Considerazioni introduttive

- Come accennato in precedenza, il calcolo delle azioni interne è propedeutico alla definizione dello **stato di sollecitazione** della struttura

- L'obiettivo del progettista è di fatto quello di "mappare" gli sforzi che la struttura sopporta in ogni punto di ogni sua sezione. Ciò al fine di prevedere con ragionevole certezza **"qual è la zona più a rischio di cedimento (collasso) strutturale"**

Sollecitazione, Sforzo, Tensione

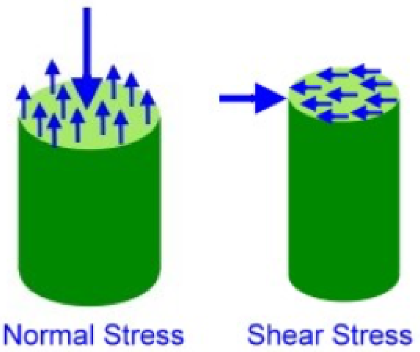
Ha le dimensioni di una pressione

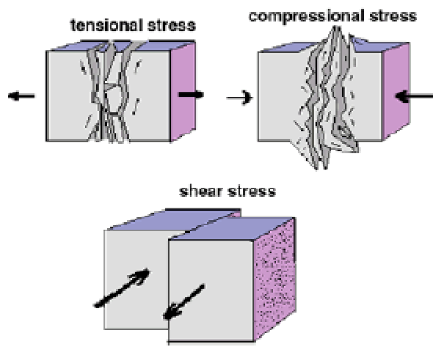
$$\sigma, \tau = \frac{Forza}{Superficie} = \frac{N}{m^2} = Pa$$

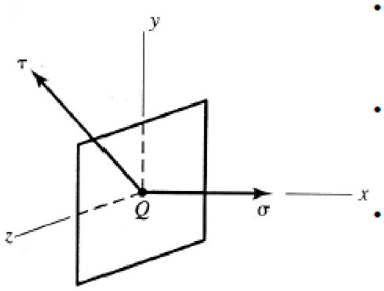
Tensione normale
(vettore sforzo entrante/uscente dal piano)

Tensione tangenziale
(vettore sforzo giacente nel piano)

Tensioni normali e tangenziali



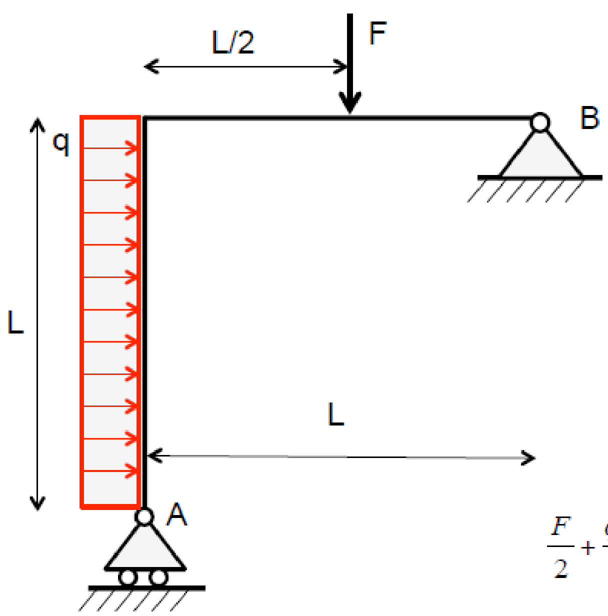


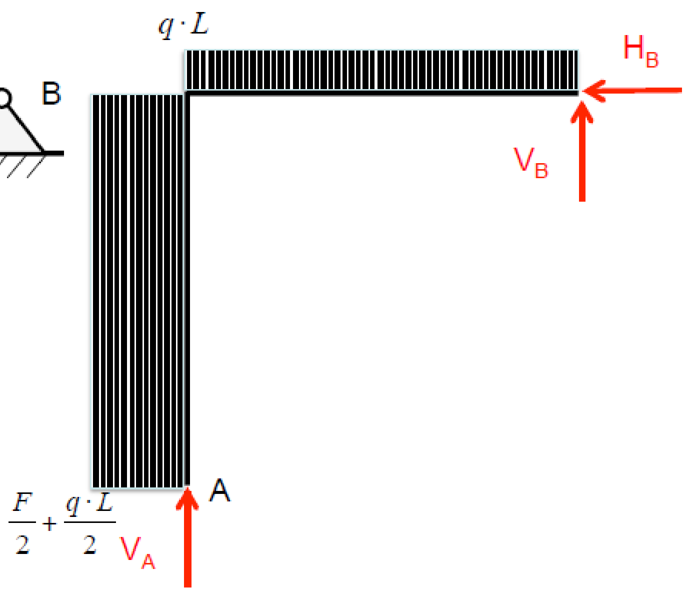


- Il segno degli sforzi viene assegnato secondo la seguente convenzione:
- **Sforzi NORMALI:** Positivo se USCENTE dalla superficie (trazione) Negativo se ENTRANTE (compressione)
- **Sforzi TANGENZIALI:** Positivo se tende a far ruotare la superficie in senso ORARIO, Negativo se tende a far ruotare la sezione in senso ANTIORARIO

Considerazioni introduttive

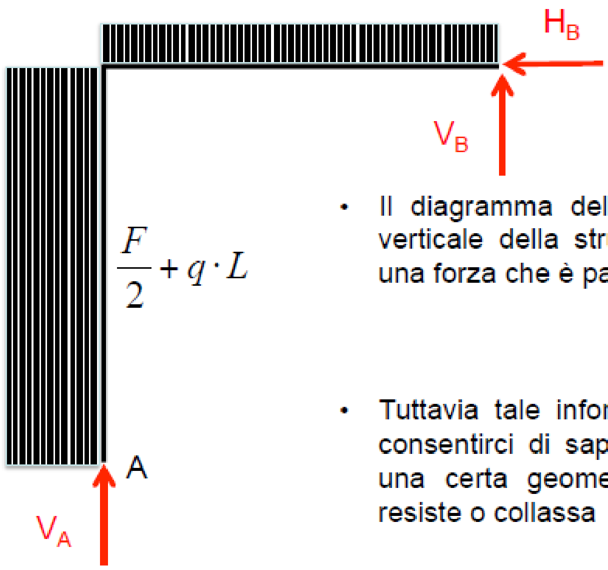
Prendiamo in esame una delle strutture analizzate nel corso dello studio delle azioni interne e facciamo riferimento al suo diagramma dell'azione normale





Considerazioni introduttive

Prendiamo in esame una delle strutture analizzate nel corso dello studio delle azioni interne e facciamo riferimento al suo diagramma dell'azione normale



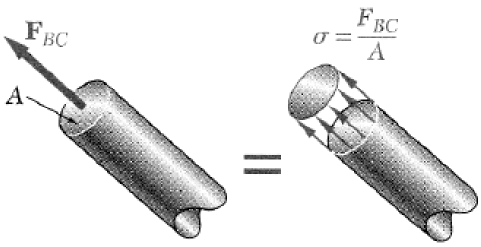
- Il diagramma dell'azione normale ci dice che la parte verticale della struttura è soggetta a compressione con una forza che è pari a

$$\frac{F}{2}+q\cdot L$$

- Tuttavia tale informazione, da sola, non è sufficiente a consentirci di sapere se la struttura, realizzata secondo una certa geometria e con un determinato materiale, resiste o collassa

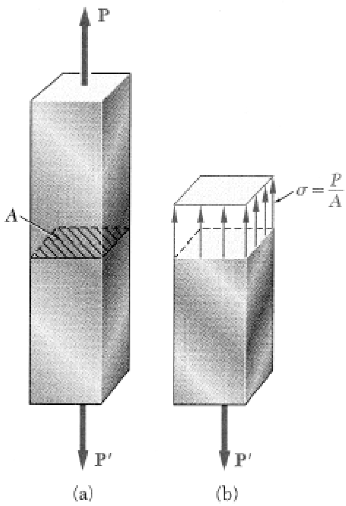
- **Occorre, anzitutto, esprimere lo "stato di sollecitazione" dell'asta**. Questo è **funzione del carico applicato e della geometria della struttura**

Considerazioni introduttive



- È intuitivo che, **a parità di forza applicata, un aumento della sezione del componente** (dove per sezione si intende l'area della superficie ottenuta "tagliando" l'asta con un piano perpendicolare al suo asse), **è garanzia di una maggior "resistenza" al carico applicato**

- La forza per unità di area, ossia l'intensità delle forze distribuite su una certa sezione, è chiamata **"tensione"** o **"stress"** e di solito viene indicata con la lettera greca **σ**.

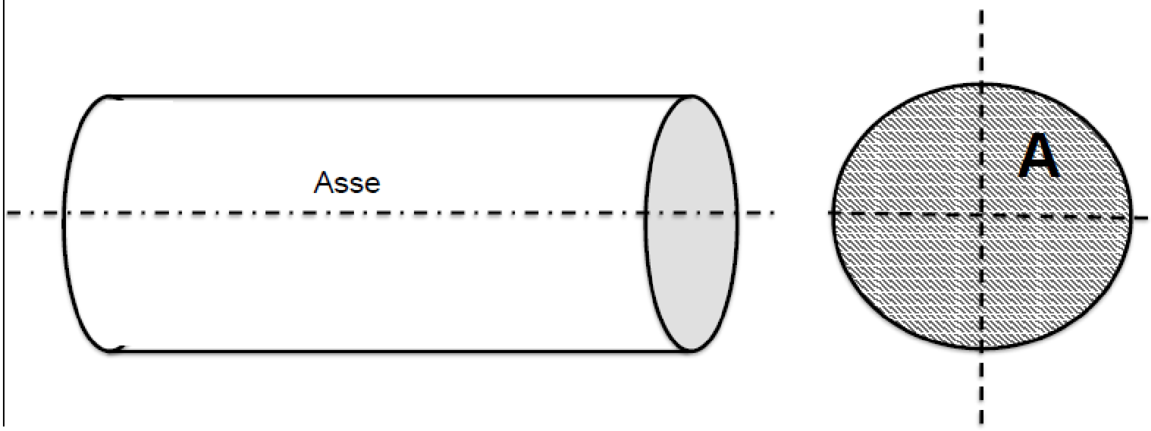


Considerazioni introduttive

- Per determinare in che modo si esprime lo stato di sollecitazione **nel caso di sola azione normale**, prendiamo in esame un solido ad asse rettilineo e sezione costante, caratterizzato da una dimensione prevalente rispetto alle altre due

- Il solido si caratterizza attraverso tre entità:

    1) L'asse baricentrico,
    2) La forma della sezione
    3) L'area della sezione

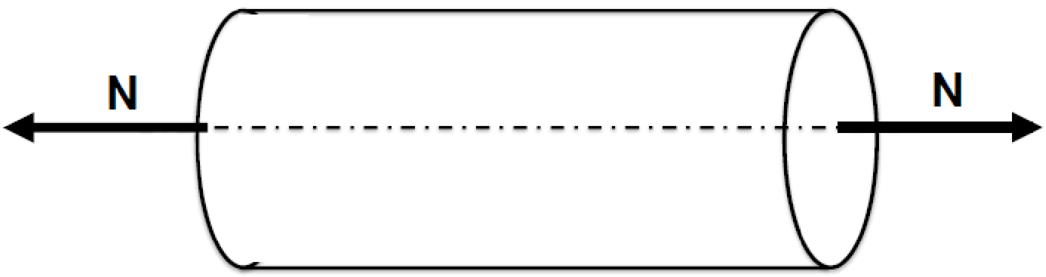


Considerazioni introduttive

- Si immagini di applicare, su una delle due superfici di base, una forza **N in direzione coincidente con quella dell'asse baricentrico** (forza ASSIALE o NORMALE)

- Per l'equilibrio del corpo, la forza sarà controbilanciata da una forza uguale e contraria applicata nella stessa direzione, ma di verso opposto, sull'altra faccia

- In questa configurazione, comune a numerose strutture civili, industriali, e dispositivi medici si dice che il solido subisce uno **sforzo ASSIALE o NORMALE**

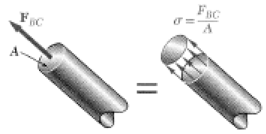


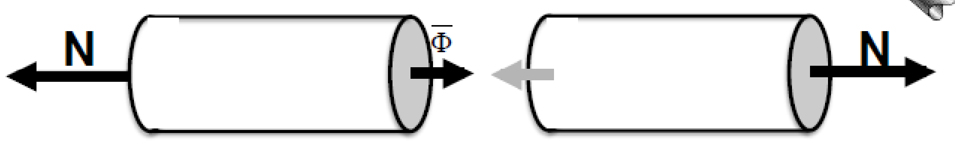
Considerazioni introduttive

- Se si immagina di “tagliare” la barra con una sezione perpendicolare all’asse, per l’equilibrio entrambe le porzioni dovranno scambiarsi una azione interna uguale alla forza N applicata

- Ciò può avvenire con la collaborazione di tutti i punti della sezione, sui quali agisce uno **sforzo normale** che è espresso come rapporto tra la forza applicata e la superficie (che si immagina infinitesima)

- Lo sforzo si rappresenta mediante il vettore $\overline{\Phi}$





- In questo specifico caso, lo sforzo $\overline{\Phi}$ **è uguale in ogni punto della superficie** ed è diretto normalmente ad essa

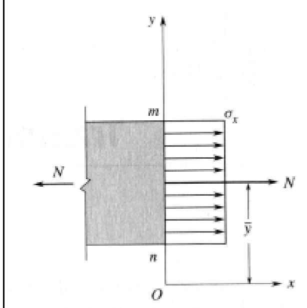
- Il vettore $\overline{\Phi}$ viene quindi a coincidere con la sua componente normale

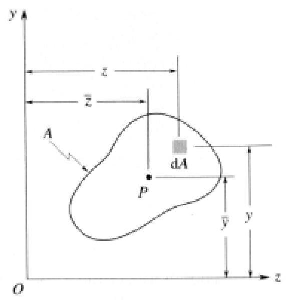
$$\overline{\Phi}_n = \overline{n} \cdot \sigma$$

Calcolo della tensione normale

- Se il materiale è omogeneo lo sforzo normale **N si distribuisce uniformemente in tutte le aree elementari** *da* della sezione, interessando in eguale misura tutte le ideali fibre disposte parallelamente all’asse **x** della trave, e dando origine a tensioni unitarie σ_x normali alla sezione trasversale A

- Il valore di σ_x si ricava imponendo che la risultante della distribuzione (uniforme) della sollecitazione sulla superficie di area **A** sia uguale all’azione interna **N**





$$\int_A \sigma_x dA = N$$

$\Downarrow$ da cui, essendo σ_x costante

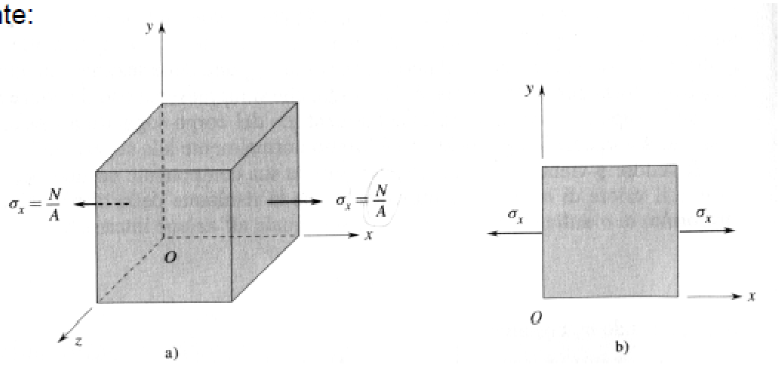
$$\sigma_x \cdot \int_A dA = N \Rightarrow \sigma_x \cdot A = N \Rightarrow \sigma_x = \frac{N}{A}$$

- È chiaro che **in condizioni di puro sforzo assiale, l’azione interna è uguale alla forza esterna applicata**

Calcolo della tensione normale

- Per visualizzare lo stato di sforzo spesso si fa riferimento alla rappresentazione di un volume elementare, il cosiddetto «elementino». Questo è di fatto un cubetto immaginario centrato sul punto nel quale si vogliono calcolare le sollecitazioni.

- Utilizzando tale schematizzazione, la rappresentazione dello sforzo assiale è la seguente:

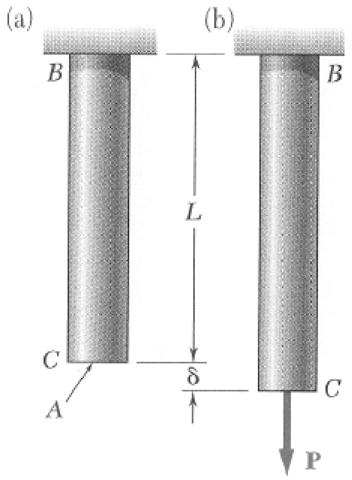


- Come accennato in precedenza, gli sforzi sono grandezze la cui dimensione corrisponde a quella di una pressione, essendo definiti come rapporto tra una forza ed una superficie. Nel SI si misurano in Pascal (Pa)

$$1\ Pa = 1\frac{N}{m^2} \qquad 1\ MPa = 1\frac{N}{mm^2}$$

Deformazioni conseguenti ad un carico assiale

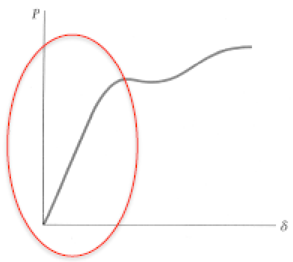
Analizziamo ora cosa accade ad un materiale elastico sottoposto a sforzo normale



- Consideriamo un'asta BC di lunghezza L, sospesa nel punto B.

- Se applichiamo un carico P alla sua estremità libera, l'asta si allunga. **È intuitivo che l'entità di tale allungamento sia associata all'entità del carico applicato** (maggiore il carico, maggiore l'allungamento)

- **Rappresentando in un diagramma che riporta in ascisse gli allungamenti e in ordinate i carichi applicati**, si ottiene un grafico simile a quello in figura

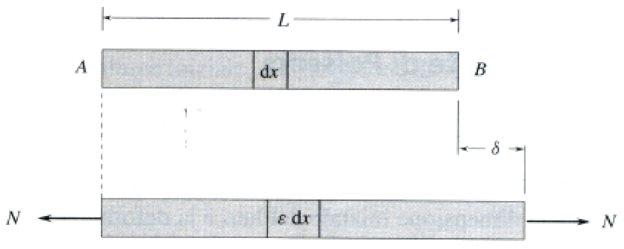


In una certa regione del grafico, si osserva che **l'allungamento è proporzionale al carico applicato**

Deformazioni conseguenti alla trazione

- Dunque, l'effetto macroscopico dell'applicazione di un carico assiale (e quindi del conseguente sforzo di trazione) su un corpo, è un **allungamento del corpo stesso**, ovviamente nell'ipotesi che questo sia deformabile (e quindi non perfettamente rigido)

- Le sezioni **A e B**, inizialmente a distanza **L**, al termine dell'applicazione del carico (che si suppone venga fatta **in modo quasi statico**, cioè con una velocità molto bassa) si verranno a trovare allontanate tra loro di una lunghezza **δ (m)**



- Il rapporto tra l'allungamento δ e la lunghezza iniziale del corpo **L**, si definisce **DEFORMAZIONE**.

$$\varepsilon = \frac{L_{finale} - L_{iniziale}}{L} = \frac{\delta}{L} \quad \left[\frac{m}{m}\right]$$

- La deformazione, essendo calcolata come rapporto tra due distanze, è **un numero puro.**

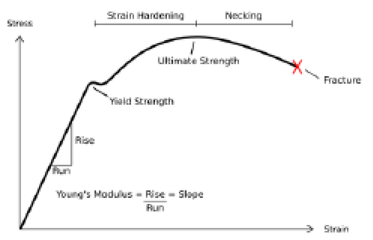
- Possiamo pensare alla deformazione come **all'allungamento per unità di lunghezza**

Relazione tra sforzi e deformazioni

- L'evidenza sperimentale dell'allungamento del corpo a seguito dell'azione di un carico assiale è stata utilizzata per "caratterizzare" il comportamento meccanico dei diversi materiali (la gomma si allunga di più dell'acciaio a parità di sezione e carico applicato!)

- Anche se non sempre il legame tra sforzi applicati e deformazioni non è di facile determinazione (come potremmo fare impiegando una prova sperimentale?) nel caso in cui il materiale di cui è composto il corpo sia "elastico", sforzi e deformazioni sono legati tra loro dalla **Legge di Hooke** (definita nel 1660 da Robert Hooke e valida sotto l'ipotesi che le deformazioni siano piccole)

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$



- Secondo tale relazione, la deformazione che subisce il corpo quando è sottoposto all'azione di una forza normale, è proporzionale allo sforzo mediante una costante di proporzionalità, tipica di ciascun materiale, che viene definita **modulo di elasticità longitudinale, o modulo di Young**

- Poiché la deformazione è un numero puro, ne consegue che **il modulo di Young ha le stesse dimensioni di uno sforzo, e dunque viene espresso in Pa (GPa)**

Il concetto di rigidezza

- Un concetto importante legato all'interazione della struttura con un carico esterno assiale è quello di «Rigidezza».
- Possiamo pensare alla rigidezza come alla **capacità di un elemento strutturale di opporsi alle deformazioni generate da un carico**
- Per definire analiticamente la rigidezza nel caso di sforzo assiale, riassumiamo le relazioni fin qui trovate per gli sforzi e le deformazioni

$$\begin{cases} 1)\ \sigma = \dfrac{N}{A} \\ 2)\ \varepsilon = \dfrac{\delta}{L} \Rightarrow \delta = \varepsilon \cdot L \\ 3)\ \sigma = E \cdot \varepsilon \end{cases}$$

Sollecitazione come rapporto tra carico e area della sezione

Deformazione come rapporto tra allungamento e lunghezza iniziale

Legge di Hooke (proporzionalità tra sforzi e deformazioni)

Dalla relazione (3) ricaviamo la deformazione
Sostituiamo all'espressione dello sforzo la (1)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$$

Sostituiamo questa relazione nella (2) ottenendo

$$\delta = \frac{NL}{EA}$$

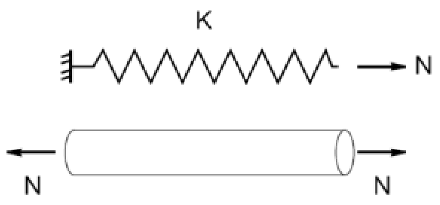
- Questa relazione ci permette di introdurre il concetto di «**rigidezza assiale equivalente»** di un corpo soggetto a trazione.

Il concetto di rigidezza

$$\delta = \frac{NL}{EA}$$

Perché si parla di rigidezza equivalente?

Se si fa riferimento allo schema ideale di una molla, di cui sia nota la forza necessaria per ottenere un allungamento unitario, cioè la sua rigidezza **k**, il legame tra forza e allungamento è rappresentato dalla formula



$$N = k \cdot \delta$$

Allora se si assimila il comportamento di un corpo elastico soggetto a trazione a quello della molla, **la rigidezza sarà espressa dalla relazione:**

$$k = \frac{EA}{L}$$

Rigidezza

L'inverso della rigidezza si definisce **cedevolezza** e si esprime come:

$$l = \frac{L}{EA}$$

Cedevolezza

Esercizio 1 (2.1 Beer)

Un asta di acciaio è lunga 2.2 m e non può allungarsi più di 1.2 mm quando le si applica un carico pari a 8.5 kN.

Sapendo che E=200 GPa, determinare

a) il più piccolo diametro dell'asta che si può usare
b) la corrispondente tensione normale causata dal carico

$$\delta = \frac{NL}{EA} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{NL}{E\delta}$$

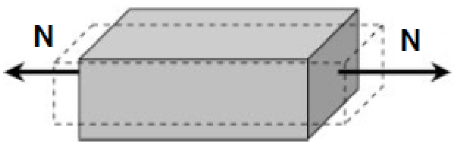
$$A = \frac{8500 \cdot 2.2}{200 \cdot 10^{9} \cdot 0.0012} = 7.792 \cdot 10^{-5}\, m^{2}$$

$$A = \frac{\pi \cdot D^{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad D = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{8500}{7.792 \cdot 10^{-5}} = 109.08\, MPa$$

Il coefficiente di Poisson

In un solido prismatico, la deformazione in senso assiale non è l'unica conseguenza causata dallo sforzo di trazione, infatti la struttura tende anche a **contrarsi** in direzione trasversale



È dunque possibile calcolare una **deformazione trasversale** definita dal rapporto tra dimensione iniziale e finale della sezione in direzione perpendicolare all'asse longitudinale

$$\varepsilon_{tr} = \frac{\delta_{tr}}{L_{tr}}$$

- La deformazione trasversale è proporzionale alla deformazione assiale e ha lo stesso valore in qualunque punto del solido elastico, **a patto che questo sia omogeneo**, cioè possegga uguali proprietà in tutti i suoi punti

- Se, poi, il materiale è anche **isotropo**, cioè possiede proprietà meccaniche indipendenti dalla direzione considerata, il rapporto tra la deformazione trasversale e quella assiale prende il nome di **coefficiente di Poisson**.

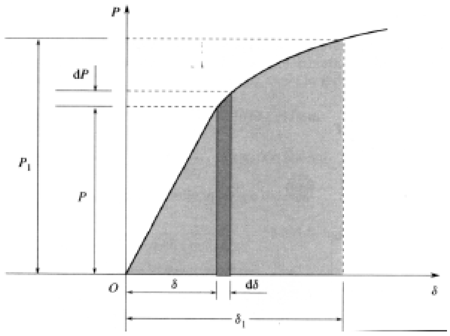
$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_{tr}}{\varepsilon_{lo}} \right|$$

Valori tipici del coefficiente di Poisson per i metalli sono nell'ordine di 0.25-0.35

Il lavoro di deformazione

Un'altra importante conseguenza dell'esistenza di una deformazione originata dall'applicazione di una forza è rappresentata da **un accumulo di energia** il cui valore può essere calcolato.

Nel caso della trazione, ipotizzando che il carico applicato P cresca da 0 al valore massimo gradualmente, in maniera quasi statica (ossia attraverso una successione di stati di equilibrio) gli estremi del prisma si allontanano di una quantità δ



Se si riporta in un diagramma l'andamento di P in funzione di δ si ottiene il grafico in figura. Un aumento del carico pari a dP provoca un allungamento $d\delta$

Il lavoro relativo a questo intervallo vale **$P \cdot d\delta$**

Il lavoro totale relativo all'allungamento finale vale:

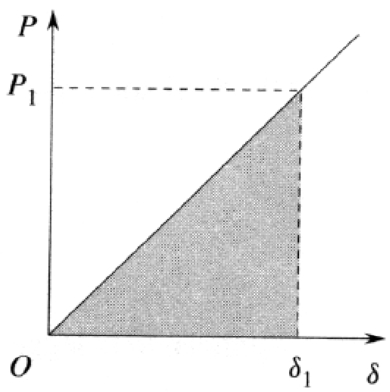
$$L = \int_0^{\delta_1} P \cdot d\delta$$

Questo integrale rappresenta di fatto l'area sottesa dalla curva **$P \cdot d\delta$**

Questo lavoro rappresenta **l'energia di deformazione** accumulata dal solido a seguito della deformazione provocata dall'azione del carico P

Il lavoro di deformazione

Nel caso in cui la **legge di variazione della deformazione rispetto al carico sia lineare** (come accade per la maggior parte dei materiali che presentano un comportamento elastico), l'espressione dell'energia di deformazione diventa:



$$L = \frac{P_1 \cdot \delta_1}{2} [N \cdot m]$$

Quindi, nel caso di un materiale elastico, si osserva che **il lavoro compiuto da una forza** che cresce linearmente da 0 al valore massimo **è la metà del lavoro che compirebbe la stessa forza quand'essa fosse mantenuta al valore costante per tutto il campo di spostamento**

(Teorema di Clapeyron)

Sempre nel caso di materiale a comportamento lineare è possibile definire l'energia accumuata da un volume unitario, o **densità di energia di deformazione** come segue:

$$\Psi = \frac{L}{V} = \frac{\frac{1}{2} P \cdot \delta}{A \cdot l} = \frac{1}{2} \cdot \overset{\sigma}{\frac{P}{A}} \cdot \overset{\varepsilon}{\frac{\delta}{l}} = \frac{1}{2} \sigma \cdot \varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E}$$