ma in che senso le regole di eliminazione per un operatore logico ne "definiscono" il significato?

Quando vogliamo definire il significato di una parola normalmente ricorriamo a una *definizione di dizionario*. Una definizione del genere dà il significato di una parola offrendone un *sinonimo*. Così, se la parola in questione è per esempio "tigre" e dobbiamo spiegarne il significato a un bambino di tre anni, probabilmente diremmo qualcosa come "assomiglia a un grosso gatto con il pelo a strisce, ma è molto feroce e vive in India". Naturalmente, questa definizione potrebbe essere migliorata ricorrendo davvero a un dizionario. Ma non è questo il punto. Ogni definizione di dizionario spiega il significato di una parola ricorrendo ad altre parole e dunque la sua efficacia implica la conoscenza del significato delle parole utilizzate nella definizione stessa. Per esempio, la precedente definizione sarebbe poco efficace per chi non conoscesse il significato della parola "gatto". Così, le definizioni di dizionario non possono essere l'unico metodo per spiegare il significato delle parole.

Esiste in effetti una vasta classe di parole, quelle che fanno riferimento a oggetti fisici della nostra esperienza quotidiana, per cui è disponibile un metodo di definizione alternativo, detto della *definizione ostensiva*. Esso consiste nell'indicare in circostanze appropriate uno degli oggetti cui si applica la parola di cui dobbiamo spiegare il significato profferendone il nome. Così, tornando a "tigre", invece di darne una spiegazione verbale, potremmo portare il bambino allo zoo, condurlo davanti alla gabbia delle tigri e indicargliene una dicendo "quella è una tigre". Gli avremmo in tal modo dato una definizione ostensiva della parola "tigre".

Le definizioni che abbiamo dato del significato della negazione, della congiunzione e della disgiunzione svolgono rispetto a concetti "astratti", come quelli espressi dalle parole logiche, un ruolo analogo a quello svolto dalle definizioni ostensive rispetto a oggetti "concreti" della nostra esperienza quotidiana. Come le definizioni ostensive, esse sono un "procedimento mediante il quale si insegna a una persona a capire una parola con un metodo che non consiste nell'uso di altre parole"[8]. Nel caso delle parole logiche, il nostro metodo è basato sull'ipotesi che il contesto che conferisce alle parole logiche il loro significato è quello dell'inferenza. Naturalmente, il significato delle parole logiche può anche essere definito con il metodo delle definizioni di dizionario, ma questo presuppone che sia già noto il significato di qualcuna di esse. Prendiamo per esempio la parola logica "né ... né ---" e supponiamo di doverne spiegare il significato a una persona che conosce quello della congiunzione e della negazione. Non è allora difficile dargliene una definizione di dizionario basata su di esse. Se tuttavia non potete assumere questa conoscenza da parte del vostro interlocutore, non vi resterà che ricorrere a una definizione di "né ... né ---" basata su regole di inferenza.

[8] B. Russell. *La conoscenza umana*. Longanesi, Milano, 1978. Trad. it. di *Human Knowledge. Its Scope and Limits*, London 1948

Non è però vero che le definizioni delle parole logiche basate su regole di inferenza e le definizioni ostensive non presuppongano nessuna conoscenza del linguaggio cui sono riferite. Le prime presuppongono almeno una padronanza delle nozioni di vero e di falso e una familiarità con la pratica dell'inferire. Per le seconde valgono le osservazioni di Wittgenstein:

> Si può definire ostensivamente il nome di una persona, il nome di un colore, di una sostanza, di un numero, il nome di un punto cardinale, eccetera. La definizione del numero due: "questo si chiama '2"'—e così dicendo si indicano due noci—è perfettamente esatta. —Ma come è possibile definire il due in questo modo? Colui al quale si dà la definizione non sa che cosa si voglia denominare con 'due'; supporrà che 'due' denomini questo gruppo di noci! [...] Può supporlo; ma forse non lo suppone. Al contrario, se voglio attribuire un nome a questo gruppo di noci, potrebbe anche scambiarlo per un numerale. E allo stesso modo colui al quale dò una definizione ostensiva del nome di una persona potrebbe interpretarlo come il nome di colore, di una razza, o persino di un punto cardinale. Ciò vuol dire che la definizione ostensiva può in ogni caso essere interpretata in diversi modi. [...] Forse si dice: il due può essere definito ostensivamente soltanto così: "Questo numero si chiama '2"'. [...] Ma questo vuol dire che la parola 'numero' deve essere già stata definita prima che quella definizione ostensiva possa essere compresa."[9]

[9] L. Wittgenstein. *Ricerche filosofiche*. Einaudi, Torino, 1967. Trad. it. di *Philosophische Untersuchungen*, 1953

Sulle definizioni ostensive si veda anche B. Russell, *La conoscenza umana*, cit.

Riferimenti bibliografici

Arthur Conan Doyle. Il segno dei quattro. In *L'infallibile Sherlock Holmes*. Mondadori, Milano, 1964.

Luciano Floridi. *Infosfera*. Giappichelli, 2009.

Attilio Frajese and Lamberto Maccioni, editors. *Gli Elementi di Euclide*. UTET, Torino, 1970.

M. Mondadori and M. D'Agostino. *Logica*. Bruno Mondadori, Milano, 1997.

B. Russell. *La conoscenza umana*. Longanesi, Milano, 1978. Trad. it. di *Human Knowledge. Its Scope and Limits*, London 1948.

L. Wittgenstein. *Ricerche filosofiche*. Einaudi, Torino, 1967. Trad. it. di *Philosophische Untersuchungen*, 1953.