Francesco Berto

LOGICA DA ZERO A GÖDEL

(9b) L'Inter ha vinto 13 scudetti;

otterremo:

(10) Necessariamente l'Inter ha vinto 13 scudetti,

e (10) è un enunciato intuitivamente falso. Non ci sembra affatto necessario, bensì contingente, che il numero di scudetti vinti dall'Inter sia 13: avrebbe potuto vincerne di più (o anche, di meno).

Questi casi di fallimento della sostituzione hanno luogo in certi contesti linguistici detti appunto non vero-funzionali o, in gergo tecnico, *non estensionali*. Tali contesti sono tipicamente prodotti, ad esempio, da espressioni dette *modali*, come “è possibile che...”, “è necessario che...”, o *epistemiche*, come “... crede che...”, “... sa che...”. Di essi, tuttavia, non ci occuperemo in questo libro.

1.3 I connettivi logici

Le espressioni usate sopra per formare composti vero-funzionali sono alcune delle “parole logiche” (come “se..., allora...”, “non...”, “... e...”) di cui si è detto nell'introduzione. Tali espressioni sono chiamate appunto *connettivi logici*, o *connettivi enunciativi*, o anche *operatori per la formazione di enunciati da enunciati*. Il motivo di queste denominazioni è ora ben chiaro: si tratta infatti di quelle espressioni che consentono di formare enunciati composti *connettendo* tra di loro enunciati dati. Un'altra loro denominazione è *connettivi vero-funzionali*, e anche questa è chiara: indica appunto che gli enunciati formati mediante essi sono una funzione di verità, nel senso specificato sopra, degli enunciati che li compongono.

In questo capitolo studieremo un linguaggio logico-formale molto semplice, detto *linguaggio enunciativo* o *proposizionale*. Come abbiamo già anticipato, con esso ci si propone di evidenziare la forma logica di ragionamenti la cui correttezza dipende dalla struttura “connettivale” degli enunciati che li compongono. Si tratta di ragionamenti del tipo espresso dallo schema semiformale:

(P1) *Se P, allora Q;*

(P2) *Non Q;*
quindi,

(C) *Non P,*

che abbiamo considerato in precedenza. Nel linguaggio enunciativo, gli enunciati semplici vengono sostituiti da singole lettere – tipicamente: *P, Q, R, ...* (talvolta nei manuali si usano le minuscole: *p, q, r, ...*) – dette *variabili enunciative* o *proposizionali*. Il termine “variabile” ha qui un uso analogo a quello della matematica. Quando in matematica si afferma che in:

$$x = y^2$$

i simboli “*x*” e “*y*” fungono da *variabili*, si intende che possono esprimere, in modo per così dire indeterminato, un qualunque numero (come anche si dice, le variabili

numeriche “variano su numeri”); o anche, che stanno al posto di un numero qualsiasi. Similmente, le variabili enunciative P , Q , R , ... , possono sostituire un qualunque enunciato semplice.

Per i connettivi logici, invece, si usano simboli appositi. Come sappiamo, identificare quante e quali siano le “parole logiche” è un problema. Noi ci limiteremo a introdurre simboli per i cinque connettivi già menzionati sopra: (1) *congiunzione*, (2) *disgiunzione*, (3) *negazione*, (4) *condizionale*, (5) *doppio condizionale* o *bicondizionale*. Vi sono logiche alternative a (o estensioni di) quella classica, che introducono connettivi ulteriori, o che rifiutano uno o più di questi cinque (ovvero, secondo alcuni, ne rivedono il significato), ma in questa sede non ce ne occuperemo. Purtroppo, negli scritti di logica classica si usa talora un simbolismo diverso anche per esprimere questi cinque. Oltre ai simboli che useremo in questo libro, forniremo perciò anche le più diffuse notazioni alternative.

1.3.1 *Congiunzione*

Il connettivo logico della congiunzione traduce l’espressione del linguaggio naturale “... e...”, nonché espressioni analoghe. Si dice che la congiunzione è un connettivo *binario*, o a due posti, perché lega fra loro due enunciati per volta. Noi lo renderemo con il segno “ $\wedge$ ” (altri simboli frequenti negli scritti di logica sono il punto, “.”, e la e-commerciale, “&”). Ad esempio, nell’enunciato visto sopra:

Piove e fa freddo,

sostituiamo i due enunciati semplici “Piove” e “Fa freddo” con le variabili enunciative P e Q , e l’espressione “... e...” con il nostro simbolo. Otterremo allora:

$$P \wedge Q$$

che è detta *congiunzione* di P e di Q , mentre P e Q sono detti i *congiunti* di $P \wedge Q$ (si noti: si chiamano di norma con lo stesso nome il *connettivo*, e l’*espressione* composta formata usando quel connettivo). Ora, “ $\wedge$ ” è un connettivo vero-funzionale, nel senso spiegato al par. 1.2, dunque il valore di verità del composto $P \wedge Q$ dipenderà da quello dei suoi componenti, cioè da P e da Q . In che modo ne dipende?

Abbiamo detto che “Piove e fa freddo” è vero se e solo se entrambi i suoi congiunti sono veri, cioè se e solo se è vero che piove ed è vero che fa freddo. Ciò esprime l’idea del tutto intuitiva che una congiunzione sia vera se e solo se entrambi i suoi congiunti sono veri. Consideriamo ora due enunciati semplici qualunque – il che possiamo fare appunto usando due variabili enunciative, P e Q . Se teniamo fermi i due principi di determinatezza (ogni enunciato ha uno e un solo valore di verità) e bivalenza (i valori di verità sono due: vero e falso) visti sopra, si daranno soltanto quattro possibilità:

- (1) P e Q sono entrambi veri;
- (2) P è vero e Q è falso;
- (3) P è falso e Q è vero;
- (4) P e Q sono entrambi falsi.

Quindi, la loro congiunzione sarà vera soltanto nel caso (1), mentre sarà falsa negli altri casi. Possiamo rappresentare schematicamente questa situazione, indicando i due valori di verità, vero e falso, con le lettere V e F (talora si usano anche i numeri 1 e 0) e costruendo la seguente tabella:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Qui le prime due colonne, sotto le lettere delle variabili enunciative P e Q , prese insieme riportano le possibili combinazioni di loro valori di verità (spesso sono perciò dette *colonne guida*). La terza colonna riporta i corrispondenti valori di verità assunti dalla congiunzione $P \wedge Q$, per ciascuna delle combinazioni di valori di verità dei suoi congiunti. Questa tabella è detta *tavola di verità* per la congiunzione, e si dice anche che esprime la *matrice* del connettivo in questione. Può essere intesa come una *definizione* del connettivo della congiunzione, appunto perché esprime la funzione di verità in cui la congiunzione *consiste*: esprime il modo in cui il valore di verità di una congiunzione è interamente determinato in funzione dei possibili valori di verità dei suoi congiunti. In generale, nella logica classica e vero-funzionale che studiamo si assume che il significato dei connettivi sia catturato proprio dalla loro tavola di verità.

Certamente, l'espressione "... e..." ha molti usi in italiano; può indicare una successione nel tempo, come ad esempio in:

Socrate bevve la cicuta e morì,

ove si intende che prima Socrate bevve la cicuta, e poi morì, non certo l'inverso. Quando però traduciamo "... e..." nel simbolo della congiunzione logica, assumiamo di esprimere *solo* la congiunzione vero-funzionale, senza sfumature temporali. Reciprocamente, vi sono altre parole del nostro linguaggio ordinario, le quali possono svolgere la funzione di congiunzione in tal senso. Si considerino i seguenti enunciati:

- (1) Piove ma fa freddo
- (2) Piove, inoltre fa freddo
- (3) Piove, fa freddo.

Si vede che in (1) vi è una sfumatura avversativa, data dal "... ma...", che in "Piove e fa freddo" è assente. In (3), poi, non c'è neppure una parola fra i due enunciati "Piove" e "Fa freddo", bensì un segno d'interpunzione. Eppure, (1)-(3) sono tutti considerati equivalenti, dal punto di vista vero-funzionale della nostra logica, a "Piove e fa freddo" (e le espressioni come "... ma...", "... inoltre..." possono essere tutte tradotte col simbolo della congiunzione logica). Infatti, ciascuno di essi è vero se e solo se entrambi gli enunciati semplici che lo compongono sono veri: una loro tavola di verità sarebbe identica a quella di $P \wedge Q$, che abbiamo appena visto.

1.3.2 Disgiunzione

Il connettivo logico della disgiunzione traduce l'italiano "... o..." ed espressioni analoghe come "o..., o...", "... oppure...", etc. È anch'esso un connettivo binario, ossia lega due enunciati per volta, e viene reso dal simbolo " $\vee$ ". Ad esempio, nell'enunciato:

O mangi la minestra, o salti dalla finestra,

sostituiamo daccapo i due enunciati semplici "Mangi la minestra" e "Salti dalla finestra" con le variabili enunciative P e Q , e l'espressione "o..., o..." con il nostro nuovo simbolo, e avremo:

$P \vee Q$

che è detta *disgiunzione* di P e di Q , mentre P e Q sono i suoi *disgiunti* (anche in questo caso, dunque, stesso nome per il connettivo e per l'espressione composta ottenuta mediante il connettivo). Quale sarà la sua matrice o tavola di verità?

Qui sorge una difficoltà, perché la parola italiana "... o..." è ambigua, cioè ha (almeno) due significati diversi. Il latino, ad esempio, rendeva questi due significati con due espressioni differenti: *vel*, per esprimere la cosiddetta *disgiunzione debole* o *inclusiva*, e *aut*, per esprimere la cosiddetta *disgiunzione forte* o *esclusiva*. Una disgiunzione debole o inclusiva di due enunciati è vera se *almeno uno* dei due disgiunti è vero (non escludendo dunque che lo siano entrambi). Invece, una disgiunzione forte o esclusiva è vera se *almeno uno e al massimo uno* dei disgiunti è vero (dunque, escludendo che lo siano entrambi). Quale dei due sensi prevalga, in italiano, può emergere dal contesto o dal senso complessivo dell'enunciato. Ad esempio:

- (1) Col menu a prezzo fisso puoi avere pastasciutta o risotto
- (2) Possono partecipare alla selezione i laureati in lettere o in lingue.

L'enunciato (1) può essere visto come un'abbreviazione della disgiunzione estesa: "Col menu a prezzo fisso puoi avere pastasciutta, *o* col menu a prezzo fisso puoi avere risotto". Ora, questa disgiunzione si lascia interpretare in senso esclusivo: in generale, in un ristorante non vi sarà consentito di mangiare *sia* la pastasciutta *che* il risotto al prezzo del menu fisso. Chi asserisce (1) intende che si può scegliere *al massimo* uno dei due, ossia esclude che si possano avere entrambi. Invece, in (2) la disgiunzione (che per esteso suonerebbe: "Possono partecipare alla selezione i laureati in lettere, *o* possono partecipare alla selezione i laureati in lingue") si lascia interpretare in senso inclusivo: infatti, alla selezione potrebbe partecipare anche chi possieda sia una laurea in lettere, che una in lingue.

In logica classica si assume che la disgiunzione abbia il senso debole o inclusivo (onde l'uso del segno " $\vee$ ", che richiama l'iniziale di *vel*). Chi asserisce una disgiunzione inclusiva intende escludere soltanto l'eventualità che ambo i disgiunti siano falsi. Dunque, una disgiunzione inclusiva è falsa solo nel caso in cui entrambi i disgiunti sono falsi, e altrimenti è vera. La matrice per $P \vee Q$ sarà allora:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.3.3 Negazione

Il connettivo logico della negazione può tradurre non solo il “non...”, ma anche altre espressioni italiane come “non si dà il caso che...”, etc. Il simbolo da noi utilizzato è “ $\neg$ ” (altri simboli presenti nei testi di logica sono la cosiddetta *tilde*, “ $\sim$ ”, e talvolta il segno matematico di sottrazione, “ $-$ ”). A differenza di congiunzione e disgiunzione, la negazione non è un connettivo binario, bensì *unario* o a un posto, perché si applica a un solo enunciato per volta. Data una variabile enunciativa P , mediante il nostro nuovo simbolo possiamo formarne la negazione logica:

$\neg P$.

Anche in questo caso, “negazione” indica sia il connettivo che l’espressione formata usando il connettivo. E anche in questo caso, il significato vero-funzionale della negazione è catturato da una semplicissima tavola:

P	$\neg P$
V	F
F	V

In questo caso abbiamo due sole righe sotto quella iniziale. Poiché infatti c’è una sola variabile, le possibilità sono due: $P = V$, $P = F$. Secondo la tavola, $\neg P$ sarà falso se e solo se P è vero, e viceversa $\neg P$ sarà vero se e solo se P è falso. Il ruolo logico della negazione, dunque, è quello di *invertire il valore di verità* dell’enunciato che viene negato. In particolare, di conseguenza:

$\neg\neg P$

ha sempre lo stesso valore di verità di P . Quando si dice che “due negazioni fanno un’affermazione”, si intende per l’appunto questo. Ad esempio, se non si dà il caso che non piove, allora piove; e se non succede che l’Inter non vinca lo scudetto, allora l’Inter vince lo scudetto.

Si noti che in italiano non sempre basta aggiungere un “non” in un enunciato per formarne la negazione, intesa come un enunciato che è vero se e solo se l’enunciato di partenza è falso e viceversa. Ad esempio, aggiungendo un “non” in “Alcuni politici rubano”, otteniamo “Alcuni politici non rubano”, che non ne è la negazione nel senso così inteso: può darsi infatti che entrambi questi enunciati siano *veri*, nel caso che certi politici rubino mentre certi altri non lo fanno. La negazione logica di “Alcuni politici rubano” può essere espressa dicendo: “Non si dà il caso che alcuni politici rubino”; o più semplicemente: “Nessun politico ruba”. Queste espressioni, infatti, sono vere esattamente nel caso che quella sia falsa, e viceversa.

Si dice tradizionalmente che due enunciati sono fra loro *contraddittori*, per l'appunto, se e solo se uno deve essere vero se l'altro è falso e viceversa. In questo senso, la negazione logica è l'operatore che usiamo tipicamente per formare contraddittori: P e $\neg P$ sono fra loro contraddittori.

1.3.4 Condizionale materiale

Il connettivo binario del *condizionale* intende tradurre l'espressione "se..., allora...". Lo renderemo col simbolo " $\rightarrow$ " (altra notazione frequente è il cosiddetto ferro di cavallo, " $\supset$ "). Date, al solito, due variabili enunciative P e Q , possiamo formare il condizionale:

$$P \rightarrow Q$$

dove P è detto l'*antecedente*, e Q il *conseguente*. Stabilirne la tavola di verità (e dunque, il significato vero-funzionale) non è immediato, perché in italiano l'espressione "se..., allora..." ha molti usi e sensi diversi. Consideriamo ad esempio i seguenti tre enunciati condizionali:

- (1) *Se il papa è scapolo, allora non è sposato;*
- (2) *Se questa luce è emessa da una sorgente con un intenso campo gravitazionale, allora lo spettro di questa luce presenta uno spostamento verso il rosso;*
- (3) *Se non passo l'esame di logica neanche stavolta, allora mi do all'ippica.*

(1) esprime un'implicazione basata semplicemente sul significato delle parole: poiché per definizione "scapolo" è sinonimo di "non sposato", se qualcuno è scapolo allora senz'altro non è sposato. Per accertare se (1) è vero, basta guardare il vocabolario. In (2), invece, il conseguente segue dall'antecedente in base a un nesso causale, asserito a partire da una teoria scientifica. In (3) poi non si esprime né un nesso causale né uno definitorio, ma una mera intenzione, o il proposito di uno studente (o di un futuro fantino!). Tuttavia, c'è una parte di significato comune alle diverse accezioni di "se..., allora...", che è identificabile proprio in termini di funzioni di verità e di tavole di verità. In tutti i casi, infatti, si sottintende almeno che *un enunciato condizionale è falso nel caso in cui il suo antecedente sia vero e il conseguente falso*.

Chi afferma ciascuno dei condizionali (1)-(3) non asserisce direttamente il suo antecedente, o il suo conseguente (ad esempio, chi afferma (1) non asserisce *che* il papa è scapolo, o *che* non è sposato). Ma di certo, pur nelle differenze di significato di "se..., allora...", afferma sempre che, nell'ipotesi che l'antecedente sia vero, anche il conseguente lo è; dunque, intende *escludere* che all'antecedente della sua asserzione accada di essere vero, mentre il conseguente è falso. Perciò, ad esempio, possiamo considerare falsificato l'enunciato (2) se accertiamo che la luce viene emessa da un intenso campo gravitazionale, e tuttavia il suo spettro *non* presenta uno spostamento verso il rosso.

Possiamo dunque dare la matrice del connettivo così:

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Il condizionale espresso da questa tavola si chiama *condizionale materiale*. Il suo significato, come accadeva già per gli altri connettivi logici, è interamente fissato dalla sua matrice o tavola di verità. Ciò vuol dire che il condizionale materiale non esprime in particolare alcun nesso causale, né intenzionale, né basato sul significato di “parole non logiche” come “scapolo” o “sposato”. In esso si manifesta soltanto un tratto del tutto generale dell’idea di condizionalità: una connessione vero-funzionale fra due enunciati P e Q , tale che essa è falsa se e solo se P è vero e Q è falso.

Guardando le righe della nostra tavola di verità, notiamo che le ultime due sono sicuramente un po’ controintuitive: infatti, mostrano che il condizionale è vero *comunque* quando il suo antecedente è falso; il condizionale, in questo caso, è vero indipendentemente dal valore di verità del conseguente. Tuttavia, se ci atteniamo al mero significato vero-funzionale del “se..., allora...”, tale caratterizzazione è ineccepibile. La “cartina di tornasole” per mettere alla prova un condizionale materiale si ha quando si verifica il suo antecedente. L’unica cosa che un condizionale materiale *esclude*, è che si dia il caso del suo antecedente, e non quello del suo conseguente. E solo se ciò, invece, ha luogo, può considerarsi falsificato.

Si dice spesso che il condizionale esprime la nozione di *condizione sufficiente*. Se ne capisce il motivo: asserire un condizionale equivale ad asserire che la verità del suo antecedente è *condizione sufficiente* per la verità del suo conseguente. Il verificarsi di P , in base al condizionale “Se P , allora Q ”, è *sufficiente* al verificarsi di Q (e proprio per questo, se invece P si verifica e Q no, l’affermazione condizionale è falsificata). Ciò non esclude, tuttavia, che Q si verifichi anche per altre vie; dunque il verificarsi di P non è posto come *condizione necessaria* del verificarsi di Q . Ad esempio, chi dice “Se nevicava, allora fa freddo” intende asserire che la presenza della neve è sufficiente affinché sia freddo. Tale presenza, però, non è asserita come necessaria al freddo: potrebbe far freddo (ossia, il conseguente di questo condizionale potrebbe essere vero) anche senza che nevichi.

1.3.5 Bicondizionale

Nelle nostre definizioni dei connettivi abbiamo usato spesso l’espressione “... se e solo se...”. Il simbolo logico che le corrisponde è “ $\leftrightarrow$ ” (un’altra notazione frequentemente usata è “ $\equiv$ ”), che è un altro connettivo binario. In generale, dati P e Q , se ne forma il *doppio condizionale* o *bicondizionale* scrivendo:

$$P \leftrightarrow Q.$$

Si parla spesso di *lato sinistro* e *lato destro* di un bicondizionale, a indicare i suoi due costituenti. La relazione vero-funzionale fra enunciati espressa da “... se e solo se...”, e catturata da questo connettivo, è quella che sussiste quando, se uno dei due enunciati è vero lo è anche l’altro, e se uno dei due enunciati è falso lo è anche l’altro.

Dunque, $P \leftrightarrow Q$ è vero se e solo se P e Q sono entrambi veri o entrambi falsi. La sua matrice, cioè, è:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Come il condizionale vero-funzionale è anche detto “condizionale materiale”, così il doppio condizionale è talora detto “equivalenza materiale”. Dunque, si dice a volte che due enunciati sono materialmente equivalenti se hanno lo stesso valore di verità.

Il bicondizionale si chiama così perché equivale alla *congiunzione* di *due* condizionali, in cui l’antecedente dell’uno è il conseguente dell’altro e viceversa. Chi asserisce “ P se e solo se Q ” intende dire che *se P , allora Q* (primo condizionale), e *se Q , allora P* (secondo condizionale). $P \leftrightarrow Q$ è vero precisamente nel caso che tanto $P \rightarrow Q$ quanto $Q \rightarrow P$ siano veri, stante che ogni congiunzione è vera se e solo se lo sono ambo i congiunti. Allora, il bicondizionale è *definibile* attraverso i due connettivi, già introdotti, della congiunzione e del condizionale materiale:

$$P \leftrightarrow Q =_{\text{df}} (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

dove il simbolo “ $=_{\text{df}}$ ” va letto come: “... è uguale per definizione a...” (sulle *parentesi*, che qui fanno la loro prima apparizione, diremo invece qualcosa nel prossimo paragrafo).

Questa definizione mostra che il bicondizionale è in certo modo “ridondante”, ossia eliminabile in linea di principio dal linguaggio formale che stiamo introducendo: possiamo esprimere tutto ciò che esprimiamo mediante esso, usando solo condizionale materiale e congiunzione. Tuttavia, questa stessa definizione consente anche di capire perché il bicondizionale esprima un concetto molto importante per tutte le scienze deduttive: la nozione di *condizione necessaria e sufficiente*. Come sappiamo, affermare:

$$(1) \quad P \rightarrow Q$$

è asserire che il verificarsi di P è condizione sufficiente del verificarsi di Q . Non si asserisce, però, che ne sia condizione *necessaria*. Come esprimere, allora, l’idea che il verificarsi di P sia condizione necessaria del verificarsi di Q ? Un modo molto semplice è proprio quello di usare il condizionale materiale inverso rispetto a (1):

$$(2) \quad Q \rightarrow P.$$

Infatti, asserire (2) è dire che non si dà il caso che Q senza che si dia il caso che P , ossia appunto, che il verificarsi di P è *condizione necessaria* del verificarsi di Q . Quindi, affermare la congiunzione di (1) e (2) è come dire che P è condizione necessaria e sufficiente di Q . E il bicondizionale equivale proprio a questa congiunzione.