Come ragionare (se proprio dovete) I Elementi di Logica

Marcello D'Agostino

Settimana 2, Lezioni 4–6

Interludio 1

Disgiunzione inclusiva vs digiunzione esclusiva

Nella Dispensa n. 1 abbiamo spiegato il significato della disgiunzione "oppure" facendo vedere come questa parola si può usare nell'inferenza. Prima lo abbiamo spiegato, in accordo con la teoria consequenzialista, mediante *regole di eliminazione* e poi, in accordo con la teoria vero-funzionale, mediante *regole di introduzione*.

Tuttavia abbiamo sorvolato sul fatto che la disgiunzione, nella lingua italiana, è una parola logica *ambigua*. Infatti vi sono due diverse disgiunzioni che, in Italiano, vengono espresse allo stesso modo: la cosiddetta *disgiunzione inclusiva* e la cosiddetta *disgiunzione esclusiva*. Il Latino, che da questo punto di vista era più preciso, aveva invece due parole diverse per denotare i due tipi di disgiunzione: *vel* per la disgiunzione inclusiva e *aut* per quella esclusiva.

Disgiunzione inclusiva vs disgiunzione esclusiva

Ricordiamo la differenza fra le due disgiunzioni. P *vel* Q, dove P e Q come al solito sono due proposizioni arbitrarie, significa che *almeno una* delle due proposizioni disgiunte è vera. Nel dire "almeno una" non si esclude il caso che siano vere entrambe. Dunque, potremmo dire che ci sono tre stati di cose (o "mondi") possibili in cui la la disgiunzione inclusiva P *vel* Q di due proposizioni P e Q è vera: lo stato di cose in cui P è vera e Q è falsa, quello in cui Q è vera e P è falsa e quello in cui sono vere entrambe. Dunque la disgiunzione inclusiva di due proposizioni è falsa solo nel caso in cui le proposizioni sono false entrambe. Nel discorso comune facciamo un uso frequente della disgiunzione inclusiva. Se veniamo a sapere che un nostro conoscente è di professione psicoterapeuta, possiamo inferire correttamente che costui ha conseguito la laurea in Psicologia oppure la laurea in Medicina (con specializzazione in Psichiatria). In questo caso si tratta chiaramente di una disgiunzione *inclusiva* in quanto non siamo in grado di escludere che abbia conseguito entrambe le lauree. Un altro esempio si ha quando si elencano i requisiti per la partecipazione a un concorso: "per partecipare ci vuole la laurea in Lettere oppure la laurea in Filosofia"; con ciò, tuttavia, non si intende escludere dalla partecipazione chi abbia conseguito entrambe le lauree.

D'altra parte, la disgiunzione esclusiva, P *aut* Q, ha un significato diverso. Quando si disgiungono due proposizioni in questo modo si intende dire non solo che almeno una delle due proposizioni è vera, ma anche che le proposizioni si *escludono a vicenda*. Dunque, si intende dire che esattamente una delle due proposizioni è vera e l'altra è falsa. Così gli stati di cose possibili in cui *P aut Q* è vera sono solo due: quello in cui *P* è vera e *Q* falsa, e quello in cui *P* è falsa e *Q* vera.

Le regole di eliminazione che abbiamo dato nella Dispensa n. 1 fissano il significato della *disgiunzione inclusiva* in accordo con la teoria consequenzialista del significato. Dato che disgiunzione inclusiva ed esclusiva sono due parole logiche distinte con un significato distinto è legittimo aspettarsi che tali regole non possano essere buone anche per definire il significato della disgiunzione esclusiva. Se due parole logiche hanno un significato diverso, le regole di inferenza che ne fissano l'uso del ragionamento dovrebbero essere, almeno in parte, diverse. Dunque dobbiamo aspettarci che almeno alcune delle regole di eliminazione per la disgiunzione inclusiva, che abbiamo dato nella Dispensa n.1, *non* siano corrette per la disgiunzione esclusiva, e debbano pertanto essere sostituite. Questo era il contenuto dell'Esercizio 10. Chi lo ha svolto correttamente avrà constato che le regole scorrette sono quelle per la *disgiunzione falsa*: dalla falsità di una disgiunzione esclusiva non è possibile inferire la falsità di entrambe le proposizioni disgiunte. Infatti, *P aut Q* è falsa sia nel caso in cui le due proposizioni siano entrambe false, sia in quello in cui le due proposizioni siano entrambe vere. Dunque, dall'informazione che *P aut Q* è falsa non siamo in grado di inferire quale di questi due casi sia quello che effettivamente si verifica. Viveversa, le regole sono corrette nel caso della disgiunzione inclusiva, poiché *P vel Q* è falsa solo nel caso in cui *P* e *Q* siano entrambe false e dunque dall'informazione secondo cui *P vel Q* è falsa, possiamo correttamente inferire che *P* e *Q* sono entrambe false.

Un discorso analogo vale per le regole di introduzione che abbiamo discusso alla fine della Dispensa n.1. Queste ultime determinano il significato delle parole logiche in accordo, non con la teoria consequenzialista, ma con quella vero-funzionale determinando non le *conseguenze immediate* della verità o falsità di una proposizione che contiene una data parola logica, ma le *condizioni sufficienti* per la verità o la falsità di una proposizione siffatta. Di nuovo, dato che la disgiunzione inclusiva e quella esclusiva sono parole logiche di diverso significato, dobbiamo aspettarci che almeno alcune delle regole date sopra (che sono corrette per la disgiunzione inclusiva) risultino scorrette per la disgiunzione esclusiva.

Esercizio 1 *Quali delle regole di introduzione per la disgiunzione date nel-*

la Dispensa n. 1 risultano scorrette *se al posto della disgiunzione inclusiva si considera quella esclusiva? E come dovrebbero essere rimpiazzate?*

Come definire una parola logica nuova in termini di quelle note

La discussione nel paragrafo precedente pone un problema nuovo. Dato che la disgiunzione esclusiva è diversa da quella inclusiva e che le regole che abbiamo dato sono corrette per quella inclusiva ma non per quella esclusiva, come facciamo a imparare l'uso della disgiunzione esclusiva nell'inferenza? In generale, come facciamo a imparare l'uso di parole logiche diverse da quelle studiate nella Dispensa n. 1, come per esempio l'espressione "né...né---"?

Possiamo sempre fissare delle regole di inferenza che ne spieghino il significato, come abbiamo fatto per le altre parole logiche e come chiedono gli Esercizi 10 e 14 della Dispensa 1 o l'Esercizio 1 di questa dispensa. Ma questo non è l'unico modo. Possiamo anche fornire delle *definizioni esplicite*, come quelle che si trovano in un dizionario, in cui queste parole logiche vengono espresse in termini di parole logiche *già note*, il cui uso è già stato opportunamente fissato da un insieme di regole di eliminazione (o di introduzione). Negli Esercizi 15 e 16 della Dispensa n. 1 si chiedeva proprio di dare definizioni di questo tipo. Vediamo come si può fare (e controllate dunque le vostre risposte).

Definizione esplicita della disgiunzione esclusiva

Cominciamo con la *disgiunzione esclusiva*, che indicheremo come i latini con la parola *aut*, e proviamo a definirla in termini delle parole logiche già note. Fra queste, indicheremo la disgiunzione inclusiva con la parola *vel*, sempre alla maniera dei latini. Abbiamo già osservato che *P aut Q* asserisce *qualcosa di più* di *P vel Q*. Possiamo dire che *P vel Q* è vera in tutti i casi in cui *P aut Q* è vera. Infatti, come abbiamo osservato, *P aut Q* è vera solo nei seguenti "mondi possibili": (1) *P* è vera e *Q* è falsa, e (2) *P* è falsa e *Q* è vera. Ebbene, in entrambi questi "mondi possibili" anche *P vel Q* risulta vera. Dunque, se ci troviamo in un mondo possibile in cui *P aut Q* è vera, questo stesso mondo possibile rende vera anche *P vel Q*. Questo significa che l'inferenza

$$\frac{P \textit{ aut } Q}{P \textit{ vel } Q}$$

è un'*inferenza corretta* (vedi la definizione di inferenza corretta nella Dispensa 1): in tutti i mondi possibili in cui *P aut Q* è vera deve esserlo anche *P vel Q* o, in altri termini, non è possibile che *P aut Q* sia vera e *P vel Q* falsa.

Viceversa, è perfettamente possibile che *P vel Q* sia vera e *P aut Q* falsa, e precisamente quando *P* e *Q* sono entrambe vere. Dunque c'è un mondo possibile, quello in cui *P* e *Q* sono entrambe vere, nel quale *P vel Q* è vera, mentre *P aut Q* è falsa. Secondo quanto detto nella Dispensa 1, un mondo possibile del genere è un *controesempio* all'inferenza

$$\frac{P \textit{ vel } Q}{P \textit{ aut } Q}$$

il quale mostra che l'inferenza è *scorretta*.

Abbiamo osservato che la disgiunzione esclusiva *P aut Q* dice *qualcosa di più* della disgiunzione inclusiva *P vel Q*. Questo è emerso anche dal fatto che quando la prima proposizione è vera, lo è anche la seconda, ma non viceversa. In che cosa consiste questo "qualcosa"? Esattamente nell'asserzione che le due proposizioni *P* e *Q* non sono entrambe vere. Dunque chi asserisce che *P aut Q* è vera asserisce che *P vel Q* è vera, *ma anche* che *P* e *Q* non sono entrambe vere. Questo contenuto addizionale può essere comunicato asserendo che la congiunzione "*P e Q*" è falsa e, dunque, che è vera la sua negazione "*non*-(*P e Q*)". (Attenzione alle parentesi! Perché sono necessarie?). Così chi asserisce "*P aut Q*" asserisce che sono vere *sia* "*P vel Q*" *sia* "non-(*P e Q*)", e dunque che è vera la loro congiunzione. Abbiamo dunque trovato la nostra definizione esplicita della disgiunzione inclusiva in termini di parole logiche già note:

P aut Q $=_{def}$ (*P vel Q*) *e non*-(*P e Q*)

Proviamo ora a dare, in risposta all'Esercizio 15, un'analoga definizione esplicita di "né...né---". E' ovvio a qualunque parlante nativo della lingua italiana che "né *P* né *Q*" significa che le due proposizioni *P* e *Q* sono entrambe false: se è vera la proposizione "Né Mario né Antonio sono cuigni di Dino" questo significa che Mario non è cugino di Dino e Antonio non è cugino di Dino. Dunque dovrebbe essere chiaro che una definizione esplicita può essere data nel modo seguente:

né *P* né *Q* $=_{def}$ *non-P e non-Q*

L'isola dei lestofanti e dei cavalieri

Siamo su un'isola abitata solo da due tipi di persone: i *cavalieri*, che dicono sempre la verità, e i *lestofanti*, che invece mentono sempre. A un certo punto incontriamo un abitante che ci dice

io oppure mio fratello siamo lestofanti

intendendo con "oppure" la disgiunzione inclusiva. Che cosa possiamo concludere? Dato che non sappiamo se il nostro interlocutore è un cavaliere oppure un lestofante, sembrerebbe a prima vista che la sua asserzioni non possa esserci utile, dal momento che non sappiamo se mente oppure dice la verità. Questo è, però, uno dei casi in cui la logica, in modo quasi magico, puà aiutarci ad estrarre informazioni *nascoste*. Proviamo a ragionare, sfruttando quello che abbiamo imparato sul significato della disgiunzione inclusiva.

Dato che il nostro interlocutore, chiamiamolo "Beppe", è un cavaliere oppure un lestofante è utile distinguere i due casi e cercare di vedere, separatamente, quali conseguenze possiamo trarre in ciascuno di essi. Supponiamo prima che Beppe sia un lestofante. In tal caso, quello che asserisce *deve essere falso* (perché i lestofanti mentono sempre). E dunque, sotto l'ipotesi che Beppe sia un lestofante,

è falsa la proposizione " Beppe è un lestofante oppure suo fratello è un lestofante". (1)

Secondo la nostra regola di eliminazione per la disgiunzione falsa (vedi Dispensa 1) possiamo dunque concludere, in base al significato stesso della disgiunzione, che

è falso che Beppe sia un lestofante (2)

e

è falso che suo fratello sia un lestofante. (3)

Ma questo comporta una contraddizione! Infatti avevamo fatto l'ipotesi che Beppe fosse un lestofante e, sotto questa ipotesi, abbiamo dedotto (in base al significato stesso della disgiunzione) che Beppe non è un lestofante ("è falso che Beppe sia un lestofante"). Ciò implica che l'ipotesi secondo cui Beppe è un lestofante *non può essere vera*: nessuna ipotesi vera può condurre a conclusioni contraddittorie. Se l'ipotesi in questione fosse vera, dato che le inferenze che hanno condotto alla (2) sono tutte corrette, dovrebbe essere vero sia che Beppe è un lestofante, sia che non lo è. Ma, per il *principio di non-contraddizione*, questo non è possibile. Dunque l'ipotesi che avevamo fatto, cioè quella secondo cui Beppe è un lestofante, non può essere vera e possiamo scartarla. Dato che l'isola è abitata solo da Cavalieri o da lestofanti:

è vero che Beppe è un lestofante oppure è un cavaliere. (4)

Applicando la nostra regola di eliminazione per la disgiunzione vera (vedi Dispensa 1), ne segue che

Beppe è un cavaliere. (5)

Abbiamo così appreso, attraverso il ragionamento, qualcosa di molto utile che non sapevamo prima, e cioè che Beppe è un cavaliere. Allora, dato che i cavalieri dicono sempre la verità, possiamo tranquillamente concludere che

è vera la proposizione "Beppe è un lestofante oppure suo fratello è un lestofante". (6)

Inoltre, dalla (5) possiamo concludere che

è falso che Beppe è un lestofante. (7)

e così, di nuovo per la regola di eliminazione della disgiunzione vera, usando come premesse la (6) e la (7), che:

il fratello di Beppe è un lestofante. (8)

Così abbiamo ottenuto, attraverso il solo ragionamento, informazioni molto utili che non sembravano affatto essere contenute nell'asserzione fatta dall'abitante dell'isola. Questo è un esempio di come il ragionamento logico possa metterci in condizione di *sapere più di quello che apparentemente sappiamo* ed è proprio questa la caratteristica che lo rende così utile in pratica.

Lo schema di ragionamento usato in questo esempio si rivela utile in molte situazioni e può essere chiamato *ragionamento per esclusione*.

> *Se è vera una disgiunzione P* oppure *Q, esaminate separatamente l'ipotesi secondo cui è vera P e l'ipotesi secondo cui è vera Q. Se da una delle due ipotesi potete inferire una contraddizione, cioè che una certa proposizione è al tempo stesso vera e falsa, allora potete scartarla e concludere che deve essere vera l'altra.*

Ragionamento per esclusione

Naturalmente, la correttezza di questo schema di ragionamento si basa su quello che abbiamo chiamato *Principio di non-contraddizione*:

> PRINCIPIO DI NON-CONTRADDIZIONE: data una qualunque proposizione P e un qualunque stato di cose S, P non può essere al tempo stesso vera e falsa in S.

Il *Principio di Non-Contraddizione*, insieme al *Principio di Bivalenza* (vedi Dispensa 3), sta alla base della *logica classica*. Per Aristotele, si tratta del "più saldo di tutti i principi" (*Metafisica*, IV, 3, 1005b). Nelle sue stesse parole: "è impossibile che il medesimo attributo, nel medesimo tempo, appartenga e non appartenga al medesimo oggetto e nella medesima relazione" (*Ibidem*).

Esercizio 2 *Supponete che un'abitante dell'isola, diciamo Mario, vi dica "io e mio fratello siamo entrambi lestofanti". Riuscite, applicando lo schema di ragionamento per esclusione, a dedurre di che tipo è Mario e di che tipo è suo fratello?*

Esercizio 3 *Supponete che un'abitante dell'isola vi dica "io sono un lestofante". Che cosa potete concludere?*

Il problema della piccionaia

Abbiamo una piccionaia con cinque cellette e tre piccioni chiamati "Duke", "Mike" e "Tina". Ciascuna celletta può ospitare al massimo un piccione e le cellette sono disposte come nella figura qui sotto:

1	2	3	4	5

Il nostro problema è quello di scoprire quale celletta è occupata da quale piccione in un dato momento, ma spesso non siamo in grado di osservare la piccionaia direttamente. Tuttavia, possiamo ottenere informazioni su di essa e possiamo cercare di inferire da queste informazioni la posizioni dei piccioni. Chiameremo questo problema *il problema della piccionaia*. Per *mondo possibile* relativamente al problema della piccionaia intendiamo una descrizione che specifichi quale celletta viene occupata da quale piccione (se è occupata).

Se rappresentiamo Duke con "d", Mike con "m" e Tina con "t", uno di questi mondi possibili è rappresentato nella figura qui sotto:

1	2	3	4	5
d	m			t

Questo è il mondo possibile in cui Duke occupa la celletta n.1, Mike la colletta n. 2 e Tina la celletta n. 5.

Informazioni di sfondo

Certe informazioni relative alla piccionaia cambiano nel tempo perché i piccioni possono occupare cellette differenti in momenti diversi. Tuttavia vi sono informazioni che non cambiano nel tempo perché sono, per così dire, "strutturali" e le chiameremo *informazioni di sfondo* relative al problema della piccionaia.

Informazioni di sfondo per il problema della piccionaia

INFORMAZIONE DI SFONDO N. 1: È impossibile che due o più piccioni occupino la stessa celletta (si tratta di cellette "singole").

INFORMAZIONE DI SFONDO N. 2: E' impossibile che uno stesso piccione occupi più di una celletta nello stesso momento.

Queste informazioni di sfondo devono valere in *tutti* i mondi possibili relativi al problema della piccionaia.

Esercizio 4 *Se assumiamo che ciascun piccione occupi una celletta, quanti sono i "mondi possibili" per il problema della piccionaia? E quanti sono se non facciamo questa assunzione?*

Il linguaggio della piccionaia

Tutte le informazioni di cui abbiamo bisogno per risolvere un dato esempio del problema della piccionaia possono essere codificate in un linguaggio molto semplice che chiameremo *il linguaggio della piccionaia* o, in breve, LP. In LP abbiamo bisogno di un insieme di proposizioni "semplici" che ci consentano di asserire che un dato piccione occupa una data celletta, per esempio "Tina occupa la celletta n. 3", "Mike occupa la celletta n. 1", e così via. Queste proposizioni vengono dette *proposizioni elementari* (o anche *proposizioni atomiche*). Esse possono essere ottenute a partire dal seguente schema:

Linguaggio della piccionaia

--- occupa la celletta n. ... (*)

riempiendo i due spazi vuoti rappresentati dai trattini e dai puntini rispettivamente con il nome di un piccione e con il nome di una celletta.

Un'espressione come (*), che differisce da una proposizione ordinaria per il fatto di avere spazi vuoti nelle posizioni usualmente occupate da nomi, viene detta una *proposizione aperta*.

Proposizioni aperte e chiuse

Una proposizione aperta si trasforma in una proposizione ordinaria riempiendo i suoi spazi vuoti con nomi appropriati. Per questo una proposizione ordinaria viene anche detta *proposizione chiusa*.

A questo punto ci servono le parole logiche booleane per combinare queste proposizioni elementari fra loro in modo da formare proposizioni più complesse e rappresentare informazioni come:

Proposizioni complesse di LP

(1) o Mike occupa la celletta n. 1 oppure Duke occupa la celletta n. 1

(2) Tina non occupa la celletta n. 3

(3) Duke occupa la celletta n. 3 e Mike la celletta n. 4

e così via. Questo processo di combinazione può naturalmente essere reiterato, così LP conterrà alla fine proposizioni di complessità arbitraria. Per esempio la proposizione che risulta da (1) e (2) combinandole con la congiunzione sarà anch'essa una proposizione complessa di LP.

Possiamo abbreviare (*) scrivendo:

$$O(\text{---}, \dots), \qquad (**)$$

e in nomi dei piccioni con le loro iniziali scritte in lettere minuscole. Allora tutte le proposizioni elementari possono essere scritte nella forma:

Proposizioni elementari di LP

$$O(a, n), \qquad (***)$$

dove "a" sta per l'abbreviazione del nome di uno dei piccioni, e "n" sta per uno dei numerali "1", "2", "3", "4" e "5". Così, per esempio, "$O(t, 3)$" abbrevia "Tina occupa la celletta n. 3" e "$O(m, 1)$" abbrevia "Mike occupa la celletta n. 1".

A questo punto è conveniente introdurre ulteriori convenzioni notazionali. D'ora in poi per denotare la congiunzione "e" useremo il simbolo "$\wedge$", per denotare la disgiunzione "oppure" useremo il simbolo "$\vee$" e per denotare la negazione "non" useremo il simbolo "$\neg$".

E' utile usare i simboli perché spesso nel linguaggio naturale una stessa parola logica può essere rappresentata da espressioni linguistiche diverse. Considerate per esempio la congiunzione. Per congiungere logicamente due proposizioni P e Q nel linguaggio naturale, possiamo dire "P e Q" oppure "sia P sia Q", senza contare il fatto che in lingue diverse le espressioni usate per la congiunzione sono ovviamente diverse. Lo stesso vale per le altre parole logiche. Dato che siamo interessati al ruolo che esse svolgono nell'inferenza, che è indipendente dall'espressione linguistica usata per rappresentarle, è conveniente usare dei simboli univoci come quelli che abbiamo appena introdotto.

Così, per esempio, le proposizioni complesse (1)–(3) del paragrafo precedente sopra si scriveranno, rispettivamente,

(1) $O(m,1) \vee O(d,1)$

(2) $\neg O(t,3)$

(3) $O(d,3) \wedge O(m,4)$.

Data una congiunzione "$P \wedge Q$" chiameremo "P" il suo *primo congiunto* (o *congiunto di sinistra*) e "Q" il suo *secondo congiunto* (o *congiunto di destra*).

Data una disgiunzione "$P \vee Q$" chiameremo "P" il suo *primo disgiunto* (o *disgiunto di sinistra*) e "Q" il suo *secondo disgiunto* (o *disgiunto di destra*).

La possibilità di reiterare il processo di combinazione delle proposizioni mediante le parole logiche ci costringe a introdurre un dispositivo per disambiguare le proposizioni. Consideriamo la combinazione di (1) e (2) per mezzo di "$\wedge$":

$$O(m,1) \vee O(d,1) \wedge \neg O(t,3) \tag{9}$$

Questa proposizione è ambigua e può essere letta in due modi diversi:

$$O(m,1) \vee (O(d,1) \wedge \neg O(t,3)) \tag{10.1}$$

cioè, in linguaggio ordinario, "o Mike occupa la celletta n. 1, o Duke occupa la celletta n. 1 e Tina non occupa la celletta n. 3", oppure

$$(O(m,1) \vee (O(d,1)) \wedge \neg O(t,3), \tag{10.2}$$

cioè "o Mike occupa la celletta n. 1 o Duke occupa la celletta n. 1, e Tina non occupa la celletta n. 3". La proposizione (10.1) è una disgiunzione il cui primo disgiunto è una proposizione elementare e il cui secondo disgiunto è una congiunzione, mentre la (10.2) è una congiunzione il cui primo congiunto è una disgiunzione e il cui secondo congiunto è una proposizione elementare.

Le parentesi svolgono dunque un ruolo essenziale per eliminare ambiguità come quelle presenti nella (9). Nel linguaggio ordinario un ruolo analogo è svolto, anche se in modo meno preciso, dalla punteggiatura.

Osservate che la (10.1) e la (10.2) non hanno affatto lo stesso significato. Considerate un "mondo possibile", chiamiamolo w, in cui:

(11.1) Mike occupa la celletta n. 1

(11.2) Duke occupa la celletta n. 5

(11.3) Tina occupa la celletta n. 3.

In w la (10.1) è vera perché è una disgiunzione il cui primo disgiunto è vero, ma la (10.2) è falsa perché è una congiunzione il cui secondo congiunto è falso.

Dunque è essenziale distinguere fra i due possibili modi di leggere la (9). A questo scopo dobbiamo estendere LP mediante qualche dispositivo che svolga lo stesso ruolo della virgola in Italiano, cioè il ruolo di indicare in che modo devono essere raggruppate le varie parti di una proposizione complessa. Uno dei dispositivi più diffusi, e probabilmente il migliore, è costituito dalle due parentesi "(" e ")".

Ricapitolando, LP deve includere tre categorie di espressioni:

1. un insieme (finito) di proposizioni elementari
2. le parole logiche booleane, "$\wedge$", "$\vee$" e "$\neg$"
3. le due parentesi, "(" e ")".

Le *proposizioni chiuse* di LP sono definite nel modo seguente:

Proposizioni chiuse di LP

1. Tutte le proposizioni elementari di LP sono proposizioni chiuse di LP
2. se P (qualunque essa sia) è una proposizione chiusa di LP, anche la sua negazione $\neg P$ è una proposizione chiusa di LP
3. se P e Q (quali che siano) sono proposizioni chiuse di LP, anche la loro congiunzione $P \wedge Q$ e la loro disgiunzione $P \vee Q$ sono proposizioni chiuse di LP.

Notate che questa definizione ha un caratere "iterativo" o, come si dice in matematica, "ricorsivo". Nella seconda e nella terza clausola P and Q possono essere proposizioni elementari, ma anche proposizioni di complessità arbitraria il cui carattere di "proposizione chiusa di LP" sia stato già stabilito in precedenza mediante la stessa definizione. Per esempio, possiamo facilmente stabilire che"$O(m,1) \vee O(d,1)$" è una proposizione chiusa di LP, poichè si tratta di una disgiunzione di proposizioni elementari e tutte le proposizioni elementari (per la clausola 1 della definizione) sono proposizioni chiuse di LP, per cui lo è (per la clausola 3) anche la loro disgiunzione. Analogamente possiamo stabilire che "$\neg O(t,3)$" è una proposizione chiusa di LP (per la clausola 2) in quanto si tratta della negazione di una proposizione elementare e (di nuovo per la clausola 1) tutte le proposizioni elementari sono proposizioni chiuse di LP. Ebbene, dato che sia "$O(m,1) \vee O(d,1)$" sia "$\neg O(t,3)$" sono proposizioni chiuse di LP (lo abbiamo appena stabilito), allora per la clausola 3 anche la loro congiunzione "$(O(m,1) \vee O(d,1)) \wedge \neg O(t,3)$" e la loro disgiunzione "$(O(m,1) \vee O(d,1)) \vee \neg O(t,3)$" sono proposizioni chiuse di LP. Dovrebbe essere chiaro che questo procedimento può essere reiterato indefinitamente per formare proposizioni chiuse di complessità arbitraria.

Deduzioni e controesempi nel linguaggio della piccionaia

Vediamo ora alcuni semplici esempi di deduzioni nel linguaggio della piccionaia. Ogni deduzione consiste semplicemente di una successione di applicazioni delle regole di inferenza—di eliminazione e di introduzione—che abbiamo studiato nella Dispensa 1 e che riassumiamo nelle Tabelle 1 and 2 utilizzando i simboli per le parole logiche che abbiamo introdotto sopra. Inoltre, per semplificare la scrittura delle regole, abbreviamo l'asserzione "è vero che P" con $V\,P$ e l'asserzione "è falso che P" con $F\,P$.

Tabella 1: Regole di eliminazione

$$\frac{V\,P \wedge Q}{V\,P} \qquad \frac{V\,P \wedge Q}{V\,Q} \qquad \frac{\begin{array}{l} F\,P \wedge Q \\ V\,P \end{array}}{F\,Q} \qquad \frac{\begin{array}{l} F\,P \wedge Q \\ V\,Q \end{array}}{F\,P}$$

$$\frac{F\,P \vee Q}{F\,P} \qquad \frac{F\,P \vee Q}{F\,Q} \qquad \frac{\begin{array}{l} V\,P \vee Q \\ F\,P \end{array}}{V\,Q} \qquad \frac{\begin{array}{l} V\,P \vee Q \\ F\,Q \end{array}}{V\,P}$$

$$\frac{V\,\neg P}{F\,P} \qquad \frac{F\,\neg P}{V\,P}$$

Esempio 1 Supponete di avere ricevuto le seguenti informazioni:

$$\frac{V\,P \quad V\,Q}{V\,P \wedge Q} \qquad \frac{F\,P}{F\,P \wedge Q} \qquad \frac{F\,Q}{F\,P \wedge Q}$$

$$\frac{F\,P \quad F\,Q}{F\,P \vee Q} \qquad \frac{V\,P}{V\,P \vee Q} \qquad \frac{V\,Q}{V\,P \vee Q}$$

$$\frac{V\,P}{F\,\neg P} \qquad \frac{F\,P}{V\,\neg P}$$

Tabella 2: Regole di introduzione

1. È falso che né Duke né Mike occupino la celletta n.1
2. o Duke non occupa la celletta n. 1 oppure Mike occupa la celletta n. 4
3. Mike non occupa la celletta n. 4

Qual è la celletta occupata da Mike? Vediamo se riusciamo a *dedurre* questa informazione dalle informazioni ricevuto applicando le nostre regole di inferenza.

In primo luogo traduciamo le informazioni ricevute nel linguaggio della piccionaia:

(1*) $F\,\neg O(d,1) \wedge \neg O(m,1)$

(2*) $V\,\neg O(d,1) \vee O(m,4)$

(3*) $F\,O(m,4)$

Osserviamo ora che la premessa (2*) ha la forma logica di una disgiunzione vera. Inoltre la (3*) asserisce la falsità del secondo disgiunto. Dunque la (2*) e la (3*) esemplificano le premesse di una delle nostre regole di eliminazione della disgiunzione vera:

$$\frac{V\,P \vee Q \quad F\,Q}{V\,P}$$

dove P è esemplificata dalla proposizione "$\neg O(d,1)$" e Q è esemplificata dalla proposizione "$O(m,4)$". In tal caso siamo autorizzati ad applicare la regola e concludere che la proposizione che esemplifica P, cioè "$\neg O(d,1)$" deve essere vera:

(4) $V\,\neg O(d,1)$

A questo punto osserviamo che la (1*) e la (4) esemplificano le premesse di un'altra regola, quella di eliminazione della congiunzione falsa:

$$\frac{\begin{array}{l} F\, P \wedge Q \\ V\, P \end{array}}{F\, Q}$$

dove P è esemplificata di nuovo dalla proposizione "$\neg O(d,1)$" mentre Q stavolta è esemplificata dalla proposizione "$\neg O(m,1)$". In tal caso siamo autorizzati ad applicare la regola e concludere che la proposizione che esemplifica Q, cioè "$\neg O(m,1)$" deve essere falsa:

(5) $F\, \neg O(m,1)$.

A sua volta, la (5) esemplifica la premessa di una delle regole di eliminazione della negazione, e precisamente:

$$\frac{F\, \neg P}{V\, P}$$

dove P è esemplificata da "$O(m,1)$", per cui possiamo concludere che P deve essere vera:

(6) $V\, O(m,1)$.

Siamo così riusciti a *dedurre* la posizione di Mike dalle informazioni ricevute attraverso una sequenza di applicazioni delle nostre regole di eliminazione.

La deduzione svolta nell'esempio mostra che l'inferenza

$$\frac{\begin{array}{l} F\, \neg O(d,1) \wedge \neg O(m,1) \\ V\, \neg O(d,1) \vee O(m,4) \\ F\, O(m,4) \end{array}}{V\, O(m,1)}$$

è un'inferenza *corretta*. Le nostre regole ci hanno dunque consentito di stabilire la correttezza di questa inferenza riducendola a una successione di inferenze più semplici, la cui correttezza è immediatamente ovvia, e che risultano dall'applicazione di un insieme prefissato di regole. Osservate che, anche se in questo caso qualcuno potrebbe anche aver "intuito" la risposta corretta, noi l'abbiamo ottenuta mediante regole che possono essere applicate *meccanicamente*, solo guardando alla forma delle proposizioni e controllando se esse esemplificano le premesse di qualcuna delle regole. Tuttavia, la nostra deduzione "meccanica" è abbastanza fedele al procedimento intuitivo che viene seguito per risolvere questo problema, limitandosi a rendere *espliciti* dei passaggi che spesso, nel ragionamento intuitivo, rimangono impliciti.

Tuttavia le informazioni (1^*–3^*) *non ci consentono di determinare quali cellette sono occupate dagli altri piccioni*. Questo vuol dire che nessuna inferenza che ha come premesse (1^*–3^*) e come conclusione una proposizione che assegna una celletta a Duke o a Tina può essere corretta. Per esempio l'inferenza:

$$\begin{array}{l} F\ \neg O(d,1) \wedge \neg O(m,1) \\ V\ \neg O(d,1) \vee O(m,4) \\ F\ O(m,4) \\ \hline O(d,3) \end{array}$$

non è corretta. Un controesempio è dato dal seguente "mondo possibile":

1	2	3	4	5
m				d

Non è difficile verificare che si tratta di un controesempio. Infatti, dato che Mike occupa la celletta n. 1, è ovviamente falso che né Duke né Mike occupino la 1, e così la premessa (1*), che asserisce appunto la falsità di questa proposizione, dice qualcosa in questo mondo possibile risulta vero. Inoltre, dato che Duke non occupa la n. 1, la disgiunzione "o Duke non occupa la 1 oppure Mike occupa la 4" è anch'essa vera. Dunque anche la seconda premessa risulta vera in questo mondo possibile e lo stesso dicasi per la terza premessa (dal momento che Duke non occupa la 3, ma la 4). Dunque le tre premesse dell'inferenza che stiamo considerando sono tutte *vere* nel mondo possibile che abbiamo descritto. Tuttavia, è chiaro che in questo mondo possibile la conclusione è falsa, e perciò esso costituisce un *controesempio* sufficiente a mostrare che l'inferenza *non è corretta*.

Esercizio 5 *Mostrate, descrivendo un* controesempio, *che la seguente inferenza* non *è corretta:*

$$\begin{array}{l} F\ \neg O(d,1) \wedge \neg O(m,1) \\ V\ \neg O(d,1) \vee O(m,4) \\ F\ O(m,4) \\ \hline O(d,1) \end{array}$$

Esempio 2 Supponete di avere ricevuto le seguenti informazioni:

(1) È vero che Mike occupa la 1 e Duke la 5

(2) È falso che Duke occupa la 5 e Tina non occupa la 3.

Potete dedurre la posizione di Tina? Vediamo. In primo luogo traduciamo le nostre informazioni nel linguaggio della piccionaia:

(1*) $V\ O(m,1) \wedge O(d,5)$

(2*) $F\ O(d,5) \wedge \neg O(t,3)$.

Adesso controlliamo se siamo in grado di applicare qualcuna delle nostre regole. Dato che la (1*) ha la forma di una congiunzione vera, possiamo senza indugio applicare le nostre regole di eliminazione della congiunzione vera:

$$\frac{V\,P \wedge Q}{V\,P} \qquad \frac{V\,P \wedge Q}{V\,Q}$$

dove P e Q questa volta sono esemplificate, rispettivamente, da "$O(m,1)$" e "$O(d,5)$". Applicando la prima regola possiamo concludere che:

(3) $V\,O(m,1)$,

e, applicando la seconda, che

(4) $V\,O(d,5)$.

Ma ora abbiamo due proposizioni, la (2*) e la (4) che esemplificano le premesse di una delle regole di eliminazione della congiunzione falsa:

$$\frac{\begin{array}{l} F\,P \wedge Q \\ V\,P \end{array}}{F\,Q}$$

dove P è esemplificata da "$O(d,5)$" e Q da "$\neg O(t,3)$", il che ci autorizza ad applicare la regola e a concludere che Q deve essere falsa, cioè:

(5) $F\,\neg O(t,3)$.

Poiché la (5) esemplifica a sua volta la premessa della regola di eliminazione della negazione falsa:

$$\frac{F\,\neg P}{V\,P}$$

possiamo concludere che P, cioè "$O(t,3)$" deve essere vera:

(6) $V\,O(t,3)$.

Dato che dovremo spesso fare riferimento alle regole di inferenza, è conveniente assegnare loro dei nomi convenzionali più brevi di quelli che abbiamo usato fino ad ora. Abbiamo visto che, per ciascuna parola logica, ci sono regole di eliminazione che si applicano a proposizioni vere che contengono quella parola logica e regole di eliminazione che sia applicano a proposizioni false che la contengono. Possiamo convenire di usare, per denotare queste regole, un'espressione formata da "Elim", più il simbolo della parola logica in questione, più "V" o "F", a seconda se la premessa principale sia una proposizione di cui si asserisce la verità o la falsità. Per esempio, le regole

Abbreviazioni per indicare le regole di inferenza di eliminazione della congiunzione falsa, possono essere convenzionalmente indicate con "Elim∧F", mentre quelle di eliminazione della disgiunzione vera, le indichiamo con "Elim∨V", ecc. Nel caso in cui ci siano due regole che corrispondono a questa descrizione, come è effettivamente il caso sia di quelle per la congiunzione falsa sia di quelle per la disgiunzione vera, possiamo anche aggiungere a queste espressioni un "1" oppure un "2" per indicare se si tratti della prima o della seconda di queste regole. Così la prima regola di eliminazione per la disgiunzione vera sarà indicata da "Elim∨V1". Possiamo usare una convenzione analoga per le regole di introduzione. Per esempio l'unica regola di introduzione della congiunzione vera, sarà indicata da "Int∧V", mentre le due regole di introduzione della congiunzione falsa, saranno indicate, rispettivamente, da "Int∧F " e "Int∧F2".

Quando si espone una deduzione è sempre utile indicare, per ogni conclusione ottenuta, qual è la regola che è stata applicata e quali sono le premesse a cui è stata applicata. A questo scopo è necessario numerare sempre sia le premesse sia le conclusioni che si ottengono nel corso del ragionamento. Si deve poi indicare a fianco di ciascuna conclusione ottenuta il nome abbreviato della regola mediante la quale è stata ottenuta e, fra parentesi tonde, i numeri delle premesse da cui è stata ottenuta. Così un modo standard di scrivere la deduzione che abbiamo sviluppato nell'Esempio 1 è il seguente ("IR" sta per "informazione ricevuta"):

(1)	$F\,\neg O(d,1) \wedge \neg O(m,1)$	(IR)
(2)	$V\,\neg O(d,1) \vee O(m,4)$	(IR)
(3)	$F\,O(m,4)$	(IR)
(4)	$V\,\neg O(d,1)$	Elim∨V2 (2,3)
(5)	$F\,\neg O(m,1)$	Elim∧F1 (1,4)
(6)	$V\,O(m,1)$	Elim¬F (5)

Esempio 3 Negli esempi precedenti abbiamo applicato solo regole di eliminazione, per cui potrebbe sembrare che le regole di introduzioni siano inutili. Il seguente esempio mostra che non è così. Supponete di avere ricevuto le seguenti informazioni:

(1) O Mike occupa la 1 e Duke la 2, oppure Mike occupa la 3.

(2) O Mike non occupa la 1 oppure Tina non occupa la 4

(3) Tina occupa la 4.

Riusciamo a determinare la posizione di Mike?

In primo luogo traduciamo le nostre premesse in LP.

(1*) $V\,(O(m,1) \wedge O(d,2)) \vee O(m,3)$.

(2*) $V\,\neg O(m,1) \vee \neg O(t,4)$

(3*) $V\,O(t,4)$.

In questo caso non possiamo applicare direttamente nessuna delle nostre di eliminazione alla premessa (1*). Infatti, questa premessa ha la forma di una disgiunzione vera e sappiamo che le nostre regole di eliminazione della disgiunzione vera richiedono entrambe una premessa addizionale—la falsità di una delle due proposizioni disgiunte—che in questo caso non è disponibile (non abbiamo né l'informazione che è falsa "$O(m,1) \wedge O(d,2)$", né l'informazione che è falsa "$O(m,3)$"). La premessa (2*) ha anch'essa la forma di una disgiunzione vera, e dunque per applicare ad essa una delle nostre regole di eliminazione dovremmo, anche in questo caso, avere a disposizione una premessa addizionale che asserisca o la falsità di "$\neg O(m,1)$" oppure la falsità di "$\neg O(t,4)$". In senso stretto nessuna di queste informazioni è disponibile, ma una delle due, la falsità di "$\neg O(t,4)$" può essere immediatamente dedotta dalla (3*) mediante la nostra regola Int¬F (introduzione della negazione falsa):

(4) $F\,\neg O(t,4)$.

A questo punto, sfruttando questa conclusione, possiamo applicare la regola elim∨V2 (la seconda regola di eliminazione della disgiunzione vera) alla (2*) e alla (4) ottenendo la conclusione

(5) $V\,\neg O(m,1)$

alla quale possiamo immediatamente applicare la regola elim¬V (eliminazione della negazione vera):

(6) $F\,O(m,1)$.

Osserviamo ora che dalla (6), per Int∧F1 (la prima regola di introduzione della congiunzione falsa), possiamo ottenere

(7) $F\,(O(m,1) \wedge O(d,2))$,

e questo ci fornisce la premessa addizionale che ci mancava per applicare la regola di eliminazione della disgiunzione vera alla (1*). Dunque dalla (1*) e dalla (7), per elim∨V1, otteniamo la conclusione

(8) $O(m,3)$

che ci fornisce la soluzione del nostro problema iniziale.

La deduzione completa avrà dunque la forma seguente:

(1)	$V\,(O(m,1) \wedge O(d,2)) \vee O(m,3)$	(IR)
(2)	$V\,\neg O(m,1) \vee \neg O(t,4)$	(IR)
(3)	$V\,O(t,4)$	(IR)
(4)	$F\,\neg O(t,4)$.	int¬F (3)
(5)	$V\,\neg O(m,1)$	Elim∨V2 (2,4)
(6)	$F\,O(m,1)$	Elim¬V (5)
(7)	$F\,(O(m,1) \wedge O(d,2))$	int∧F1 (6)
(8)	$O(m,3)$	elim∨V1 (1,7).

Osservate che nell'esempio che abbiamo appena svolto le regole di introduzione sono state usate con un *obiettivo preciso*: ottenere informazioni che possano servire, come opportune premesse addizionali, per applicare le regole di eliminazione. Più avanti vedremo come questa osservazione può essere tradotta in una vera e propria *strategia di deduzione*.

Proposizioni e regole non-segnate

Abbiamo visto che asserire la falsità di una proposizione P equivale ad asserire la verità della sua negazione $\neg P$. Ciò, oltre ad essere intuitivamente ovvio, è una conseguenza immediata delle nostre regole di inferenza. Infatti da "È falso che P" possiamo dedurre "È vero che $\neg P$" mediante la regola Int¬F (introduzione della negazione falsa). Viceversa, da "È vero che $\neg P$" possiamo dedurre "È falso che P" mediante la regola Elim¬V (eliminazione della negazione vera). Così le due asserzioni si possono dedurre l'una dall'altra: se è vera l'una deve essere vera anche l'altra, e viceversa. D'altra parte, è altrettanto intuitivo che asserire"È vero che P"equivale ad asserire"P":

Dunque possiamo esprimere le informazioni che abbiamo a disposizione sia nella forma di *proposizioni segnate*—cioè espressioni del tipo $V\,P$ or $F\,P$ che abbreviano rispettivamente le asserzioni "È vero che P" ed "È falso che P"—sia nella forma di proposizioni *non-segnate*, cioè proposizioni che non contengono i segni "V" ed "F", semplicemente eliminando il segno "V" davanti alle proposizioni di cui si asserisce la verità e sostituendo il segno "F" con il segno di negazione "¬".

Questo si suggerisce la possibilità di riformulare le nostre regole di eliminazione e di introduzione facendo a meno dei segni "V" ed "F", davanti alle premesse e alle conclusioni. Ciascuna asserzione della forma "V P" può essere sostituita semplicemente da "P", omettendo il segno V, mentre ciascuna asserzione della forma "$F\,P$" può essere sostituita da "$\neg P$", dove il ruolo di "F" è svolto dalla negazione ¬. Nelle Tabelle 3 e 4 trovate le stesse regole delle Tabelle 1 e 2 riformulate come abbiamo appena spiegato, sostituendo l'espressione

Regole non-segnate

"È falso che" con il segno di negazione ed eliminando l'espressione "È vero che". Le regole di inferenza così ottenute, che chiameremo regole *non-segnate*, sono chiaramente equivalenti alle precedenti, che chiameremo *segnate*. Come potete constatare, nella versione non-segnata c'è *una sola* regola di eliminazione della negazione e *una sola* regola di introduzione della negazione, mentre nella versione segnata ci sono due regole di eliminazione e due regole di introduzione (perchè?).

Tabella 3: Regole di eliminazione

$$\frac{P \wedge Q}{P} \qquad \frac{P \wedge Q}{Q} \qquad \frac{\begin{array}{l}\neg(P \wedge Q)\\ P\end{array}}{\neg Q} \qquad \frac{\begin{array}{l}\neg(P \wedge Q)\\ Q\end{array}}{\neg P}$$

$$\frac{\neg(P \vee Q)}{\neg P} \qquad \frac{\neg(P \vee Q)}{\neg Q} \qquad \frac{\begin{array}{l}P \vee Q\\ \neg P\end{array}}{Q} \qquad \frac{\begin{array}{l}P \vee Q\\ \neg Q\end{array}}{P}$$

$$\frac{\neg\neg P}{P}$$

Tabella 4: Regole di introduzione

$$\frac{\begin{array}{l}P\\ Q\end{array}}{P \wedge Q} \qquad \frac{\neg P}{\neg(P \wedge Q)} \qquad \frac{\neg Q}{\neg(P \wedge Q)}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\neg P\\ \neg Q\end{array}}{\neg(P \vee Q)} \qquad \frac{P}{P \vee Q} \qquad \frac{Q}{P \vee Q}$$

$$\frac{P}{\neg\neg P}$$

Deduzioni con informazioni di sfondo

Negli esempi di deduzione che abbiamo considerato finora, le informazioni di sfondo relative al problema della piccionaia ("nessuna celletta può essere occupata da più di un piccione", "nessun piccione può occupare più di una celletta") non hanno svolto alcun ruolo. Vediamo ora un esempio in cui è invece essenziale, per ottenere l'informazione desiderata, fare ricorso alle informazioni di sfondo.

Esempio 4 Supponete di avere ricevuto le seguenti informazioni

(1) O Duke o Mike occupano la celletta n. 1

(2) Non è vero che Mike occupa la 1 e Tina non occupa la 3

(3) Tina occupa la 5.

Siamo in grado di determinare la posizione di Duke?

Come al solito, iniziamo traducendo le informazioni ricevute in LP. Conveniamo di usare proposizioni *non-segnate* e dunque le corrispondenti regole non-segnate delle Tabelle 3 e 4.

(1*) $O(d,1) \vee O(m,1)$

(2*) $\neg(O(m,1) \wedge \neg O(t,3))$

(3*) $O(t,5)$.

Osserviamo che non è possibile applicare *immediatamente* nessuna delle nostre regole di eliminazione. La (1*) ha la forma di una disgiunzione vera, così per applicare ad essa la regola di eliminazione pertinente (nella versione non-segnata) dovremmo avere a disposizione o l'informazione che $\neg O(d,1)$ oppure l'informazione $\neg O(m,1)$. Per motivi analoghi, non possiamo applicare la regola di eliminazione pertinente—cioè la regola di eliminazione della congiunzione falsa (sempre nella versione non-segnata)— alla (2*), perché per farlo dovremmo avere a disposizione o l'informazione che $\neg O(m1)$ oppure l'informazione che $\neg O(t,3)$.

Tuttavia, dalla (3*) e dall'informazione di sfondo n. 2 ("nessun piccione può occupare più di una celletta") possiamo facilmente ricavare

(4) $\neg O(t,3)$

e ora siamo in grado di applicare la regola elim∧F2 (nella versione non-segnata) alla (2*) e alla (4), per concludere:

(5) $\neg O(m,1)$.

A questo punto possiamo applicare la regola elim∨V2 (nella versione non-segnata) alla (1*) e alla (5), il che ci permette di concludere

(6) $O(d,1)$.

La deduzione avrà dunque la forma seguente ("IS" sta per "informazioni di sfondo"):

(1)	$O(d,1) \vee O(m,1)$	(IR)
(2)	$\neg(O(m,1) \wedge \neg O(t,3))$	(IR)
(3)	$O(t,5)$	(IR)
(4)	$\neg O(t,3)$	dalla (3) per IS
(5)	$\neg O(m,1)$	Elim∧F2 (2,4)
(6)	$O(d,1)$	Elim∨V2 (1,5)

Il ruolo svolto dalle informazioni di sfondo in una deduzione può sempre essere reso *esplicito*. Possiamo cioè esprimere la porzione rilevante delle informazioni di sfondo come una *premessa addizionale*. In questo caso la porzione rilevante delle informazioni di sfondo è quella secondo cui Tina non può occupare sia la celletta n. 5 sia la celletta n. 3. In LP possiamo esprimere questa informazione con "$\neg[O(t,5) \wedge O(t,3)]$". Se aggiungiamo questa ulteriore premessa alle informazioni ricevute otteniamo una deduzione completa ed esplicita in cui la conclusione che Tina non occupa la 3 è ottenuta come conclusione della regola di eliminazione della congiunzione falsa. Tale deduzione avrà la forma seguente:

(1)	$O(d,1) \vee O(m,1)$	(IR)
(2)	$\neg(O(m,1) \wedge \neg O(t,3))$	(IR)
(3)	$O(t,5)$	(IR)
(4)	$\neg(O(t,5) \wedge O(t,3))$	(IS)
(5)	$\neg O(t,3)$	elim$\wedge$F1 (4,3)
(6)	$\neg O(m,1)$	Elim$\wedge$F2 (2,5)
(7)	$O(d,1)$	Elim$\vee$V2 (1,6)