6.4 ■ Flessione retta

Nel caso della flessione retta al solido di de Saint Venant sono applicate alle basi distribuzioni di carichi corrispondenti a due coppie agenti in un piano contenente una direzione principale d'inerzia della sezione chiamato piano di sollecitazione. Nel seguito si suppone che sia applicata la coppia M_x con asse vettore parallelo ed equiverso all'asse principale d'inerzia, detto *asse momento* (Figura 6.18).

Piano di sollecitazione

Asse momento

6.4.1 Stato di tensione

La soluzione generale (6.22) o la trattazione presentata nel Paragrafo 3.2 mostrano che, anche in questo caso, l'unica componente diversa da zero del tensore delle tensioni **T** è la tensione normale σ_z, costante lungo l'asse della trave, che varia proporzionalmente alla distanza dall'asse momento:

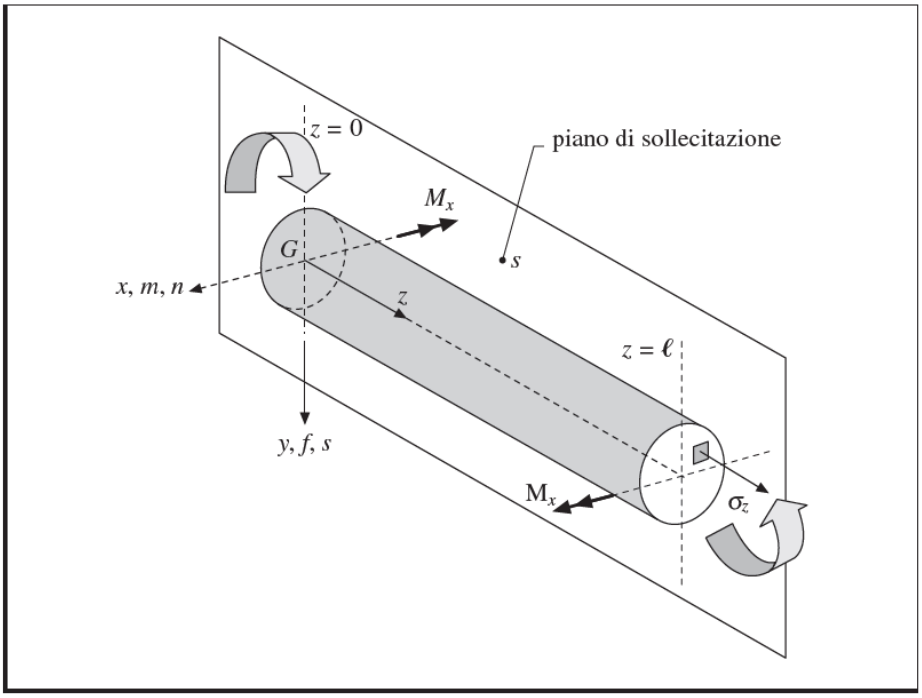
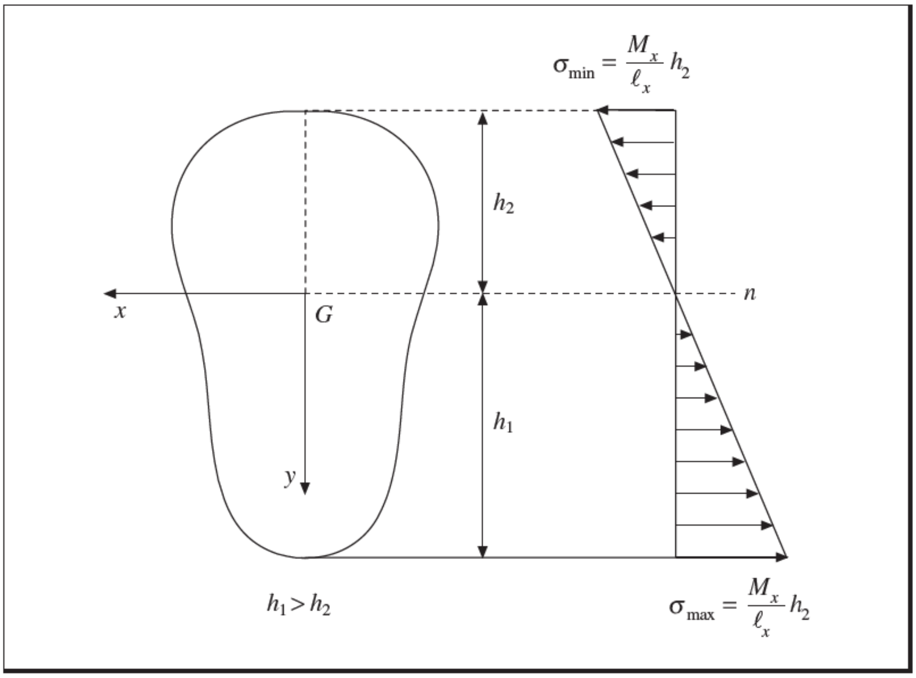


Figura 6.18 Flessione retta.

Figura 6.19 Stato tensionale dovuto alla flessione retta in una sezione generica.



$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y \tag{6.30}$$

Formula di Navier

La (6.30) viene indicata come *formula di Navier per la flessione retta.*

Asse neutro n

La tensione si annulla in corrispondenza dell'asse x che viene detto *asse neutro* n (Figura 6.19). L'asse y baricentrico e ortogonale all'asse momento si dice *asse di sollecitazione s*. Accettando tali denominazioni può dunque asserirsi che *nella flessione retta asse neutro e asse di sollecitazione sono mutuamente ortogonali.*

Si osservi inoltre, che in virtù della (6.30), per momenti positivi le fibre corrispondenti a $y > 0$ risultano tese, mentre quelle relative a $y < 0$ sono compresse.

L'andamento lineare delle σ_z comporta che i valori massimi e minimi delle tensioni si riscontrino nelle fibre più distanti dall'asse neutro. Siano h_1 e h_2 le distanze dall'asse neutro rispettivamente dell'estremo lembo teso e compresso. Le tensioni massima e minima risultano dunque:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_X} h_1 \qquad \sigma_{\min} = -\frac{M_x}{I_X} h_2 \tag{6.31}$$

Moduli di resistenza

Introdotti quindi i *moduli di resistenza*

$$W_{x1} = \frac{I_x}{h_1} \qquad W_{x2} = \frac{I_x}{h_2} \tag{6.32}$$

le (6.31), (6.32) possono scriversi:

Tensioni massime

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_{x1}} \qquad \sigma_{\min} = -\frac{M_x}{W_{x2}} \tag{6.33}$$

Se la sezione è simmetrica rispetto all'asse neutro, tali valori risultano uguali a meno del segno, in caso contrario le tensioni in modulo più elevate si hanno nei punti più distanti dall'asse neutro. Questi due casi sono rispettivamente illustrati nei due esempi seguenti.

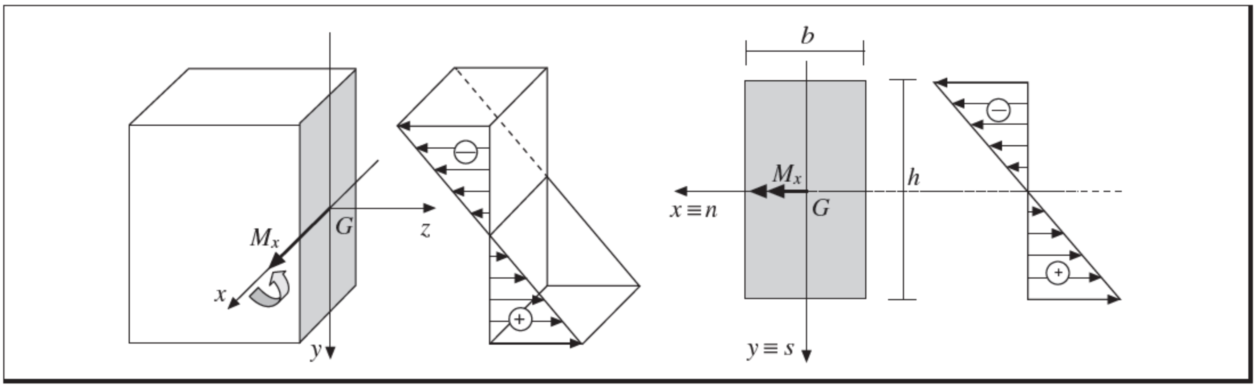


Figura 6.20 Flessione retta nella sezione rettangolare.

Sezione rettangolare in flessione retta

■ **Esempio 6.5**

Lo stato tensionale in una sezione rettangolare è mostrato in Figura 6.20, dove nel caso in esame risulta:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \qquad W_x = \frac{bh^2}{6}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x}\frac{h}{2} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{6M_x}{bh^2} \qquad \left(\text{per } y = \frac{h}{2}\right)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M_x}{I_x}\left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{M_x}{W_x} = -\frac{6M_x}{bh^2} \qquad \left(\text{per } y = -\frac{h}{2}\right)$$

Sezione a T

■ **Esempio 6.6**

In Figura 6.21 è riportato l'andamento delle tensioni in una sezione a T soggetta a flessione retta, dove nel caso in figura $I_x = 17/2\ a^4$; pertanto risulta:

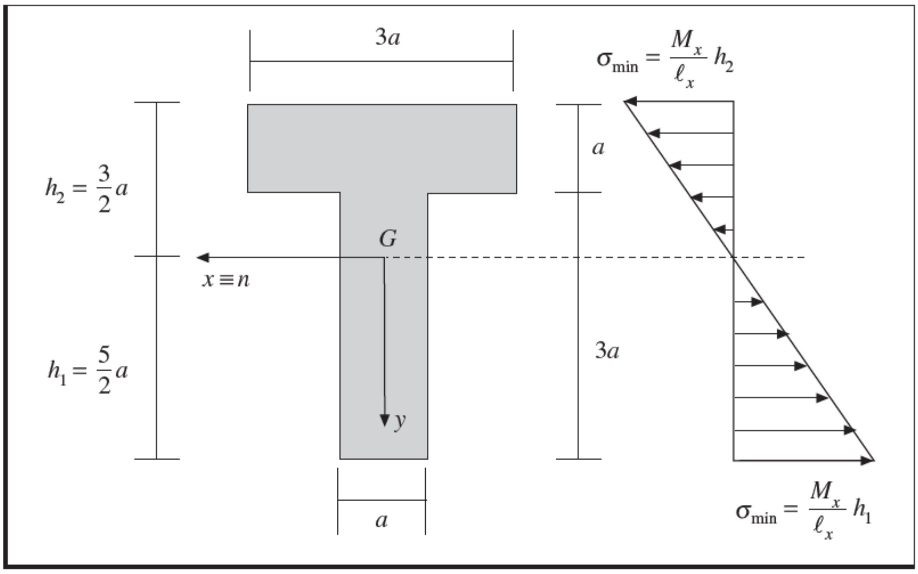


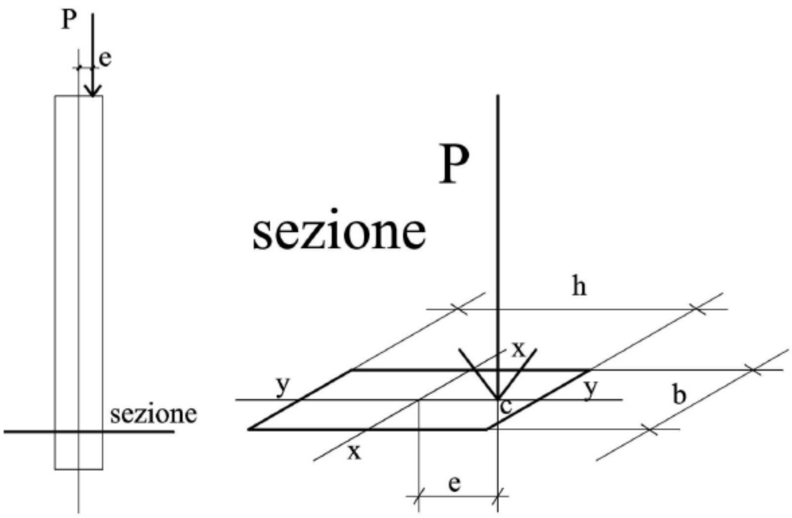
Figura 6.21 Flessione retta nella sezione a T.

$$W_{x1} = \frac{17}{5}a^3 \qquad W_{x2} = \frac{17}{3}a^3$$

$$\sigma_{z\ \max} = \frac{5}{17}\frac{M_x}{a^3} \quad \left(\text{per } y = \frac{5}{2}a\right) \quad \sigma_{z\ \min} = -\frac{3}{17}\frac{M_x}{a^3} \quad \left(\text{per } y = -\frac{3}{2}a\right)$$

PRESSO-FLESSIONE RETTA

Consideriamo un elemento strutturale verticale (Pilastro) soggetto ad uno carico **P** "eccentrico", cioè applicato nella sezione in un punto **c** (centro di pressione) che non corrisponde al centro della sezione (incontro degli assi principali), ma ha una eccentricità **e** (rispetto all'asse **x**).



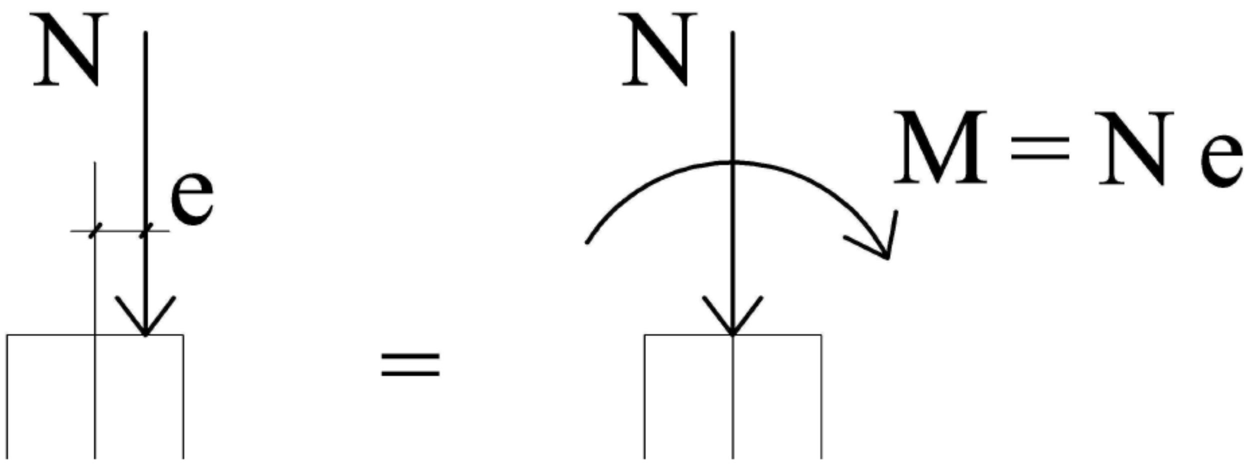
P = carico applicato
e = eccentricità
c = centro di pressione
x, y = assi principali della sezione
b,h = dimensione della sezione

La presso-flessione si dice "**retta**" quando il punto **c** appartiene ad uno degli assi principali X, Y; "**deviata**" quando il centro di pressione **c** è fuori dagli assi principali X, Y.

Sollecitazioni conseguenti al Carico eccentrico

Il carico eccentrico **P** determina due sollecitazioni sulla sezione che intendiamo verificare:

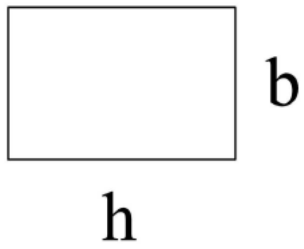
- SFORZO NORMALE **N**, uguale a **P**
- MOMENTO FLETTENTE **M**, uguale a **al prodotto N e**



Per effettuare la verifica della sezione dobbiamo conoscere l'andamento delle tensioni normali σ. Questo è necessario per potere individuare il valore massimo della tensione σ nella sezione; valore che dovrà essere confrontato con il valore massimo ammissibile (σ ammissibile) per potere verificare la resistenza della sezione.

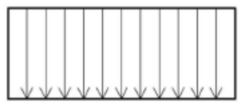
Nel caso della pressoflessione possiamo ottenere diversi tipi di diagramma in funzione della eccentricità. Per questo dobbiamo esaminare i diversi casi possibili.

Ricordiamo che se una sezione rettangolare è soggetta a solo Sforzo Normale **N** il diagramma delle tensioni σ è costante in tutta la sezione e vale:



$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Dove **N** è lo sforzo normale e **A** è l'area della sezione



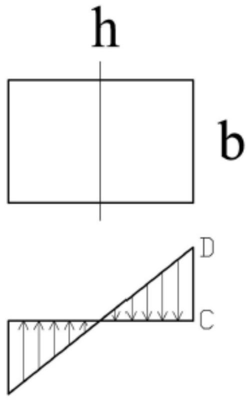
$$A = b * h$$

Se invece una sezione rettangolare è soggetta a <u>Flessione Retta</u>, il diagramma delle tensioni è "intrecciato", con un valore nullo a metà altezza (in corrispondenze dell'asse neutro). Nel diagramma sono presenti due valori massimi significativi; il valore massimo della σ di compressione ed il valore massimo della σ di trazione. Questi due valori massimi sono però uguali nel caso di sezione rettangolare, e si possono calcolare con la formula:

$$\sigma\, max\, trazione = \sigma\, max\, compressione = \frac{M}{W}$$

Dove **W** è il modulo di resistenza che, per una sezione rettangolare di base b e altezza h, si calcola con l'espressione:

$$W = \frac{b * h^2}{6}$$

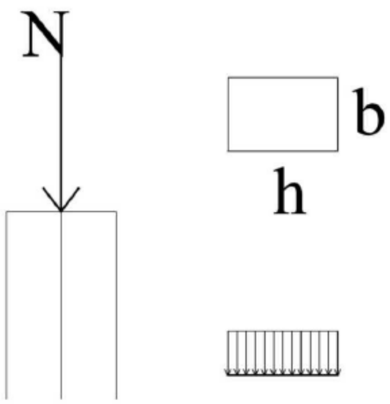


Se una sezione è soggetta a pressoflessione abbiamo la presenza contemporanea di uno sforzo normale di compressione e di momento flettente. Il diagramma delle tensioni σ che otterremo, sarà uguale alla somma dei due diagramma. Questo in base al principio di "sovrapposizione degli effetti".

Esaminiamo allora i diversi casi che conducono a diversi diagrammi di tensioni σ.

<u>1° CASO: eccentricità = 0</u>

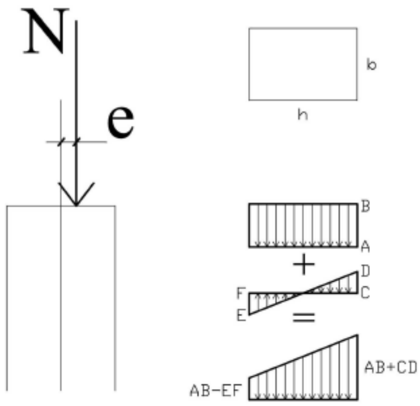
In questo caso non possiamo parlare di "pressoflessione" ma di "Sforzo normale Centrato". I diagramma delle σ è costante come prima illustrato.



$$\sigma = \frac{N}{A}$$

2° CASO: piccola eccentricità

In questo le tensioni σ nella sezione non sono più costanti, come il caso precedente ma variano, pur restando sempre di compressione. Il diagramma risulta essere a forma di trapezio con un valore massimo e minimo della σ. Questo perchè il segmento AB (=N/A) è maggiore al segmento CD (M / W).



Possiamo calcolare il valore massimo e minimo delle σ con le formule:

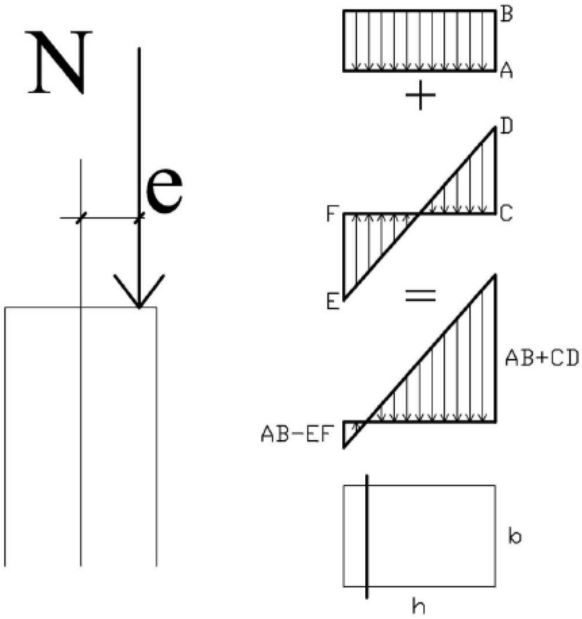
$$\sigma\ massima = \frac{N}{A} + \frac{M}{W}$$

$$\sigma\ minima = \frac{N}{A} - \frac{M}{W}$$

Dovendo effettuare la verifica, confronteremo la σ massima con la σ ammissibile.

4° CASO: grande eccentricità – Materiale che resiste anche trazione

Se il materiale resiste anche a trazione (Acciaio e legno), può succedere per grandi eccentricità che il rapporto M/W sia superiore al rapporto N/A. In questo caso avremo all'interno della sezione un asse neutro che divide una zona di compressione ed una zona di trazione.



I valori massimi di compressione e trazione di possiamo calcolare con queste formule:

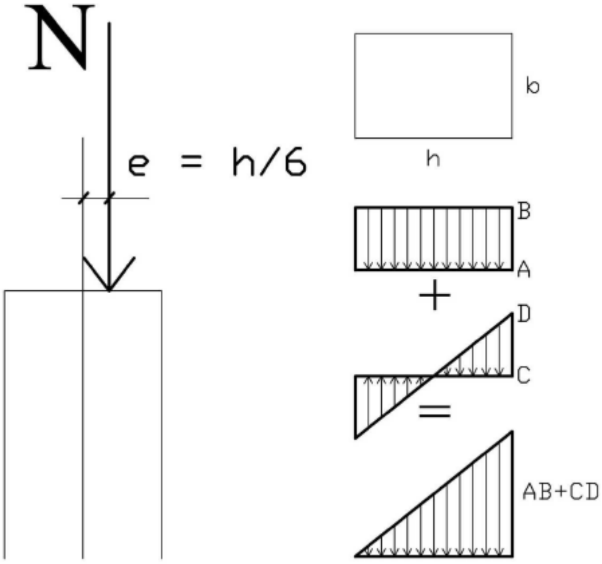
$$\sigma\ massima\ di\ trazione = \frac{M}{W} - \frac{N}{A}$$

$$\sigma\ massima\ di\ compressione = \frac{N}{A} + \frac{M}{W}$$

Per la verifica dovremo confrontare i due valori massimi con i rispettivi valori ammissibili a trazione e a compressione del materiale. Nel caso in cui la ammissibile del materiale a compressione e a trazione sia identica, come nel caso dell'acciaio, sarà sufficiente eseguire una sola verifica.

3° CASO: caso limite

Tra il 2° caso (diagramma trapeziodale) e il 4° caso (diagramma intrecciato) esiste un caso limite in cui il diagramma è triangolare. Questo caso consente di definire l'eccentricità limite ad di sotto della quale tutta la sezione è compressa.



$$\frac{M}{W}-\frac{N}{A}=0$$

Sostituendo W e A

$$\frac{6*N*e}{(b*h^2)}=\frac{N}{(b*h)}$$

Semplificando

$$\frac{6*e}{h}=1$$

Da cui si ricava

$$e=\frac{h}{6}$$

Dovendo effettuare delle verifiche di resistenza dobbiamo determinare il valore massimo della σ di compressione. Applicando la formula:

$$\sigma\ massima=\frac{N}{A}+\frac{M}{W}$$

considerato che

$$\frac{M}{W}=\frac{N}{A}$$

possiamo concludere che

$$\sigma\ massima=\frac{2*N}{A}=\frac{2*N}{(b\,h)}$$

Avendo determinato il valore dell'eccentricità limite possiamo ora definire in modo più corretto i casi già esaminati:

1° CASO: e = 0

2° CASO: e < h/6 (piccola eccentricità)

3° CASO: e = h/6 (caso limite)

4° CASO: e > h/6 (grande eccentricità – Materiale resistente a trazione)