

Francesco Berto

LOGICA DA ZERO A GÖDEL

2.3.2.1 Un quantificatore per tutti

Consideriamo daccapo la premessa (P1) del nostro sillogismo, la quale dice: “Tutti gli uomini sono mortali”. Nella semi-formalizzazione introduttiva l’avevamo tradotta con:

(1) *Tutto* ciò che ha F , ha G .

Ebbene, (1) può essere pensato come una sorta di condizionale. Infatti, afferma che *se* qualcosa ha F , *allora* ha G , senza riferirsi a un *determinato* qualcosa; e che ciò vale *per tutte* le cose. Dire che tutti gli uomini sono mortali equivale a dire che (a) vale per un oggetto qualunque, che (b) se esso è un uomo, allora è mortale. Dunque, è come se (1) dicesse:

(a) Per ogni cosa, vale che (b) se ha F , allora ha G .

Ora, la parte (b) di quest’espressione può essere resa proprio mediante una *funzione enunciativa* del tipo di quelle introdotte sopra. Si tratta di dire che se una cosa qualunque (un x), ha F , allora ha G : traducendo “se..., allora...” col nostro consueto simbolo per il condizionale, avremo:

(a) Per ogni x , (b) $F(x) \rightarrow G(x)$.

La parte (a) può essere resa introducendo il nuovo simbolo “ $\forall$ ” (una “a inversa”, dall’iniziale del tedesco *Alle*), che andrà letto appunto come: “per ogni...”, o “tutti...”, o “dato un qualsiasi...”. Tale simbolo è detto *quantificatore universale*. Si chiama “quantificatore” appunto perché ci dice *per quanti* oggetti vale l’espressione che segue. Stabiliamo che sia seguito immediatamente dalla variabile che, come si suole dire, esso *quantifica* (o anche: *vincola*), quindi dalla funzione enunciativa su cui agisce. Avremo allora:

(1a) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

la quale è, finalmente, l’espressione pienamente formalizzata della (1). Si notino le parentesi che circondano la funzione enunciativa $F(x) \rightarrow G(x)$ in (1a): servono a indicare che il quantificatore agisce sull’*intera* funzione, non solo sull’antecedente del condizionale. Si badi inoltre che nei testi di logica, e specialmente nei meno recenti, talora non si usa il simbolo $\forall$ e si scrive semplicemente la variabile universalmente quantificata fra parentesi: $(x) (F(x) \rightarrow G(x))$.

Possiamo allora trascrivere nel linguaggio predicativo il nostro sillogismo:

- (P1) Tutti gli uomini sono mortali;
- (P2) Socrate è un uomo;
- quindi,
- (C) Socrate è mortale.

Seguiremo la stessa convenzione utilizzata per scrivere gli schemi d’argomento nel capitolo 1, cioè con le premesse intervallate da virgole, e separate dalla conclusione mediante il segno di asserzione. Usiamo ora le costanti predicative U e M ,

rispettivamente, per la proprietà di essere un uomo e per quella di essere mortale, il nome proprio s per Socrate, e avremo:

$$\forall x(U(x) \rightarrow M(x)), U(s) \vdash M(s).$$

In generale, mediante il quantificatore universale noi possiamo rendere *tutti gli enunciati universali*. Ad esempio, per dire che tutte le cose hanno la proprietà F , scriveremo:

$$\forall xF(x).$$

Possiamo anche tradurre enunciati che iniziano con “niente...” o “nessun...”, etc.. Ad esempio, dire che nessun cavallo vola equivale ad affermare: “Per ogni x , se x è un cavallo, allora x non vola”; ovvero, usando C per la proprietà di essere un cavallo, e V per quella di volare:

$$\forall x(C(x) \rightarrow \neg V(x)).$$

Ancora, poniamo di voler esprimere che Dio è la causa prima di tutte le cose (il che è come dire: “Per ogni x , Dio è la causa prima di x ”). Usando la costante individuale d per Dio, e la lettera di predicazione K per la relazione ... è la causa prima di..., avremo:

$$\forall xK(d, x)$$

2.3.2.2 Un quantificatore per qualcuno

Vediamo ora come tradurre gli enunciati particolari, ossia quelli che iniziano con espressioni come “alcuni...” o “qualche...”. A tale scopo si utilizza un secondo quantificatore, il *quantificatore esistenziale*, per il quale è invalso il simbolo “ $\exists$ ” della “e inversa”. Anch’esso si adopera per dire *per quanti* oggetti vale ciò che lo segue, ma il suo significato è, appunto, che vale *per alcuni* x , o *per qualche* x . Si badi che queste espressioni in logica sono intese come sinonimi di: “per *almeno un* x ...”, ovvero: “*esiste* almeno un x tale che...” (onde il nome di quantificatore *esistenziale*). Esse assumono cioè una sfumatura un po’ diversa dall’uso quotidiano, in cui quando diciamo “Alcuni uomini sono calvi” normalmente sottintendiamo che *più* di un solo uomo lo sia. Qui invece, quando diciamo ad esempio che alcune cose hanno la proprietà F , ossia:

$$\exists xF(x),$$

intendiamo che questa espressione è vera se e solo se vi è almeno un oggetto che ha F (non escludendo, naturalmente, che ve ne sia anche più d’uno).

Volendo tradurre, ad esempio, l’enunciato particolare:

- (1) Qualche uomo è calvo,

possiamo intendere ciò come:

(a) Vi è qualcosa, che (b) è uomo ed è calvo.

Anche qui, la parte (b) può essere intesa come una funzione enunciativa: usando ancora U per la proprietà di essere un uomo, e C per quella di essere calvo, avremo:

(a) Vi è almeno un x , tale che (b) $U(x) \wedge C(x)$,

e infine, usando il quantificatore esistenziale,

(1a) $\exists x(U(x) \wedge C(x))$,

espressione che sarà vera se esiste almeno un oggetto (ma anche, se ce n'è più d'uno) che è uomo ed è calvo.

Come abbiamo tradotto "tutti gli uomini sono mortali" con:

$\forall x(U(x) \rightarrow M(x))$,

potremmo essere tentati di tradurre (1) usando un condizionale, ovvero:

$\exists x(U(x) \rightarrow C(x))$.

Questa però non è una traduzione corretta. Essa infatti non dice propriamente che qualche uomo è calvo, bensì che c'è qualcosa che, *se* è uomo, *allora* è calvo; e ciò sarebbe vero anche se non ci fossero uomini.

Altri esempi di uso del quantificatore esistenziale. Se vogliamo tradurre l'enunciato: "Ingrid Bergman ha una figlia", possiamo considerarlo come sinonimo di: "Vi è un x , tale che x è figlia di Ingrid Bergman". Quindi, usando F per la relazione ... è figlio/a di..., e b per Ingrid Bergman, avremo:

$\exists xF(x, b)$.

Per dire che qualche politico non ruba, consideriamo ciò come sinonimo di: "Vi è almeno un x , tale che x è un politico e x non ruba". Ossia, usando P per la proprietà di essere un politico, e R per quella di rubare:

$\exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$.

Infine, mediante i quantificatori si possono tradurre enunciati in cui non compaiono esplicitamente espressioni come "tutti...", "nessun...", o "qualche...", ma che possono essere considerati come *implicitamente* universali o particolari. Ad esempio:

(2) L'uomo è mortale

(3) Soldati attraversano il Tower Bridge.

Chi asserisce (2) di norma non intende affermare che un singolo uomo è mortale, ma intende dire qualcosa sulla specie umana in generale; perciò la traduzione di (2) in linguaggio predicativo è la stessa di "Tutti gli uomini sono mortali". Quanto a (3), esprime qualcosa come: "Qualche soldato attraversa il Tower Bridge"; ossia, usando

S per la proprietà di essere un soldato, A per la relazione ... *attraversa*..., e t per il Tower Bridge:

$$(3a) \quad \exists x(S(x) \wedge A(x, t)).$$

2.3.2.3 Quantificatori combinati e interdefiniti

Possiamo esprimere tutto ciò che si dice con ciascuno dei due quantificatori, adoperando l'altro e la negazione. Infatti, affermare ad esempio che *tutte le cose hanno la proprietà F* equivale a dire che *non vi è alcuna cosa che non abbia F* :

$$\forall x F(x) \leftrightarrow \neg \exists x \neg F(x).$$

Viceversa, affermare che *niente ha F* (cioè: "Per ogni x , x non ha F ") equivale a dire che *non esiste alcuna cosa con F* :

$$\forall x \neg F(x) \leftrightarrow \neg \exists x F(x).$$

Affermare che *qualcosa ha F* equivale a dire che *non si dà il caso che nulla abbia F* :

$$\exists x F(x) \leftrightarrow \neg \forall x \neg F(x).$$

Viceversa, affermare che *qualcosa non ha F* equivale a dire che *non si dà il caso che tutto abbia F* :

$$\exists x \neg F(x) \leftrightarrow \neg \forall x F(x).$$

Perciò a volte negli scritti di logica si usa soltanto un quantificatore, essendo l'altro definibile a partire dal primo: $\forall$ è definibile come $\neg \exists \dots \neg$, e $\exists$ è definibile come $\neg \forall \dots \neg$.

Infine, possiamo naturalmente *combinare* il quantificatore esistenziale e quello universale nella stessa formula. Ad esempio, volendo esprimere il fatto che tutti hanno una madre, scriveremo:

$$\forall x \exists y M(y, x)$$

("Per ogni x , esiste un y tale che y è madre di x "). Questa espressione ci mostra come l'*ordine* dei quantificatori abbia rilevanza. Se infatti li invertiamo, otteniamo:

$$\exists y \forall x M(y, x),$$

che dice che vi è una madre di tutti ("Esiste un y tale che, per ogni x , y è madre di x ") – cosa falsa, almeno nell'accezione più usuale della relazione di maternità. Dunque, invertire l'ordine di due quantificatori distinti non lascia in generale inalterato il senso e il valore di verità delle espressioni. Inoltre, è spesso importante l'uso di *variabili distinte*. Se avessimo scritto, ad esempio:

$$\exists x M(x, x)$$

ciò avrebbe significato che qualcuno è madre di se stesso.

La notazione simbolica del linguaggio predicativo ha il pregio di esplicitare le ambiguità intrinseche, o anche solo contestuali, di certi enunciati dell'italiano ordinario, fornendone diverse traduzioni formali. Consideriamo un famoso esempio dovuto a Peter Geach:

(1) Ogni ragazzo ama una certa ragazza.

Questo enunciato è ambiguo, visto che può significare (1a) che vi è *una singola* ragazza amata da tutti i ragazzi; oppure (1b) che, per ogni ragazzo, c'è una qualche ragazza (non per forza la stessa) amata dal ragazzo in questione. Usando R per la proprietà di essere un ragazzo, F per quella di essere una ragazza, e A per la relazione di amore, nella prima interpretazione avremo:

(1a) $\exists x(F(x) \wedge \forall y(R(y) \rightarrow A(y, x)))$,

ossia: "C'è un x che è una ragazza e per ogni y , se y è un ragazzo, allora y ama x ". Nella seconda interpretazione, invece, avremo:

(1b) $\forall x(R(x) \rightarrow \exists y(F(y) \wedge A(x, y)))$,

ossia: "Per ogni x , se x è un ragazzo allora c'è un y , tale che y è una ragazza e x ama y ". Secondo esempio:

(2) Tutti i tifosi rispettano un giocatore leale.

Anche questo enunciato è ambiguo, potendo significare (2a) che per ogni x , se x è un tifoso allora x rispetta *un qualche* giocatore leale; oppure (2b) che per ogni x , se x è un tifoso allora x rispetta *qualsiasi* giocatore leale. Usiamo T per la proprietà di essere un tifoso, L per quella di essere un giocatore leale, R per la relazione di rispetto; allora, nella prima interpretazione avremo:

(2a) $\forall x(T(x) \rightarrow \exists y(L(y) \wedge R(x, y)))$;

nella seconda invece:

(2b) $\forall x(T(x) \rightarrow \forall y(L(y) \rightarrow R(x, y)))$.

2.4 L'identità

Fra i simboli del linguaggio che stiamo introducendo ce n'è uno che ha particolare importanza, ossia quello che assumiamo significhi la relazione d'*identità*. Nel nostro linguaggio ordinario, l'identità viene espressa soprattutto con "è". Il verbo essere ha però diversi significati, anzi proprio il simbolismo logico ci è qui d'aiuto nel distinguerne alcuni. Consideriamo i seguenti enunciati:

(1) Socrate è mortale