

# Le onde elastiche

## Introduzione

Quando si lascia cadere un sasso su una superficie d'acqua calma si osservano delle circonferenze concentriche che si allontanano dal punto d'impatto a velocità radiale costante. Le particelle di acqua coinvolte dal passaggio di questa perturbazione non si spostano evidentemente dalla loro posizione, se non nella direzione ortogonale al passaggio della perturbazione. Stiamo assistendo a quello che in Fisica si chiama "fenomeno ondulatorio" o più semplicemente e come si usa comunemente dire in questo caso, onda. Essa consiste nella propagazione di una perturbazione, la caduta del sasso, lungo la superficie dell'acqua, senza spostamento di materia. Cessata la perturbazione, la superficie dell'acqua tornerà piuttosto rapidamente alla calma precedente.

Fenomeni ondulatori di questo tipo, con propagazione di un'onda da una sorgente senza spostamento di materia, sono numerosi in natura. Quando una persona parla, le sue corde vocali mettono in oscillazione le particelle di aria e la perturbazione prodotta si propaga nell'aria fino all'orecchio di chi ascolta. Quando le rocce si spaccano nella litosfera terrestre sotto l'accumulo dei cosiddetti sforzi tettonici o per risalita di un magma dentro un camino vulcanico, la perturbazione, che localmente produce una rottura nelle rocce, si propaga all'interno della Terra ed alla sua superficie come onde sismiche, che all'epicentro produrranno danni se sufficientemente intense, in quanto trasportano energia.

Tutte le onde, come quelle sismiche, trasportano energia, senza spostamento di materia, come abbiamo già osservato. Anche la luce è un fenomeno ondulatorio: sono onde elettromagnetiche e se rimaniamo esposti alla luce solare ci riscaldiamo, perché l'energia trasportata si trasforma in calore.

Le onde appartengono a due grandi famiglie:

1. le onde elettromagnetiche, che comprendono la luce visibile, le onde radio, i raggi infrarossi, i raggi X ed i raggi gamma. Useremo queste onde per indagini non invasive mediante il georadar.
2. le onde elastiche (o meccaniche o acustiche o sismiche: sono tutti sinonimi), come quelle che trasportano il suono, l'energia di un terremoto, l'impulso generato dalla caduta di un grave, un colpo di martello.

In questo capitolo parleremo di queste ultime.

Le onde sono un fenomeno spazio-temporale, nel senso che la forma di un'onda può essere osservata sia nel tempo, immaginando di essere fermi in un punto ed osservare il passaggio dell'onda (grafico della variazione dell'ampiezza dell'onda in funzione del tempo: figura 1, in basso), che osservando l'intero fenomeno ondoso nello stesso istante (grafico della variazione dell'ampiezza dell'onda in funzione della

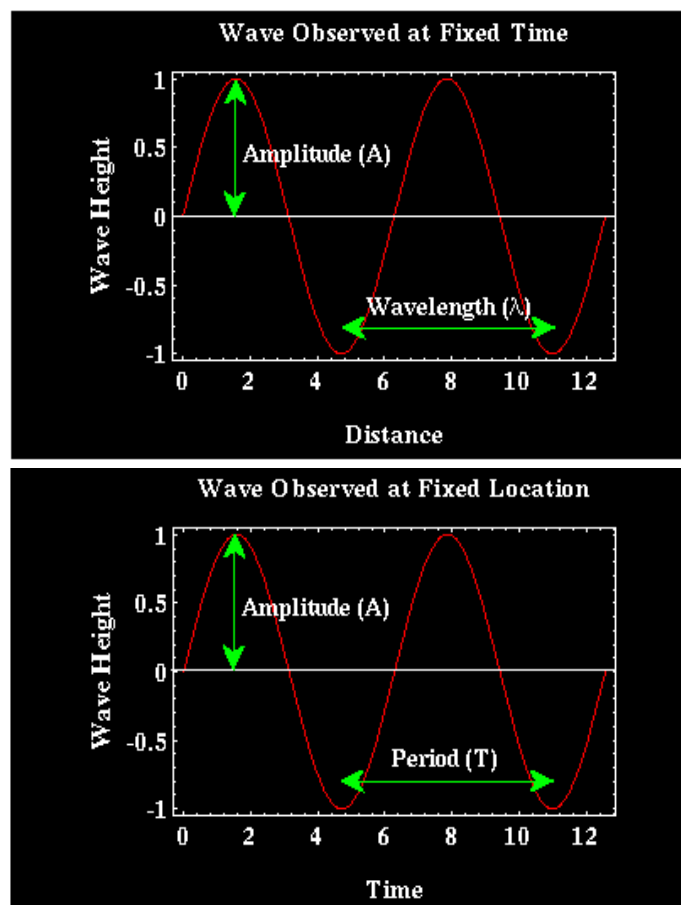


Figura 1 (dal sito internet: <http://www.earthsci.unimelb.edu.au/ES304/MODULES/SEIS/NOTES/waves.html>)

distanza dalla sorgente: figura 1, in alto).

Le onde sono caratterizzate da tre parametri: la velocità, la frequenza, la lunghezza d'onda (figura 1). Quest'ultima, di solito rappresentata con la lettera greca  $\lambda$ , è la distanza tra due creste del moto di oscillazione, come quelle prodotte alla superficie dell'acqua. Ciascuna posizione della particella oscillante rappresenta una "fase" dell'onda. Tutte le particelle che si trovano nello stesso "momento" di moto intorno alla loro posizione di equilibrio, ad esempio su una qualunque valle o cresta concentrica al punto di caduta del sasso nello stagno, sono nella stessa fase di oscillazione o di vibrazione. La frequenza "f" è il numero di oscillazioni che una singola particella compie nell'unità di tempo; se questa è il secondo, allora la frequenza si esprime in Hertz (Hz, 1Hz=1 ciclo/s). Il periodo "T" è il tempo che ogni particella impiega a compiere un'oscillazione completa, quindi  $T=1/f$ . In un periodo T l'onda compie un percorso pari ad una lunghezza d'onda, di conseguenza la velocità, la lunghezza d'onda ed il periodo (o frequenza) sono legati dalla semplice e nota relazione:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f .$$

La frequenza è una caratteristica della sorgente: quando uno strumento musicale emette una vibrazione, essa avviene ad una determinata frequenza, modulabile dal suonatore in modo opportuno (cambiando tasto al pianoforte, cambiando corda della chitarra o variando la lunghezza della corda stessa, spostando il dito sulla tastiera). La velocità è una caratteristica del mezzo, come vedremo in dettaglio tra poco. Ne consegue che la lunghezza d'onda può variare al variare del mezzo, a parità di frequenza della perturbazione.

Le onde elastiche consistono in piccole oscillazioni delle particelle dei mezzi materiali intorno alla loro posizione di equilibrio, dovute al passaggio di una perturbazione, come quella vista all'inizio. In sintesi, perché vi sia propagazione di onde elastiche sono necessari a) una sorgente, b) un mezzo materiale "elastico". Nel vuoto le onde elastiche non si propagano.

## **Tipi di onde elastiche**

Le onde elastiche si suddividono in due grandi famiglie:

1. le onde di volume, così dette perché si propagano all'interno dei corpi (figura 2); esse si suddividono a loro volta in:
  - onde P: il moto delle particelle avviene nella stessa direzione di propagazione dell'onda; per questo sono dette onde longitudinali o di compressione; sono le onde più veloci;
  - onde S: il moto delle particelle avviene nella direzione perpendicolare alla direzione di propagazione; per questo sono dette onde trasversali o di taglio.
2. le onde superficiali, che si propagano lungo la superficie del mezzo, e si suddividono a loro volta in:
  - onde di Love (L): sono onde superficiali con moto perpendicolare alla direzione di propagazione ma polarizzato nel piano orizzontale. Si propagano solo in presenza di uno strato superficiale a bassa velocità; non si propagano nei fluidi.
  - onde di Rayleigh (R): hanno movimento ellittico retrogrado con un asse dell'ellisse parallelo alla direzione dell'onda e l'altro ortogonale alla superficie libera.

Le onde superficiali sono un po' più lente delle onde S e, per la loro minore attenuazione con la distanza, sono responsabili dei danni che accompagnano i terremoti. Se nel caso di un terremoto il movimento è sussultorio, prevale la componente di onde di Rayleigh, mentre se il movimento è ondulatorio, prevale la componente di onde di Love. L'ampiezza di tali onde si smorza esponenzialmente con la profondità in funzione della frequenza: maggiore è la frequenza minore è la profondità di propagazione. Appartengono alle onde di Rayleigh le onde alla superficie dello stagno viste all'inizio. Nella figura 2 è riportata una rappresentazione suggestiva del moto delle particelle e delle deformazioni a cui vanno incontro i mezzi materiali quando sono attraversati da un'onda elastica.

## Parametri delle onde elastiche

Abbiamo appena detto che la velocità delle onde elastiche è una caratteristica intrinseca del mezzo attraversato.

Questa proprietà si presta quindi ad essere ricavata mediante opportune tecniche d'indagine non invasiva. Da che cosa dipende la velocità delle onde elastiche? Da due fattori: dalle proprietà elastiche e dalla densità. Tutti i corpi materiali sono elastici (chi più chi meno, naturalmente). S'intende per elasticità la capacità di deformarsi sotto uno sforzo applicato e di riprendere la forma iniziale una volta cessato lo sforzo. Ciò non sempre avviene: un corpo è plastico quando cambia forma e non riprende più quella precedente cessato lo sforzo; un corpo è viscoso quando anche sotto sforzi piccoli ma applicati per lungo tempo "si adatta" e, cessato lo sforzo, non riassume la forma originale. Tutti i materiali naturali sono elastici purchè gli sforzi applicati siano piccoli e di breve durata. In questo caso le deformazioni subite sono proporzionali agli sforzi applicati (è la nota legge di Hooke). Una roccia compatta od un pezzo di metallo sono all'evidenza caratterizzati da una velocità delle onde elastiche

più elevata di un sedimento sciolto o dell'aria. Perché? C'entrano le proprietà elastiche che modulano l'accelerazione con la quale le particelle vengono richiamate verso la loro posizione di equilibrio una volta spostate dalla perturbazione. Migliori le proprietà elastiche, quindi maggiore il richiamo elastico, maggiore sarà l'accelerazione, di conseguenza sarà maggiore la velocità istantanea delle particelle nel loro moto oscillatorio, e più rapida la trasmissione del moto alle particelle vicine. Quindi la velocità è senz'altro proporzionale a tali proprietà.

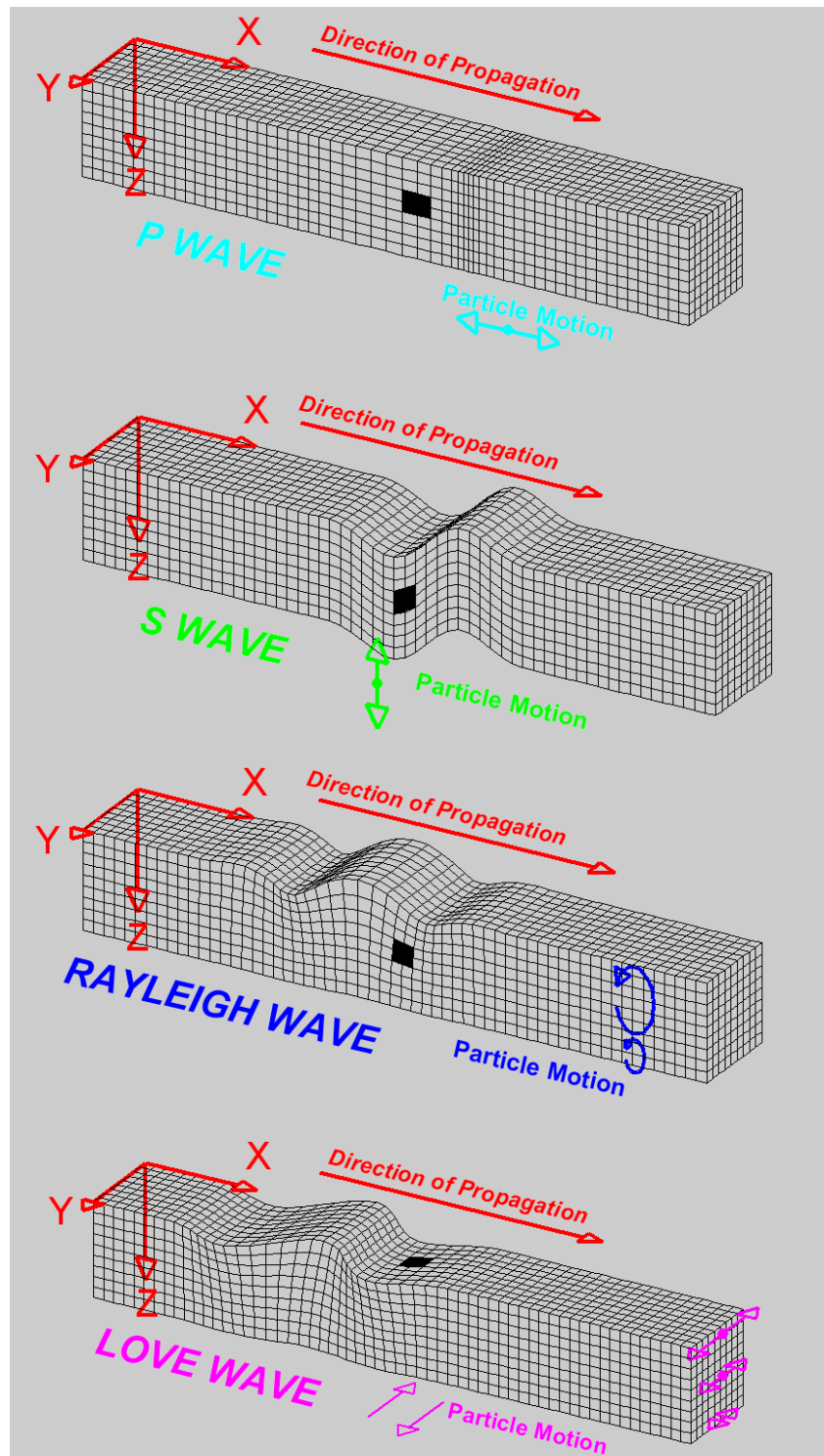


Fig. 2: tipi di deformazione del mezzo e di propagazione delle onde elastiche (dal sito internet:

<http://web.ics.purdue.edu/~braile/edumod/waves/WaveDemo.htm>

Si dimostra che la velocità delle onde P è data da:

$$v_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

dove  $\lambda$  e  $\mu$  sono le cosiddette costanti di Lamé e sono due parametri elastici che indicano rispettivamente la resistenza alla compressione triassiale, quindi la difficoltà a comprimere un elemento di volume all'interno del mezzo, e la resistenza allo sforzo di taglio. Per questo motivo  $\mu$  è detto anche modulo di rigidità. Si dimostra altresì che la velocità delle onde S è data da:

$$v_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Poiché  $\lambda$  e  $\mu$  sono parametri fisici, quindi i loro valori numerici sono sempre positivi, è sempre  $v_P > v_S$ . Per questo fatto i sismologi di fine dell'800, che osservavano nei primi sismogrammi arrivi successivi, denominarono i primi "P" ed i secondi "S".

La densità è come si vede a denominatore ed è quindi un fattore contrastante. Il lettore ricorderà il secondo principio della dinamica di Newton: una forza applicata ad un corpo libero di muoversi lo accelererà in maniera inversamente proporzionale alla sua massa, cioè tanto maggiore è la massa, tanto minore l'accelerazione prodotta dalla stessa forza. La densità è per definizione la massa dell'unità di volume. Corpi più densi con le stesse caratteristiche elastiche, cioè con lo stesso richiamo elastico produrranno accelerazioni minori e quindi una minore efficacia nella trasmissione del moto. La velocità delle onde elastiche è quindi inversamente proporzionale alla densità.

I fluidi non oppongono alcuna resistenza agli sforzi di taglio, cioè uno sforzo di taglio anche minimo produce una deformazione enorme ed irreversibile. Per questo motivo le onde S non si propagano nei fluidi. Infatti il suono si propaga in aria od in acqua solo grazie alle onde compressionali o P.

Nella seguente tabella sono riportate le velocità delle onde P di alcuni materiali e rocce più comuni. Si noterà che non c'è una corrispondenza netta tra materiale e velocità, ma questa assume valori diversi all'interno di intervalli più o meno ampi. Ciò dipende da vari fattori: dalla composizione mineralogica, dalla tessitura, dalla porosità, dal fluido che pervade i pori, dallo stato di alterazione del materiale ed altri fattori di non rilevante importanza ai nostri fini. In un materiale poroso o fratturato la velocità delle onde P dipende sia dalla velocità nella matrice solida che dalla velocità nel fluido. Il motivo per cui ciò avviene è piuttosto intuitivo: le onde si muovono per fronti d'onda, definiti a rigore come il luogo (geometrico) dei punti o particelle che sono nella stessa fase di vibrazione. La cresta a forma di circonferenza di un'onda che si allarga sulla superficie dello stagno dopo la caduta del sasso è un fronte d'onda, come pure l'avvallamento ed ogni altra circonferenza concentrica col punto di caduta del sasso. Pertanto in un mezzo poroso la frazione di fronte d'onda che viaggia nella matrice alla velocità della matrice si troverà immediatamente dopo a viaggiare nel fluido alla velocità del fluido, mentre la frazione vicina viaggerà prima nel fluido e subito dopo nella matrice, e così via. Il fronte d'onda avanza quindi ad una velocità media tra quella della matrice e quella del fluido, pesata dalla frazione porosa.

---

<sup>1</sup> Purtroppo in Fisica e quindi anche in Geofisica è d'uso indicare sia una costante di Lamé che la lunghezza d'onda con lo stesso simbolo: la lettera greca  $\lambda$ . Il lettore è pregato di fare attenzione al contesto.

Litotipo	$v_p$ (m/sec)
- Aerato superficiale: .....	300 ÷ 800
- Sabbia asciutta: .....	500 ÷ 1000
- Sabbia umida: .....	600 ÷ 1800
- Argilla: .....	1800 ÷ 2900
- Terr.Alluv. sciolti: .....	400 ÷ 2000
- Acqua: .....	1450 ÷ 1500
- Lave: .....	2500 ÷ 4000
- Calcare: .....	3500 ÷ 5000
- Arenarie: .....	2500 ÷ 4500
- Graniti: .....	4000 ÷ 6000
- Piroclastiti coerenti (tufo).....	750 ÷ 2450
- Piroclastiti incoerenti (pozzolana).....	350 ÷ 1000

Ne deriva una notevole capacità diagnostica delle onde di volume di tipo P circa la presenza di vuoti, o pori, riempiti di fluido. Questo ragionamento non vale per le onde S che, non propagandosi nei fluidi, manterranno in un mezzo poroso la velocità S propria della matrice.

### Attenuazione delle onde elastiche con la distanza

Le onde elastiche trasportano energia: ne è la prova ogni terremoto distruttivo. Si dimostra che l'energia per unità di volume  $E_v$ , detta anche densità di energia, è data da:

$$E_v = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A_0^2 \cdot \omega^2,$$

dove  $\rho$  è la densità del mezzo,  $A_0$  l'ampiezza massima del moto delle particelle,  $\omega$  la frequenza angolare, espressa in radianti/s. Vale la relazione  $f = \omega/2\pi$ .

È esperienza comune osservare che esse si attenuano (per fortuna...) a mano a mano che si allontanano dalla sorgente. È altrettanto facile convincersi che l'energia emessa dalla sorgente, dovendosi ridistribuire su fronti che sono superfici sferiche (almeno fintantoché esse si propagano in un mezzo omogeneo ed isotropo) porterà ad una diminuzione della sua frazione per unità di superficie, detta propriamente flusso. Allontanandosi dalla sorgente, il flusso diminuisce in maniera inversamente proporzionale al quadrato del raggio della superficie sferica del fronte d'onda. (si ricordi infatti che una superficie sferica di raggio  $r$  ha area data da  $4\pi r^2$ ); pertanto c'è una relazione inversa tra  $r^2$  e  $A_0^2$ , o più semplicemente tra  $r$  e  $A_0$ . L'ampiezza dell'onda di volume (sia P, che S) decresce cioè in maniera

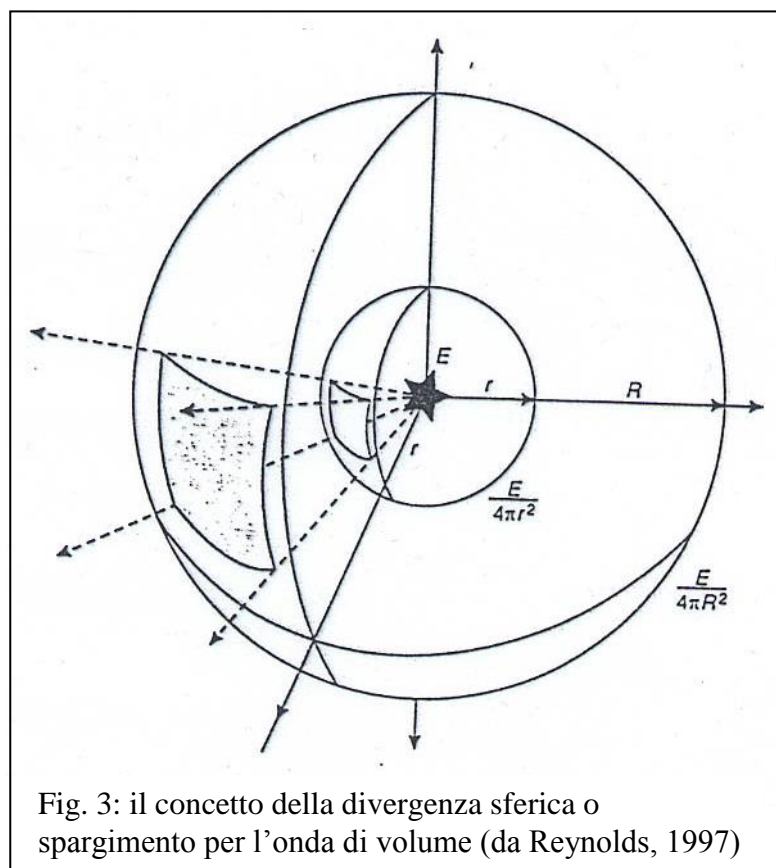


Fig. 3: il concetto della divergenza sferica o spargimento per l'onda di volume (da Reynolds, 1997)

inversamente proporzionale alla distanza. E' questo il fenomeno detto divergenza sferica o spargimento dell'energia. Nel caso delle onde superficiali la propagazione avviene alla superficie, quindi l'energia non si espande su superfici sferiche all'interno della Terra, ma su circonferenze concentriche (come quelle che si formano alla superficie di uno stagno colpita da un sasso): per questo motivo lo spargimento non è inversamente proporzionale a  $r^2$ , ma soltanto a  $r$ , il che fa sì che l'ampiezza dell'onda superficiale si attenua con la distanza come la radice quadrata di  $r$ . È per questo motivo, p. es., che nei sismogrammi le onde superficiali, che arrivano per ultime, sono sempre molto ampie e tanto più ampie delle fasi di onde di volume quanto più il sismogramma è registrato lontano dall'epicentro.

In realtà le onde elastiche, essendo costituite dal moto di particelle materiali intorno alle rispettive posizioni di equilibrio, sono soggette ad un altro tipo di attenuazione, dovuto agli attriti tra le particelle stesse, in quanto i mezzi materiali non sono mai perfettamente elastici. Questa attenuazione, dovuta all'attrito, trasforma l'energia del moto delle particelle sollecitate dal passaggio dell'onda (qualunque onda: P, S o superficiale) in calore. Poiché l'attrito è proporzionale alla velocità istantanea delle particelle e questa velocità istantanea in un moto armonico è proporzionale alla frequenza, l'attenuazione per attrito, detta assorbimento anelastico, è proporzionale, oltre che alla distanza, anche alla frequenza ed ha andamento esponenziale decrescente. È per questo motivo che le onde di un terremoto, registrate a grande distanza dall'epicentro sono, oltre che non percepibili dall'uomo per la loro bassissima ampiezza, anche a frequenza molto bassa, dell'ordine di centesimi di Hz. Come si vedrà nella tomografia acustica, questo è uno dei due fattori che condizionano il potere risolutivo delle indagini tomografiche con le onde elastiche.

### **Presenza di superfici di discontinuità**

Sottosuolo e manufatti in genere sono costituiti da materiali diversi, ciascuno caratterizzato da proprie specifiche proprietà fisiche, come abbiamo già visto con i metodi a resistività o col magnetismo e come riportato sopra nella tabella dei valori della velocità delle onde P. Cosa succede quando un'onda elastica passa da un corpo ad un altro a diversa velocità, cioè, come si dice con maggior precisione e concisione, incontra una superficie di discontinuità? La legge che governa tale passaggio è, per le onde elastiche, piuttosto complessa e si chiama legge di Snell. Essa si può articolare in più enunciati (vedi figura 4):

- l'onda in parte si riflette, cioè parte dell'energia torna nel mezzo di provenienza, in parte si trasmette nell'altro mezzo; ciò non sempre avviene, come diremo tra poco;
- i raggi dell'onda incidente, dell'onda riflessa, dell'onda trasmessa e la normale<sup>2</sup> alla superficie di discontinuità sono

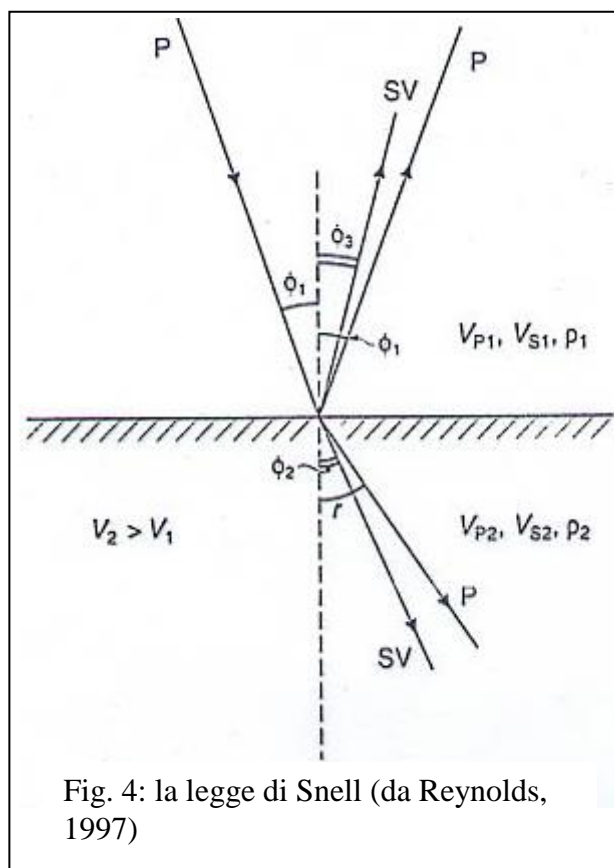


Fig. 4: la legge di Snell (da Reynolds, 1997)

<sup>2</sup> La "normale" è la retta perpendicolare alla superficie di discontinuità e si considera quella che passa per il punto d'incidenza del raggio per l'appunto incidente.

contenuti tutti nello stesso piano ed hanno un punto in comune sulla superficie di discontinuità;

- il raggio riflesso forma con la normale alla superficie di discontinuità un angolo uguale a quello del raggio d'incidenza, ma sta ovviamente dall'altra parte rispetto alla normale;
- il raggio trasmesso forma un angolo  $r$  diverso da quello di incidenza  $i$ , cioè si "rifrange", secondo una regola precisa:  $\frac{\text{sen}(i)}{v_1} = \frac{\text{sen}(r)}{v_2}$  ( $v_1$  e  $v_2$  sono naturalmente le velocità del mezzo di provenienza e del mezzo d'arrivo);
- al passaggio tra le due superfici di discontinuità in genere si generano anche raggi riflessi e rifratti di tipo S se l'onda incidente è di tipo P e di tipo P se l'onda incidente è S. Non è il caso di scendere in ulteriori particolari.

Quando la velocità del mezzo di arrivo è più alta di quella del mezzo di provenienza, oltre una certa inclinazione del raggio di incidenza l'onda non si trasmette più nel secondo mezzo, ma viene interamente riflessa; tale angolo è detto angolo limite o angolo critico ed il fenomeno viene detto riflessione totale. L'angolo limite  $l$  è dato da:  $\text{sen}(l) = \frac{v_1}{v_2}$ .

### **Energia riflessa e trasmessa**

Si definisce l'impedenza acustica  $Z$  di un mezzo elastico come il prodotto tra la velocità e la densità (rappresenta la quantità di moto dell'elemento di volume unitario):

$$Z = \rho \cdot v.$$

Il rapporto tra le ampiezze delle onde riflessa  $A_r$  e incidente  $A_i$  costituisce il coefficiente di riflessione ( $R$ );

$$R = \frac{A_r}{A_i}.$$

Per incidenza normale tale rapporto assume la forma semplificata:

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

da cui si deduce facilmente che  $R$  è compreso tra -1 e 1;

Si definisce il coefficiente di trasmissione ( $T$ ) come:

$$T = \frac{A_T}{A_i} = 1 - R.$$

Per incidenza normale esso si semplifica in:

$$T = \frac{2 \cdot Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

dove  $T$  è compreso tra 0 e 2;

$A_T$  è la differenza tra le ampiezze delle onde incidente ( $A_i$ ) e riflessa ( $A_r$ ):

$$A_T = A_i - A_r$$

Un fatto notevole è che, mentre  $T$  è sempre positivo,  $R$  può essere anche negativo: ciò significa che mentre l'onda rifratta è sempre in fase con l'onda incidente, quella riflessa, per  $R < 0$ , è in opposizione di fase rispetto all'onda incidente. Altro fatto notevole è che  $T$  può essere  $> 1$ : in questo caso, cioè quando l'impedenza del mezzo di arrivo è minore di quella del mezzo di provenienza, l'ampiezza dell'onda trasmessa è maggiore di quella dell'onda incidente: è il fenomeno alla base dell'amplificazione sismica di sito.

## **Gli strumenti**

Come si producono e si registrano le onde elastiche?

Il modo più semplice di produrre un'onda elastica è far cadere un grave sulla superficie del corpo da investigare: un colpo di martello è la sorgente più utilizzata, soprattutto per indagini nel sottosuolo a piccole profondità (fino a 10-20 m).

La registrazione dell'arrivo di un'onda elastica è invece un'impresa più difficile. Innanzitutto dobbiamo osservare che la tecnologia ha messo a punto apparecchiature che registrano con facilità segnali di natura elettrica, cioè differenze di potenziale, comunque variabili: gli oscilloscopi sono l'esempio più ovvio e lo strumento più efficace. È quindi necessario che l'energia elastica trasportata dall'onda venga trasformata in energia elettrica, cioè in una differenza di potenziale tale da riprodurre fedelmente nel tempo l'oscillazione delle particelle del mezzo, sollecitate dall'arrivo dell'onda elastica. Ogni dispositivo che trasforma un'energia in un'altra è detto "trasduttore".

Gli strumenti che, opportunamente infissi nel terreno per ottimizzare l'accoppiamento meccanico, trasformano le oscillazioni del terreno in segnale elettrico, vengono detti sismometri o geofoni. Il primo termine è consueto nella pratica di osservatorio, il secondo nella pratica dell'esplorazione del sottosuolo. Il segnale elettrico prodotto viene registrato dal sismografo ed il grafico delle oscillazioni del terreno (su carta o a video) è detto sismogramma.

I geofoni sono di 3 tipi, secondo che registrano lo spostamento, la velocità o l'accelerazione istantanea del terreno al quale sono accoppiati. Nel primo caso sono sistemi oscillanti con una massa appesa ad una molla, condizionata ad oscillare lungo la direzione verticale od una direzione orizzontale opportunamente scelta (pendolo verticale od orizzontale). Nel secondo caso sono sistemi di tipo elettromagnetico, con un solenoide che oscilla nell'interferro di un magnete. La forza elettromotrice che si crea nel solenoide (e viene registrata) è proporzionale alla velocità relativa tra il solenoide e l'interferro: è per capirci lo stesso principio della dinamo da bicicletta. Nel terzo caso sono di tipo "piezoelettrico", cioè il sistema sensibile è uno o più cristalli di quarzo piezoelettrico, che si polarizza elettricamente se pressato o stirato: una massa comprime il cristallo reagendo per inerzia all'accelerazione delle particelle del terreno. Nei primi 2 tipi, il meccanismo è un sistema (meccanico od elettromagnetico) oscillante: ogni sistema oscillante ha una frequenza propria  $f$  di oscillazione; per un pendolo matematico di lunghezza  $l$  essa è:  $f=(g/l)^{1/2}/(2\pi)$ , dove  $g$  è l'accelerazione di gravità ( $\sim 9.8 \text{ m/s}^2$ ). Per evitare che il sistema oscillante si metta in oscillazione per conto suo quando gli arriva una sollecitazione, esso viene opportunamente "smorzato"; in questo modo esso registra con lo stesso fattore di scala ( $V/m$  o  $V/(m/s)$ ) tutte le oscillazioni con frequenze superiori alla frequenza propria. Al di sotto di questa esso attenua progressivamente il segnale, fino a diventare insensibile. I sistemi fisici che hanno questo comportamento, che filtrano cioè il campo di frequenze del segnale in ingresso, lasciando passare inalterate solo le componenti sinusoidali a frequenze superiori alla frequenza propria, sono detti "filtri passa-alto" e la frequenza propria è detta anche "frequenza di taglio" del filtro. I geofoni piezoelettrici sono invece concettualmente "lineari", cioè rispondono allo stesso modo (in  $V/(m/s^2)$ ) indipendentemente dalla frequenza del segnale in ingresso.

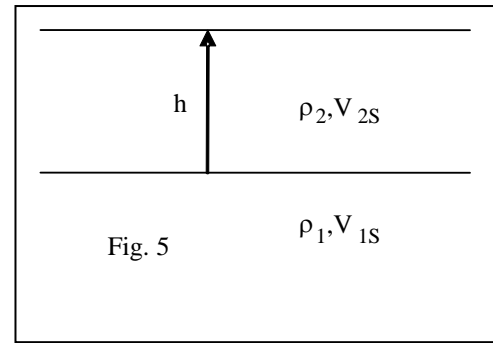
Nell'esplorazione archeologica i metodi che si basano sulle onde elastiche vengono però utilizzati molto raramente; questi metodi vengono invece utilizzati frequentemente per ricostruire la distribuzione della velocità all'interno dei manufatti, in genere in modalità tomografica. Per questo motivo in genere si usano trasduttori al quarzo come generatori di segnale, proprio per la possibilità che essi consentono di salire in frequenza. Infatti le frequenze associate ad un colpo di martello non superano 2-3 kHz. La frequenza del segnale trasmesso sta infatti alla base del potere risolutivo dei metodi che usano le onde (v. capitolo del georadar).

Molto recentemente però si è avuta l'occasione di testare un metodo, ormai ben conosciuto in sismologia, detto HVSR (Horizontal to Vertical Spectral Ratio).



## Il metodo HVSR

È già stato dimostrato che quando un'onda elastica che si propaga nel sottosuolo passando da un mezzo con impedenza acustica  $Z_1 = \rho_1 v_1$  (dove  $\rho$  è la densità e  $v$  la velocità di un'onda di volume -P o S-) ad un mezzo con impedenza acustica  $Z_2 = \rho_2 v_2$ , se  $Z_2 < Z_1$  l'ampiezza dell'onda trasmessa nel secondo mezzo aumenta. Questo fenomeno dipende soltanto dall'angolo d'incidenza e non dalla frequenza per le onde P, cioè tutte le singole componenti sinusoidali dell'onda vengono amplificate nella stessa misura.



Per le onde S si dimostra che ha luogo anche un fenomeno di risonanza. Dato un sottosuolo formato da una copertura omogenea elastica di spessore  $h$ , poggiante su un substrato rigido (nella pratica un substrato è considerato rigido quando la sua  $V_{1S}$  supera 800 m/s), come in figura 5, tali frequenze di risonanza sono date da (v. p. es. Lanzo e Silvestri, 1999):

$$f_n = \frac{V_{2S}(2n-1)}{4h}, n = 1, 2, \dots, \infty.$$

Ad esempio, per una copertura elastica spessa 10 m con  $V_{2S}$  di 200 m/s (velocità tipica di un sedimento sciolto),  $f_1 = 5$  Hz,  $f_2 = 15$  Hz e così via. Si tratta di campi di frequenze che cadono nell'intervallo delle frequenze di risonanza delle costruzioni<sup>3</sup>. L'ampiezza di oscillazione alle frequenze di risonanza tende all'infinito per un mezzo puramente elastico. È da notare che ciò non avviene mai nella pratica in quanto i mezzi materiali hanno in realtà un comportamento visco-elastico. Ciò comporta uno smorzamento progressivo dell'ampiezza trasmessa  $A(f_n)$  alla frequenza di risonanza, al crescere di questa. Inoltre l'ampiezza del picco di risonanza è elevata solo se il contrasto di impedenza acustica è molto forte: essa decresce al decrescere di questo rapporto.

Poiché sia le onde di Love che la componente orizzontale delle onde di Rayleigh si formano per interferenza costruttiva delle onde S, quanto detto vale con ottima approssimazione anche per tali onde, purchè il sottosuolo sia tabulare, cioè a strati piano/paralleli. Questo è un fatto particolarmente fortunato perché significa che basta registrare il rumore sismico ambientale, dove è ampiamente prevalente l'energia associata alle onde superficiali, per avere un'informazione precisa (nei limiti summenzionati) delle frequenze di risonanza. Questa infatti si ottiene con 3 "semplici" passaggi:

1. registrando in un punto per un certo tempo (anche meno di un'ora) le 3 componenti del moto delle particelle del terreno (la verticale  $z(t)$  e due orizzontali ortogonali tra loro:  $x(t)$ ,  $y(t)$ ) con un sismometro a frequenza propria inferiore al campo di frequenze di interesse (in genere basta che tale frequenza sia dell'ordine di 1 Hz);
2. calcolandone i rispettivi spettri di Fourier  $Z(f)$ ,  $X(f)$  e  $Y(f)$

3. facendo il rapporto  $\frac{\sqrt{|X(f)|^2 + |Y(f)|^2}}{|Z(f)|}$  detto per l'appunto HVSR, acronimo di Horizontal over Vertical Signal Ratio.

over Vertical Signal Ratio.

Lo spettro di Fourier di un segnale, per esempio di un sismogramma, è costituito dalle ampiezze e dagli sfasamenti reciproci delle infinite sinusoidi (seni e coseni) nelle quali si può scomporre il segnale. Questa possibilità, largamente utilizzata nelle scienze sperimentali, fu stabilita da Fourier, circa 2 secoli fa e l'algoritmo che la esegue è detto trasformata di Fourier. Essa costituisce un modo estremamente efficace ed utile di considerare un segnale da un punto di vista

<sup>3</sup> Una regola pratica dell'Ingegneria stabilisce che un edificio in cemento armato risona a circa 0.1 s di periodo per piano. Quindi un edificio di c.a. ad un piano risona a 0.1 s = 10 Hz, a 2 piani a 0.2 s = 5 Hz e così via. Gli edifici in muratura di mattoni hanno frequenze di risonanza più basse, anch'esse però correlate al numero di piani.

diverso, e cioè frequenza per frequenza, come richiesto anche dal presente metodo. In pratica, l'esecuzione della trasformata di Fourier su ciascuna componente  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  del sismogramma, registrato come sequenza di numeri, che ne costituiscono i "campioni" a passo di campionamento costante, consente di ottenere le ampiezze e gli sfasamenti reciproci delle sinusoidi elementari che compongono il segnale dalla frequenza cosiddetta fondamentale, che coincide col reciproco della durata del segnale trasformato, dalla frequenza doppia, tripla,... fino alla frequenza pari a metà della frequenza di campionamento.

Il primo lavoro fondamentale su questa specifica procedura fu pubblicato da Nogoshi e Igarashi nel 1971, ma Nakamura lo riprese nel 1989 con maggiore fortuna; per questo motivo è chiamato anche "metodo di Nakamura".

Si richiama l'attenzione del lettore su 2 fatti:

1. che non è possibile, conoscendo soltanto la frequenza di risonanza, determinare contemporaneamente la  $V_S$  dello strato elastico e la profondità  $h$  del substrato rigido: questi due parametri del sottosuolo compaiono in un prodotto: è una condizione "perfetta" di equivalenza (qualunque coppia di fattori che dia lo stesso prodotto "va bene"): quindi la loro determinazione è impossibile senza informazioni di altra origine;

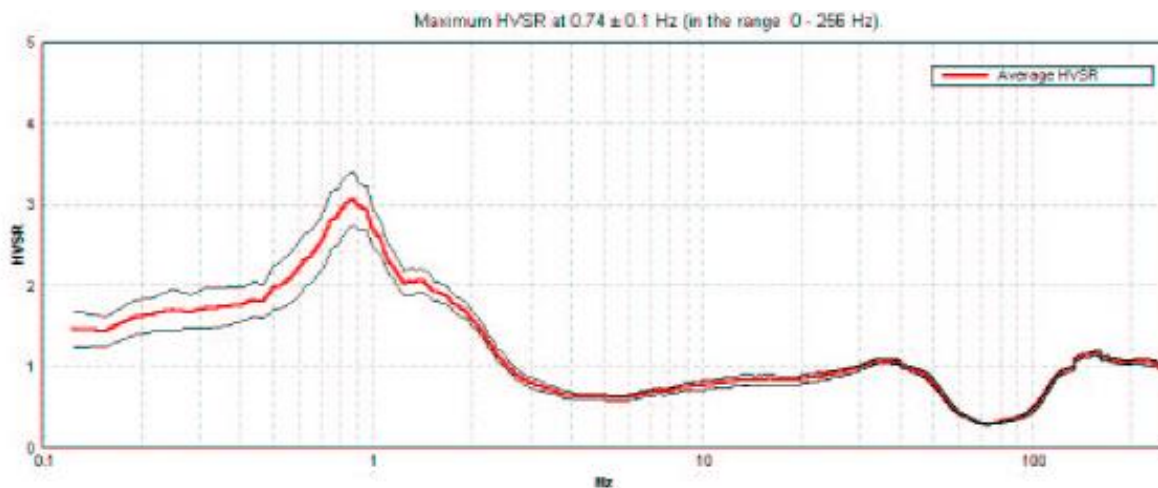
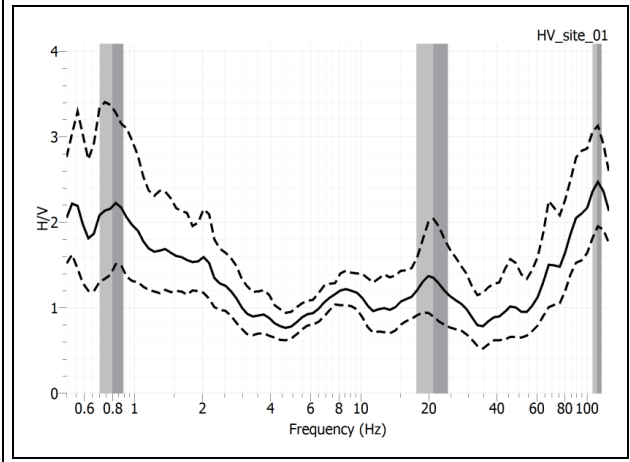
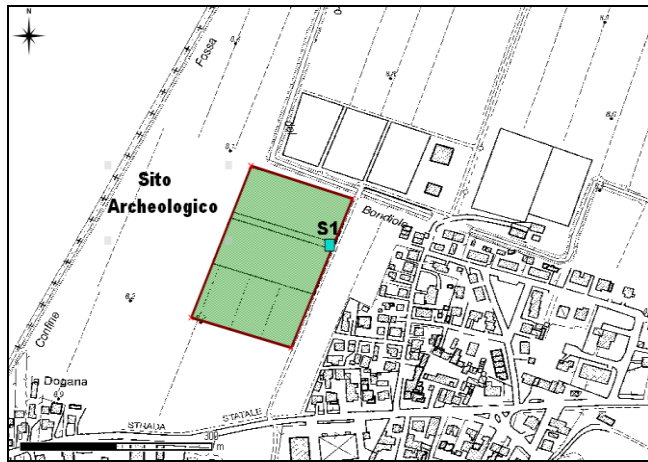


Fig. 12: esempio di HVSR (Casaglia, da Castellaro, Mulargia, Albarello, 2006)

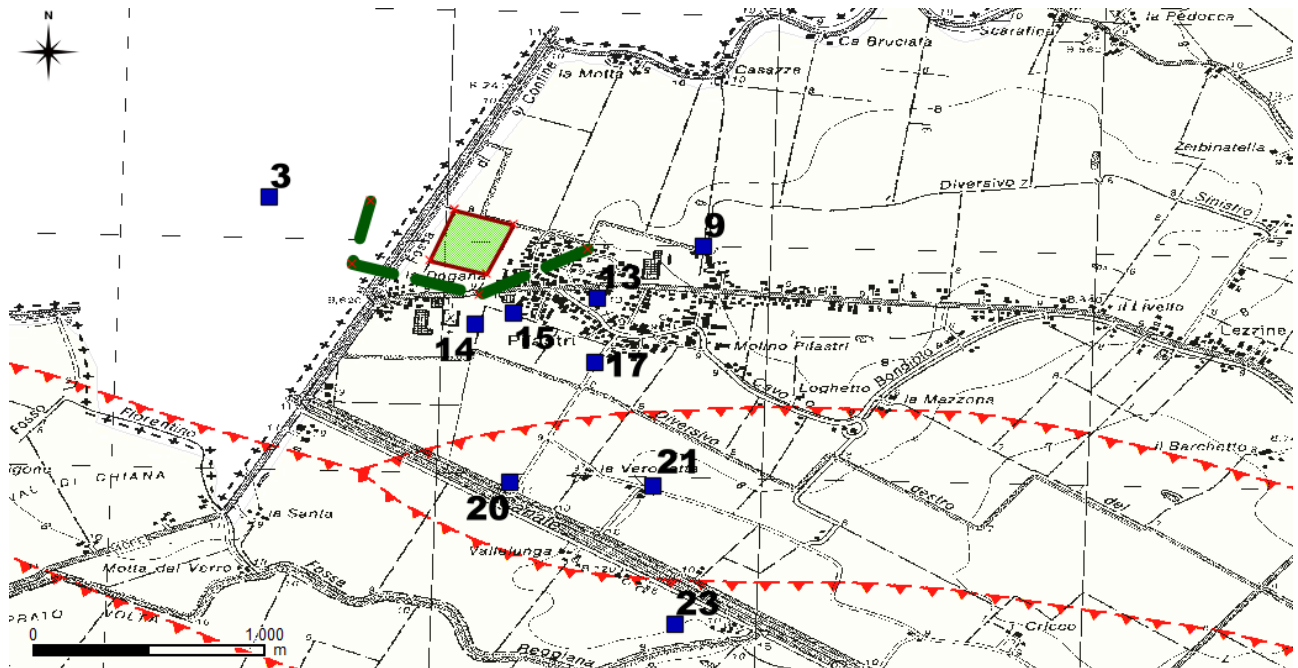
2. trattandosi di un metodo statistico, l'ampiezza alla frequenza di risonanza può essere affetta da un ampio margine di incertezza. L'ampiezza effettiva può essere stimata solo utilizzando un segnale deterministico, com'è quello di un terremoto.

Riportiamo, come esempio di applicazione all'Archeologia di questo metodo, un'indagine fatta all'interno ed intorno la terramara di Pilastris (Bondeno, FE). Qui affiorano per un'estensione di vari ettari abbondanti evidenze di cocci di mattone, mentre l'area è coltivata con un impianto di serre. Questo impedisce, data la presenza dei sostegni di ferro, sia la magnetometria che l'FDEM, sia per trovare in via speditiva i punti più favorevoli allo scavo che per delimitare l'area dove si trova il paleosuolo del villaggio, non evidente da foto aeree. Nei saggi di scavo il paleosuolo giaceva tra 1 e 1,5 m di profondità. Acquisendo il rumore sismico superficiale in una quarantina di punti, si sono ottenuti gli spettri HVSR, di cui uno riportato come esempio nella figura seguente.

N. prova	Data (gg/mese/anno)	Coordinate geografiche	Coordinate piane	Durata registrazione (minuti)
S1	03/02/2015	44.9488750°N 11.2831806°E	4980005.04N 680194.18E	15



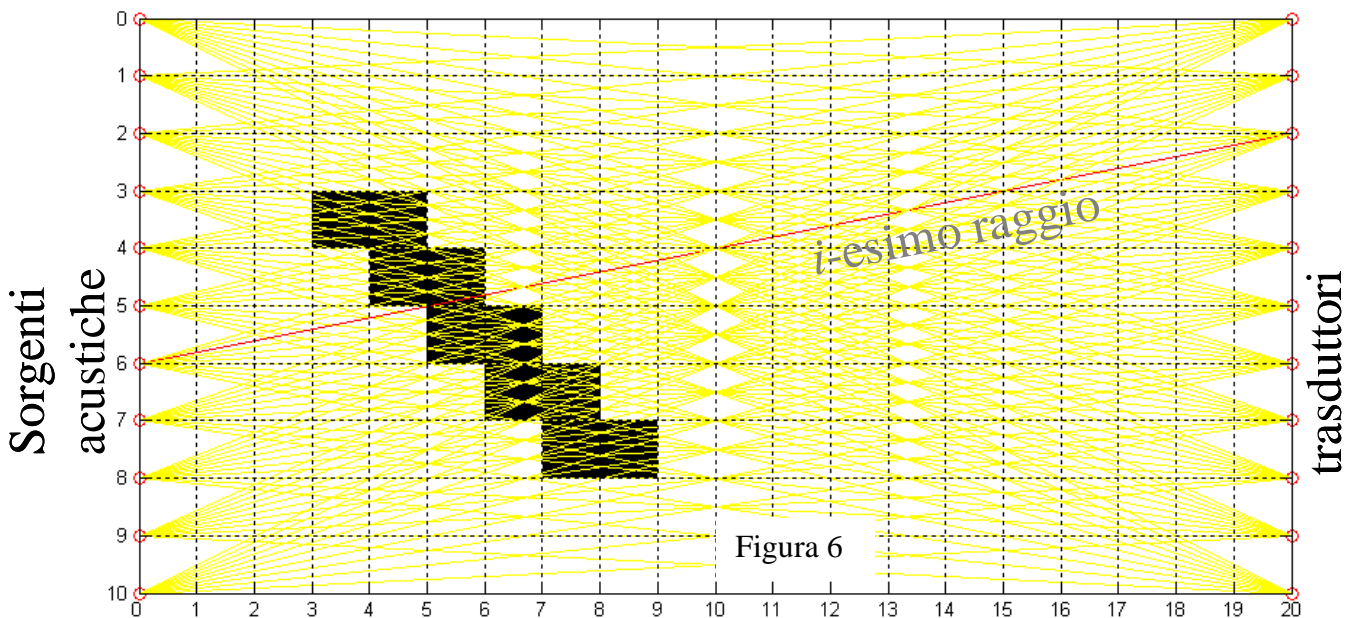
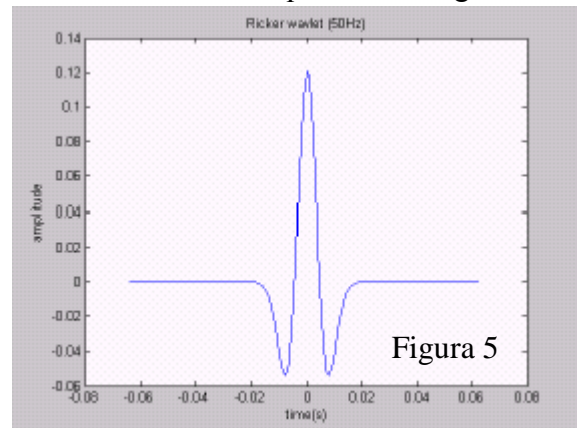
La frequenza del picco a circa 20 Hz, sottolineato dalla banda verticale in grigio, compare in molti spettri, ma non in tutti. Se applichiamo la formuletta della frequenza di risonanza, sapendo che la  $V_s$  dei primissimi metri è di circa 100-120 m/s, si ottiene per  $h$ , spessore del terreno soffice superficiale, un valore tra 1,25 e 1,5 m, coincidente col livello del paleosuolo, ove messo a giorno. Il calpestio dovuto alla frequentazione del sito ha compattato abbastanza il suolo sottostante che questo è abbastanza rigido rispetto al suolo superficiale da dare un sia pur debole picco di risonanza. Il margine della terramara verso sud e ovest è probabilmente coincidente con la linea blu tratteggiata nella figura seguente, che separa le stazioni riportate dove quel picco non c'era da quelle, non riportate nella figura, dove il picco era presente.



## Lo studio dei manufatti con le onde elastiche: la tomografia acustica

L'impulso generato dal colpo di un martello e da un trasduttore al quarzo ha in genere una forma del tipo riportato nella figura 5.

Nella tomografia acustica, una serie di trasduttori posti intorno al manufatto da investigare (un muro, una colonna) funge alternativamente da sorgente e da ricevitore. Ciò che si misura è il tempo che l'impulso di figura 5 impiega per andare da ciascuna sorgente a ciascun ricevitore, detto anche "tempo di volo". Si ottengono, con un po' di pazienza, inversamente proporzionale al numero di trasduttori disponibili, centinaia di tempi di volo. Cosa ce ne facciamo di tutti questi "dati"? Se i trasduttori sono stati posti su uno stesso piano che intersechi il corpo investigato, se ne ottiene una sezione tomografica (figura 6), se invece i trasduttori sono stati posti su vari piani se ne investiga un volume, nelle tre dimensioni (tomografia 3D).



Come si risale dal dato misurato (le centinaia di tempi di volo) all'informazione desiderata (la distribuzione della velocità)? Con un algoritmo matematico-statistico, che confronta i tempi di volo misurati con quelli calcolati nella seguente maniera. Si suddivide la sezione investigata in un certo numero di celle (come nella figura 6), delle cui dimensioni parleremo tra poco; a ciascuna cella viene assegnato un valore di velocità. Siamo quindi in grado di calcolare il tempo di volo ipotetico, sommando i tempi impiegati da ciascun raggio (ad es. l' $i$ -esimo) per percorrere tutte le celle interposte tra ciascuna sorgente e ciascun ricevitore. Ovviamente i tempi di volo calcolati non coincideranno al primo tentativo con quelli misurati per la stessa coppia sorgente-ricevitore. Compito dell'algoritmo è modificare iterativamente i valori della velocità in tutte le celle fino a che la differenza tra i tempi misurati e quelli calcolati diventa così piccola che un'ulteriore iterazione non la riduce in maniera apprezzabile.

Un po' di matematica e di nozioni di geometria analitica aiutano a comprendere la natura del problema. La più comune formulazione analitica esprime la differenza tra l'insieme degli  $N$  tempi  $t_{i,m}$  misurati e degli  $N$  tempi  $t_{i,c}$  calcolati come somma dei quadrati delle differenze:  $\sum (t_{i,m} - t_{i,c})^2$ . È facile osservare che questa formula è analoga a quella della distanza tra due punti nello spazio

cartesiano (figura 7). Il problema è dunque la minimizzazione della distanza tra il “punto” di coordinate date dai tempi misurati in un ipotetico spazio a N dimensioni ed il punto di coordinate date dai tempi calcolati nello stesso spazio a N dimensioni.

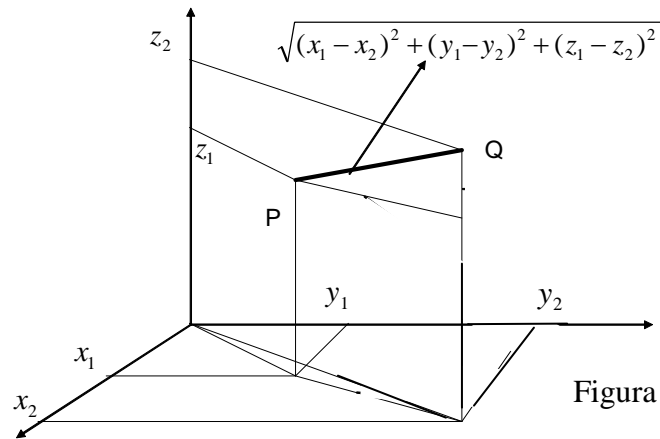


Figura 7

Qual è il potere risolutivo della tomografia acustica e, problema correlato, qual è la distanza alla quale si dispongono i trasduttori sorgente-ricevitore? Per potere risolutivo s'intende la capacità di vedere

distinti due oggetti. Questo potere è fortemente condizionato dalla lunghezza d'onda  $\lambda$  dell'impulso generato. Si può dimostrare infatti che la distanza minima  $R$  tra due oggetti per poter essere “visti” come distinti è  $R = \sqrt{r\lambda}$ , dove  $r$  è la distanza sorgente-ricevitore. Questa

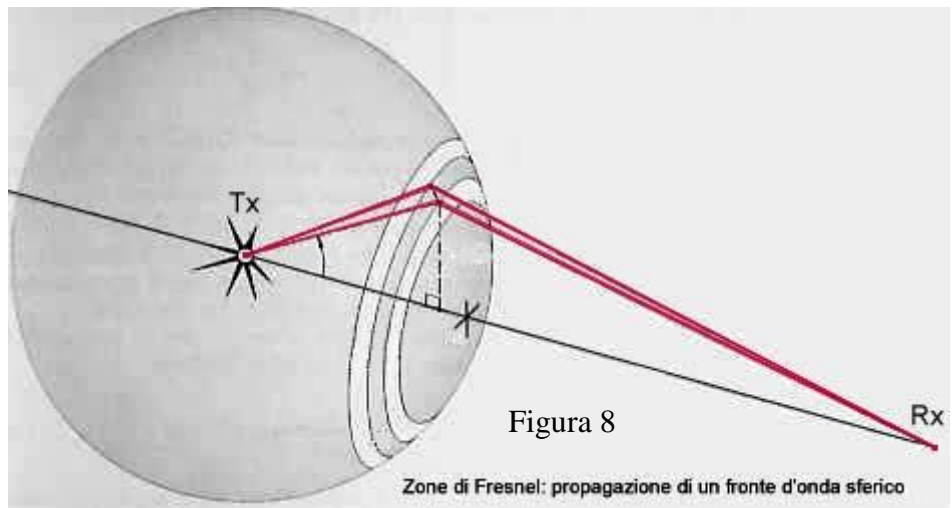


Figura 8

Zone di Fresnel: propagazione di un fronte d'onda sferico

distanza è detta raggio di Fresnel (figura 8). L'immagine che si forma in Rx del segnale trasmesso da Tx (può essere sia un impulso elastico che elettromagnetico) è costruita dall'interferenza costruttiva delle onde elementari in fase tra loro, che costruiscono il fronte d'onda, in base al principio di Huygens (figura 9). Per essere in fase, il loro cammino deve differire di non più di  $\lambda/2$ . Ciò avviene appunto per tutte le onde elementari comprese nella zona di Fresnel.

La lunghezza d'onda dipende come abbiamo già visto dalla frequenza della sorgente, che sceglie l'operatore, e dalla velocità del mezzo, che è quella che è.

Facciamo un esempio. Supponiamo di voler fare una tomografia acustica su una colonna di un tempio romano. Questa di solito è di calcare, con velocità, se è in buone condizioni, di 3000 m/s; il diametro è circa 1 m. Se adoperiamo un martello, l'impulso di figura 5 ha frequenza di 2-3 kHz; fissiamolo a 3 kHz; allora  $R = \sqrt{1 \cdot v / f} = \sqrt{1 \cdot 3000 / 3000} = 1m$ : cioè la distanza minima tra due corpi per poter essere distinti è pari al diametro della colonna! Il potere risolutivo che si ottiene quindi usando il martello è del tutto inadeguato. Occorre

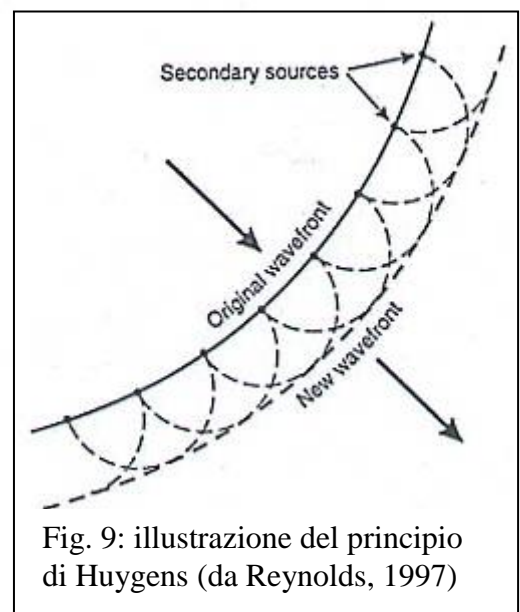


Fig. 9: illustrazione del principio di Huygens (da Reynolds, 1997)

usare un trasduttore al quarzo piezoelettrico, così possiamo scegliere una frequenza alta a piacere e aumentare così quanto vogliamo il potere risolutivo... Purtroppo anche questo non è possibile, in quanto come abbiamo ricordato più è alta la frequenza dell'onda, più rapido è l'assorbimento anelastico con la distanza. Un rimedio sarebbe aumentare la potenza della sorgente, ma questa non si può aumentare a piacere. Il miglior compromesso raggiungibile tra potenza trasmessa e distanza di penetrazione, nel problema prospettato, è l'uso di trasduttori al quarzo con frequenza non superiore a 50 kHz. In questa ipotesi, aumentando la frequenza da 3 kHz a 50 kHz, R diminuisce come la radice quadrata di (50/3), cioè di un fattore appena un po' maggiore di 4. Riusciamo cioè a vedere nettamente particolari con dimensioni minime di 20-25 cm. Di meglio la tecnologia e le leggi della Fisica non consentono.

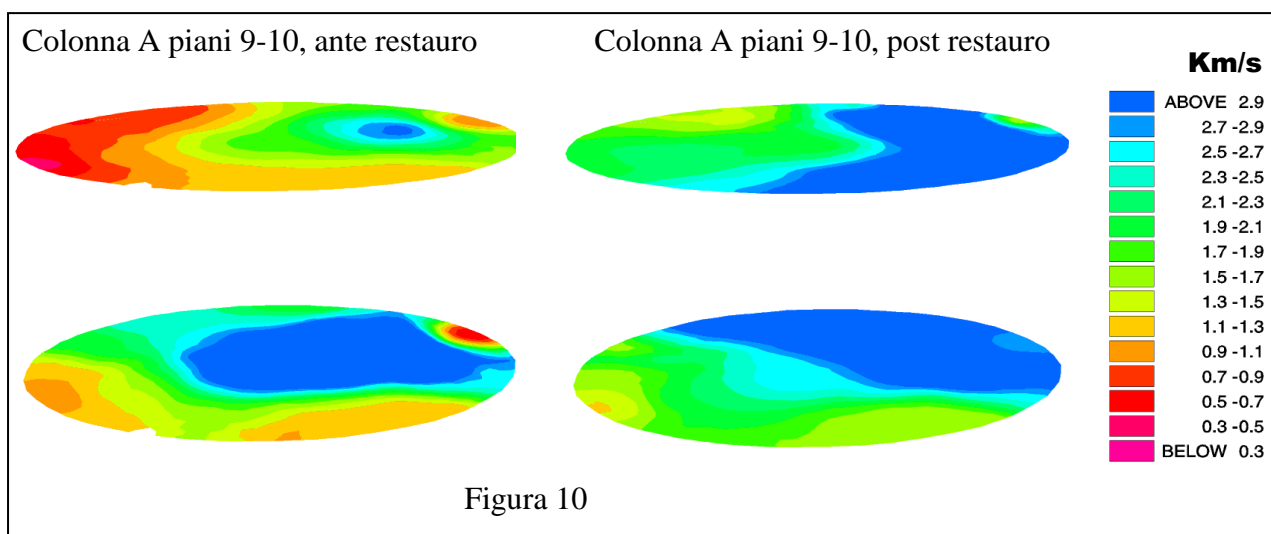
## Esempi

### La colonna "A" del tempio di Antonino e Faustina (Foro Romano)

Nella figura 11 sono riportate due sezioni trasversali della colonna A del tempio di Antonino e Faustina (Foro Romano, figura 10), prima (a sinistra) e dopo (a destra) il restauro. Non si vedono le celle di velocità, in quanto i rispettivi valori sono serviti per un programma di tracciamento di curve di livello "lisce". Si notino a sinistra valori di velocità molto bassi, inferiori a 1000 m/s per un'ampia parte delle due sezioni, segno di degrado avanzato dovuto a cicli di cristallizzazione e ricristallizzazione salina, nonché di gelo-disgelo, che hanno aumentato considerevolmente i diametri dei pori e molto probabilmente aumentato le fenditure tra i piani del calcare del quale le colonne sono formate. L'iniezione di una malta pozzolana ha considerevolmente modificato il quadro, aumentando le aree a velocità superiore a 1500 m/s. L'aumento della velocità, anche se non deterministicamente collegato con l'aumento della resistenza meccanica è però certamente indice di maggiore rigidità della struttura della colonna.



Figura 10



## La volta della scarsella del Battistero di Firenze.

Si tratta del grande Battistero posto di fronte alla chiesa di S. Maria del Fiore in Firenze (figura 11), di cui la foto mostra la prospettiva con la porta d'ingresso. L'edificio è a pianta ottagonale, come riportato nella figura 6 e, su un lato nascosto nella foto il monumento ha una sporgenza dove è alloggiato un altare. La volta a botte che copre l'altare sostiene il tetto e quindi si trova in difficili condizioni di carico statico. Probabilmente per questo motivo, sulla faccia interna della volta, ricoperta di mosaici, il gestore aveva notato delle crepe, indicate nella figura 12. si trattava dunque di stabilire se le fessure fossero o no "passanti", se cioè esse arrivassero fino al tetto, segnalando uno stato di grave sofferenza e di possibile collasso.

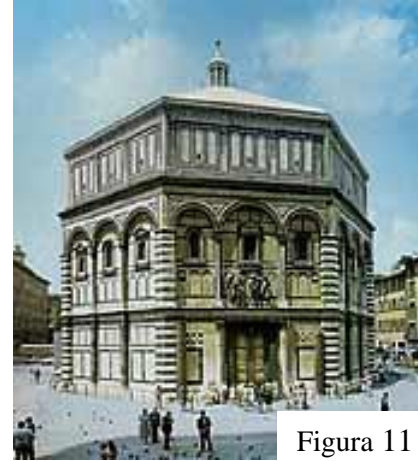


Figura 11

Il gestore scelse di eseguirvi una serie di indagini non invasive e ne affidò il coordinamento allo scrivente. In accordo con colleghi dell'Università di Roma<sup>1</sup> e del Politecnico di Torino vennero eseguite le seguenti indagini geofisiche, su tutto il corpo della volta, tra la faccia interna ed il tetto:

- tomografia acustica,
- tomografia elettrica
- georadar.

In questo capitolo vengono presentati i risultati della tomografia acustica.

A causa delle imponenti dimensioni del manufatto da investigare, fu necessario scegliere come sorgente un martello; come conseguenza i punti di battuta ed i trasduttori piezoelettrici furono dislocati a distanze reciproche di circa 50 cm; sulla superficie interna mosaicata (figura 12) furono logicamente disposti solo i trasduttori. L'indagine fu accompagnata da un'accurata restituzione topografica sia del manufatto che delle posizioni occupate dalle sorgenti e dai ricevitori acustici, per definire con la massima precisione le distanze reciproche. Si riportano qui i risultati della tomografia acustica (figure 13 e 14).

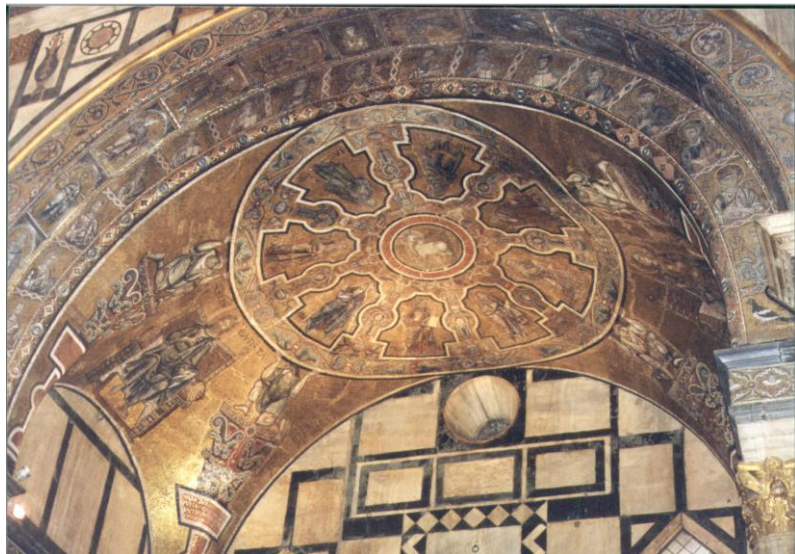
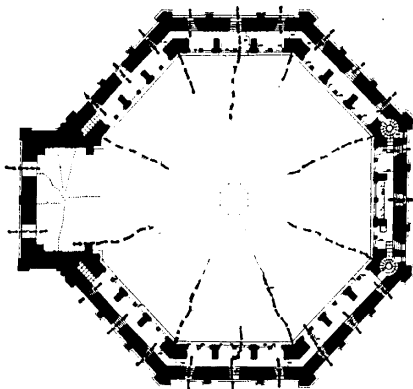


Fig. 12: a sinistra la pianta del Battistero di Firenze; si noti la sporgenza rettangolare, detta scarsella. Ivi è illustrato il quadro fessurativo a vista al momento delle indagini. A destra la volta mosaicata della scarsella.

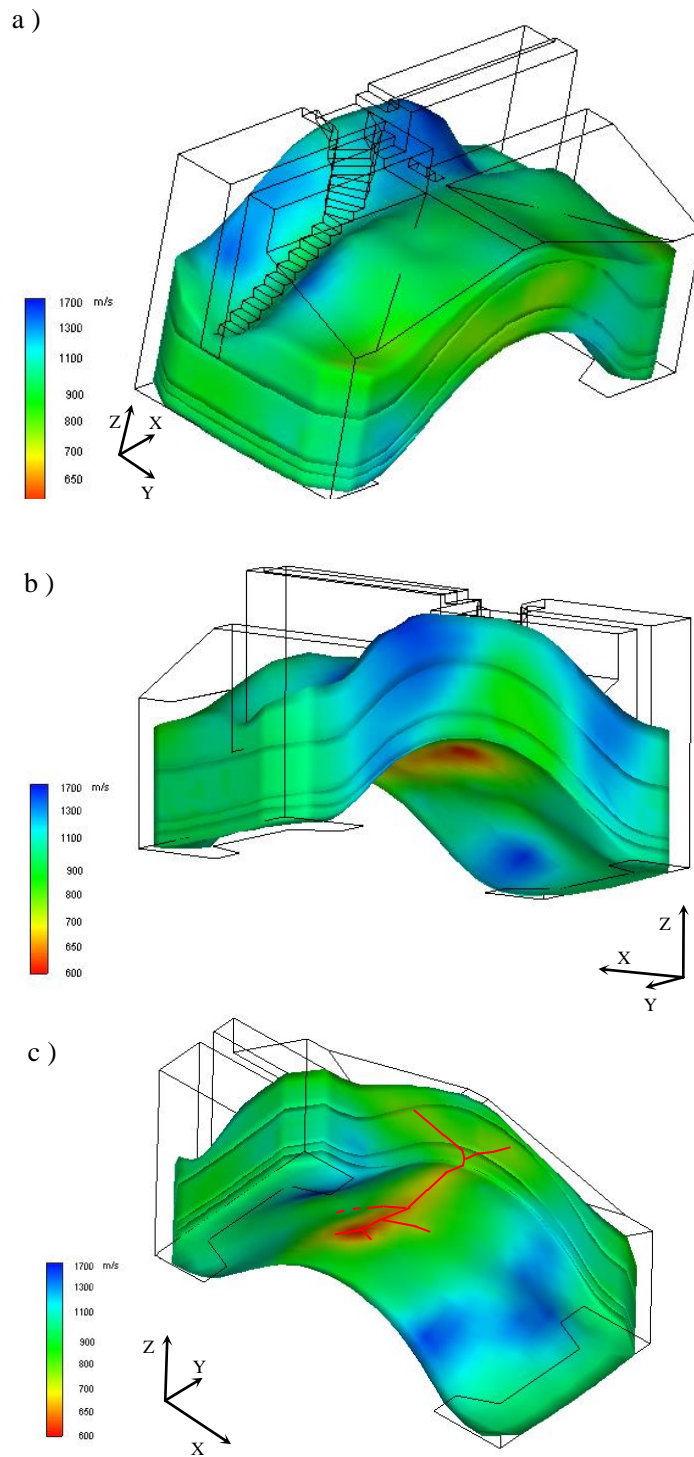


Fig 13: Campi di velocità dell'intera volta della Scarsella  
 a) vista esterna superiore  
 b) vista interna  
 c) vista esterna inferiore; è evidenziato il possibile andamento delle fratture



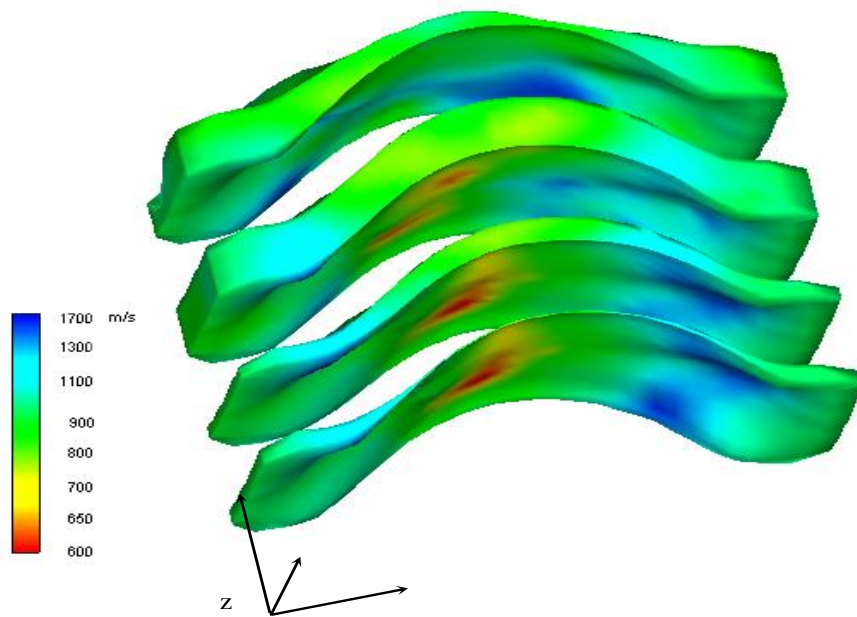


Fig. 14: immagine della distribuzione della velocità nel volume investigato, “esplosa” in 4 strati.

### ***Bibliografia***

Reynolds J.M.: An introduction to Applied and Environmental Geophysics. Wiley, Chichester, 1997.

---