

# TORSIONE SEMPLICE

## 1 Analisi della torsione semplice

Si verifica la **sollecitazione di torsione semplice** quando la risultante delle forze esterne relativa a qualunque sezione è nulla e le forze esterne si riducono a una coppia giacente nel piano della sezione considerata.

Le forze che precedono la sezione considerata appartengono a un piano  $\alpha$  non contenente l'asse geometrico  $z$  del solido, per cui hanno un momento rispetto all'asse stesso, detto **momento torcente**,  $M_t = P \cdot d$  [fig. 1].

Il solido è quindi sollecitato da due coppie di momento uguale e contrario agenti alle estremità, su piani perpendicolari all'asse geometrico  $z$  [fig. 2].

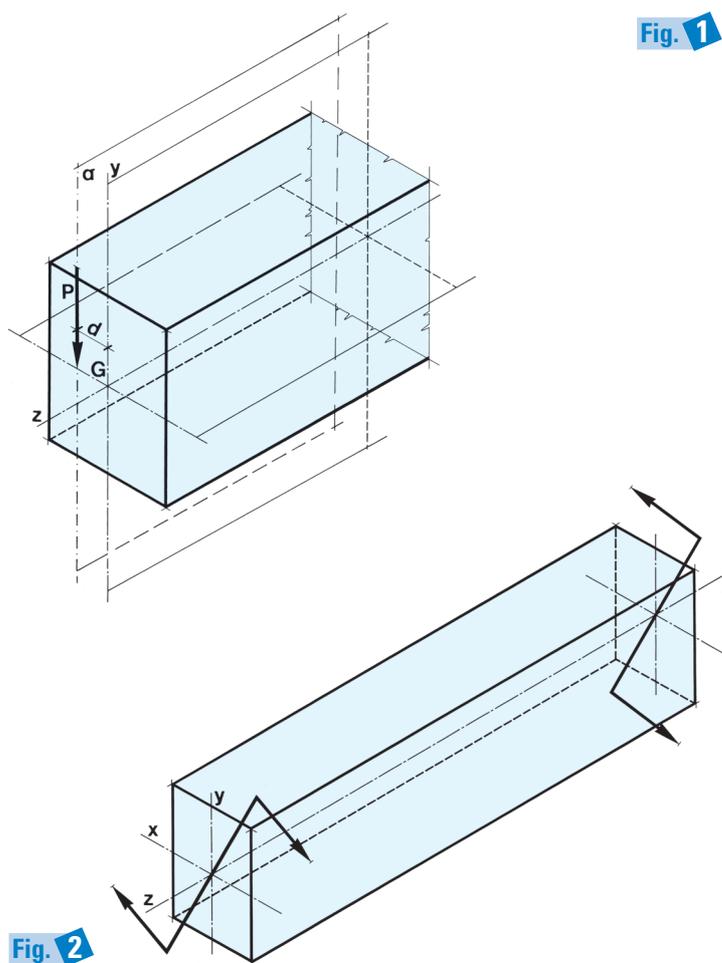


Fig. 1

Fig. 2

L'effetto che producono le due coppie è la rotazione di ogni sezione rispetto alla precedente di un certo angolo intorno a un punto; l'insieme di tali punti individua l'asse geometrico del solido; tale asse rimane rettilineo nella deformazione, mentre le fibre a esso parallele si dispongono secondo un'elica.

Difficilmente in un solido si ha solo torsione, in quanto il solo peso proprio dell'elemento produce anche le sollecitazioni di flessione e taglio.

Si fa inoltre notare che la sollecitazione di torsione è molto comune negli organi meccanici, quali gli alberi di trasmissione, mentre è piuttosto rara nelle costruzioni edili, potendosi verificare nelle travi a sostegno di scale a sbalzo [fig. 3] e in alcuni casi di pensiline e balconi [fig. 4].

Il calcolo delle tensioni indotte dalla torsione può essere effettuato con procedimenti elementari per sezioni circolari piene o cave.

Per altri tipi di sezioni lo studio risulta più complesso e viene condotto applicando la teoria dell'elasticità, mentre per travi tubolari di ridotto spessore si può giungere a risultati validi anche se ottenuti con una trattazione approssimata.

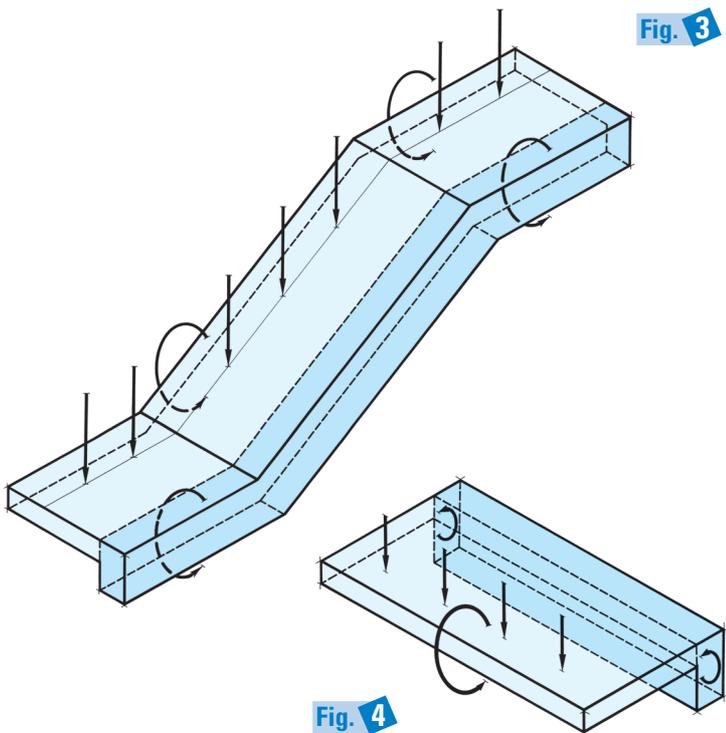


Fig. 3

Fig. 4

## 2 Sezione circolare piena

Considerando un solido cilindrico [fig. 5] sulle cui sezioni estreme giacciono due coppie con momento  $M_t$  uguale e contrario, il valore del momento si mantiene costante per tutta la lunghezza  $l$  del solido e determina una torsione, ossia le fibre, prima parallele e rettilinee, si dispongono secondo eliche cilindriche.

Questa deformazione si traduce in una rotazione di ogni sezione rispetto alla precedente di un certo angolo  $\varphi$ , detto **angolo di torsione**, tanto maggiore quanto più grande è la distanza fra le due sezioni considerate; inoltre, in perfetta aderenza all'ipotesi di Navier, durante la deformazione le sezioni

si mantengono piane e non si deformano nel loro piano, per cui i raggi uscenti dal centro restano rettilinei e ognuno di essi ruota dell'angolo  $\varphi$ . L'asse geometrico del solido si mantiene rettilineo.

Prendendo due sezioni  $s$  e  $t$  a distanza unitaria [fig. 5], la deformazione unitaria, detta in questo caso **scorrimento unitario** e indicato con  $\gamma$ , è rappresentata dallo spostamento  $b$  in  $b_1$ ; cioè del punto  $b$  in  $b_1$ ; tale spostamento dipende dall'**angolo unitario di torsione**  $\Theta$  e dalla distanza  $r$  del punto  $b$  dal centro  $O$  per cui risulta:

$$\gamma = \Theta \cdot r$$

In questa deformazione si ammette che la dilatazione di ogni fibra sia nulla ( $\sigma = 0$ ).

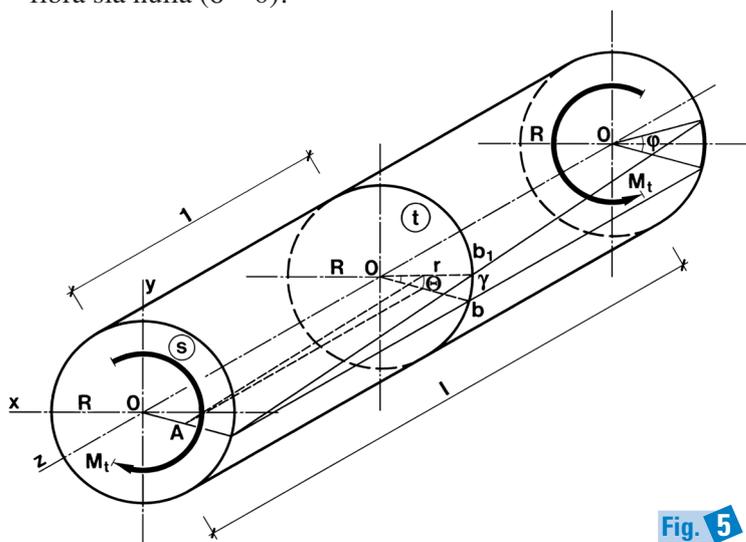


Fig. 5

Limitandosi a considerare due sezioni adiacenti qualsiasi, la rotazione di una di queste rispetto all'altra è dovuta a tensioni tangenziali  $\tau$ , determinate dalle forze esterne applicate, normali alle fibre longitudinali della trave e giacenti nel piano delle sezioni, alle quali si oppongono le tensioni interne che in ogni caso non devono superare quelle massime consentite.

Queste tensioni tangenziali  $\tau$ , in una sezione generica [fig. 6], sono proporzionali alla distanza  $r$  dal centro della sezione ( $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ ).

La tensione tangenziale  $\tau$  è perpendicolare al raggio passante per il punto  $C$  generico e allo scorrimento che avviene del punto generico da  $C$  a  $C_1$  per effetto della torsione [fig. 6]; per la legge di Hooke tale scorrimento è proporzionale alla tensione tangenziale per cui si ha:

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \Theta \cdot r \quad \text{da cui} \quad G \cdot \Theta = \frac{\tau}{r} \quad [1 \text{ e } 2]$$

essendo  $G$  il modulo di elasticità tangenziale che varia da materiale a materiale.

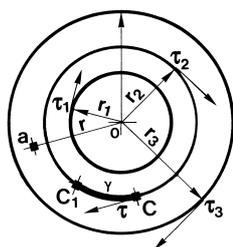


Fig. 6

Un elemento piccolissimo di area  $a$  distante dalla quantità generica  $r$  da  $O$  e appartenente a una sezione qualsiasi è soggetto a uno sforzo  $\tau \cdot a$ ; detto sforzo, rispetto al centro  $O$  della sezione, genera un momento torcente:

$$M_t = \tau \cdot a \cdot r$$

nel quale sostituendo la [1] si ha:

$$M_t = G \cdot \Theta \cdot r \cdot a \cdot r = G \cdot \Theta \cdot a \cdot r^2$$

Estendendo lo stesso ragionamento a tutti gli elementi piccolissimi costituenti il cerchio di raggio  $R$  si ottiene:

$$M_t = G \cdot \Theta \cdot \sum (a \cdot r^2)$$

sostituendo la [2] e osservando che il termine fra parentesi rappresenta il momento d'inerzia polare del cerchio, si ha:

$$M_t = \frac{\tau}{r} \cdot I_p \quad \text{da cui} \quad \tau = \frac{M_t \cdot r}{I_p} \quad [3 \text{ e } 4]$$

che fornisce la tensione tangenziale in un punto generico a distanza  $r$  dal centro  $O$ ; è opportuno notare l'analogia della formula con quella della flessione semplice.

Le tensioni tangenziali variano con legge lineare da un valore nullo in corrispondenza del centro  $O$  a quello massimo nelle fibre più lontane a distanza  $R$  [fig. 7].

Poiché la tensione massima si verifica al contorno della sezione circolare, per  $r = R = D/2$  si avrà:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t \cdot D}{2 I_p} \quad [5]$$

dove il rapporto

$$W_t = \frac{I_p}{D/2}$$

rappresenta il **modulo di resistenza a torsione**, ed essendo:

$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$$

sostituendo si ottiene:

$$\tau_{\max} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot D^3} \quad [6]$$

che fornisce la **tensione tangenziale massima per torsione di una sezione circolare**.

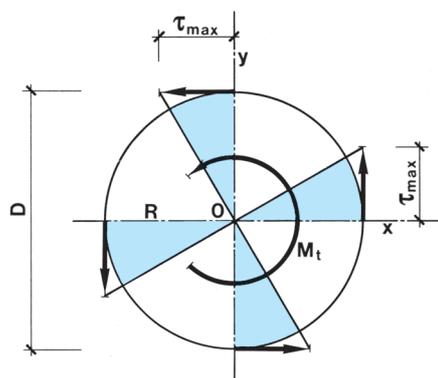


Fig. 7

Per la sezione circolare l'ipotesi che le sezioni si mantengano piane durante la deformazione si può ritenere reale; altrettanto non è nel caso di altre sezioni quale quella rettangolare.

Mentre per la sezione circolare la distribuzione delle tensioni è lineare dal centro al contorno, per altre forme di sezione questo non si verifica.

Particolarmente per la sezione circolare, l'andamento delle tensioni può essere evidenziato in modo abbastanza esatto rifacendosi a una *analogia idrodinamica*; quando un liquido, contenuto in un recipiente con la stessa forma della sezione, viene sottoposto a un moto rotatorio, le molecole del liquido nel loro movimento percorrono delle traiettorie che, in una sezione, sono analoghe alle linee di uguale tensione tangenziale dovute alla torsione; infatti la velocità di una molecola dipende dalla sua distanza dal centro della sezione, come si verifica per le tensioni.

L'**angolo totale di torsione** fra due sezioni poste a distanza  $l$  è dato da:

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p}$$

e sostituendo i valori di contorno della sezione circolare si ha:

$$\varphi = \frac{32 \cdot M_t \cdot l}{\pi \cdot G \cdot D^4} \quad [7]$$

che permette di calcolare l'angolo totale di torsione al contorno fra due sezioni espresso in radianti.

Il valore del modulo di elasticità tangenziale  $G$  è legato al modulo di elasticità  $E$  dalla relazione:

$$G = \frac{m}{2 \cdot (m + 1)} \cdot E$$

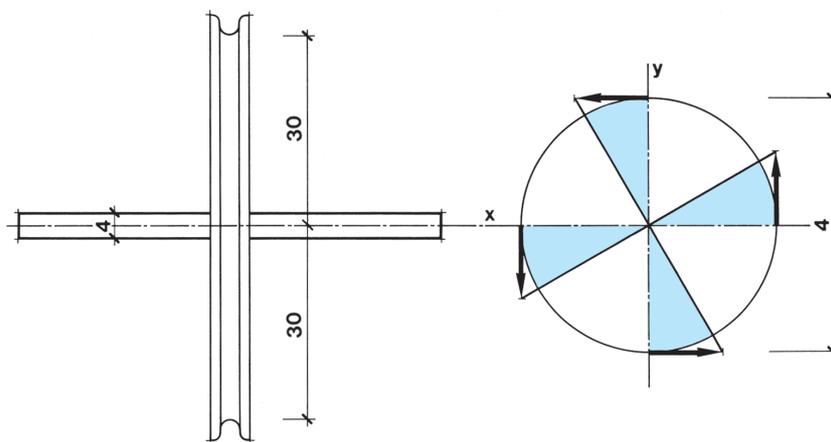
essendo  $1/m = \mu$  il coefficiente di Poisson.

## ESERCIZI SVOLTI

1

Su un corto albero di trasmissione in acciaio, con diametro  $\varnothing = 40$  mm e lunghezza  $l = 0,60$  m, è montata una puleggia con raggio  $r = 30$  cm.

Calcolare il carico massimo perimetrale che può essere sollevato e l'angolo totale di torsione, facendo in modo che la tensione massima non superi il valore di  $120$  N/mm<sup>2</sup>.



Assumendo per l'acciaio una tensione massima  $\tau = 120$  N/mm<sup>2</sup>, si applica la formula di collaudo:

$$M_t = \frac{\pi \cdot D^3 \cdot \tau}{16} = \frac{\pi \cdot 40^3 \times 120}{16} \approx 1507,96 \times 10^3 \approx 1,51 \text{ kN m}$$

ed essendo il momento torcente dato da:

$$M_t = P \cdot r \quad \text{ossia} \quad 1,51 = P \cdot 0,30$$

si ricava:

$$P = \frac{1,51}{0,30} \approx 5,03 \text{ kN}$$

Assumendo  $G = 85 \times 10^3$  N/mm<sup>2</sup>, l'angolo totale di torsione vale:

$$\varphi = \frac{32 \cdot M_t \cdot l}{\pi \cdot G \cdot D^4} = \frac{32 \times 1,51 \times 10^6 \times 600}{\pi \cdot 85 \times 10^3 \times 40^4} \approx 0,0424 \text{ radianti}$$

- 2** Un albero di trasmissione in acciaio, lungo 1,50 m e con il diametro  $D = 80$  mm, è sollecitato dal momento torcente  $M_t = 9$  kNm.  
Calcolare la tensione massima che si verifica nell'albero e l'angolo totale di torsione.

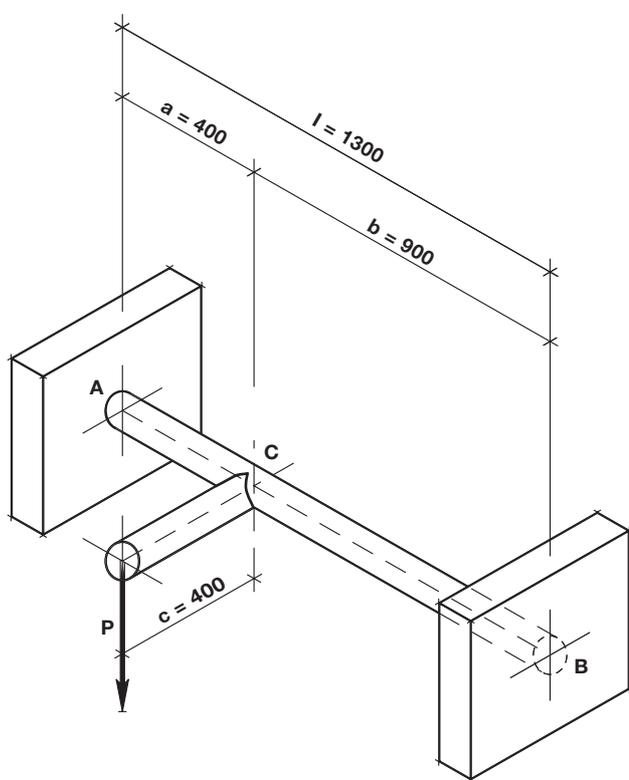
La tensione tangenziale massima risulta:

$$\tau_{\max} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot D^3} = \frac{16 \times 9 \times 10^6}{\pi \cdot 80^3} \approx 89,52 \text{ N/mm}^2$$

Assumendo per il modulo di elasticità tangenziale il valore  $G = 85 \times 10^3$  N/mm<sup>2</sup>, l'angolo totale di torsione vale:

$$\varphi = \frac{32 \cdot M_t \cdot l}{\pi \cdot G \cdot D^4} = \frac{32 \times 9 \times 10^6 \times 1,50 \times 10^3}{\pi \cdot 85 \times 10^3 \times 80^4} \approx 0,0395 \text{ radianti}$$

- 3** Un albero in acciaio, con diametro  $D = 70$  mm, è soggetto al carico  $P = 20$  kN applicato all'estremità di una mensola lunga 400 mm in direzione normale all'asse dell'albero, situata in una posizione intermedia.  
Calcolare i valori dei momenti torcenti nei due tratti AC e BC, e determinare la tensione massima.



Il momento torcente vale:

$$M_t = P \cdot c = 20 \times 0,40 = 8 \text{ kNm}$$

La sezione C, pensata come appartenente al tronco AC, ruota dell'angolo  $\varphi_{(AC)}$  che deve essere uguale all'angolo  $\varphi_{(BC)}$  del quale ruota la stessa sezione C pensata come appartenente al tronco BC, ossia  $\varphi_{(AC)} = \varphi_{(BC)}$  e sostituendo la [7] si ha:

$$\frac{32 \cdot M_{t,(AC)} \cdot a}{\pi \cdot G \cdot D^4} = \frac{32 \cdot M_{t,(BC)} \cdot b}{\pi \cdot G \cdot D^4}$$

e semplificando si ottiene:

$$M_{t,(AC)} \cdot a = M_{t,(BC)} \cdot b$$

Inoltre deve essere:

$$M_{t,(AC)} + M_{t,(BC)} = M_t$$

Risolviendo il sistema formato da queste ultime due relazioni, ponendo  $M_{t,(AC)} = M_t - M_{t,(BC)}$  e  $a + b = l$ , si ricava:

$$M_{t,(BC)} = \frac{M_t \cdot a}{l} = \frac{8 \times 10^6 \times 0,40 \times 10^3}{1,30 \times 10^3} \approx 2,46 \times 10^6 \text{ N mm} \approx 2,46 \text{ kNm}$$

Analogamente si ha:

$$M_{t,(AC)} = \frac{M_t \cdot b}{l} = \frac{8 \times 10^6 \times 0,90 \times 10^3}{1,30 \times 10^3} \approx 5,54 \times 10^6 \text{ N mm} \approx 5,54 \text{ kNm}$$

La tensione massima risulta:

$$\tau_{\max} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot D^3} = \frac{16 \times 8 \times 10^6}{\pi \cdot 70^3} \approx 118,79 \text{ N/mm}^2$$

### 3 Sezione circolare cava

Quanto esposto per la sezione circolare piena è valido anche quando la sezione è una corona circolare [fig. 8].

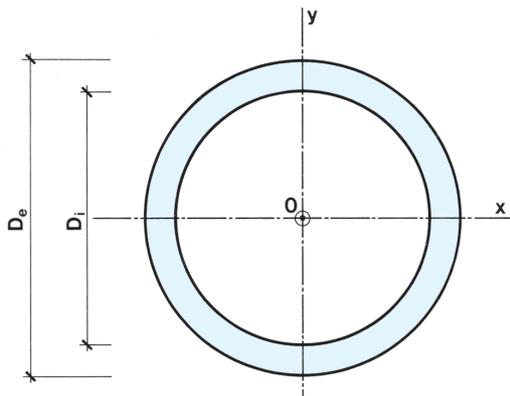


Fig. 8

Indicando con  $D_e - D_i$  la differenza fra i diametri esterno e interno, si ha:

■ momento d'inerzia polare:

$$I_p = \frac{\pi \cdot (D_e^4 - D_i^4)}{32}$$

■ tensione tangenziale massima al contorno:

$$\tau_{\max} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot (D_e^3 - D_i^3)}$$

[8]

■ angolo di torsione totale:

$$\varphi = \frac{32 \cdot M_t \cdot l}{\pi \cdot G \cdot (D_e^4 - D_i^4)}$$

## ESERCIZI SVOLTI

- 4** Una sezione circolare cava in acciaio, lunga 1,30 m, presenta un diametro esterno  $D_e = 140$  mm e interno  $D_i = 120$  mm ed è soggetta a un momento torcente  $M_t = 24$  kN m. Verificare la stabilità della sezione e calcolare l'angolo di torsione dell'asse.

Assumendo una tensione tangenziale ammissibile  $\tau_{\text{am}} = 120$  N/mm<sup>2</sup>, con la formula di verifica si ottiene:

$$W_t = \frac{\pi \cdot (D_e^3 - D_i^3)}{16} = \frac{\pi \cdot (14^3 - 12^3)}{16} \approx 199,49 \text{ cm}^3$$

$$\tau = \frac{M_t}{W_t} = \frac{24 \times 10^6}{199,49 \times 10^3} \approx 120,31 \text{ N/mm}^2$$

L'angolo di torsione totale risulta:

$$\varphi = \frac{32 \cdot M_t \cdot l}{\pi \cdot G \cdot (D_e^4 - D_i^4)} = \frac{32 \times 24 \times 10^6 \times 1300}{\pi \cdot 85\,000 \times (140^4 - 120^4)} \approx 0,02115 \text{ radianti}$$

- 5** Una sezione circolare piena con diametro  $D = 90$  mm e una anulare con lo stesso diametro esterno e spessore della parete  $s = 15$  mm sono entrambe sollecitate dal momento torcente  $M_t = 11$  kN m. Calcolare le tensioni che si verificano nelle due sezioni e confrontare i valori ottenuti.

*Sezione circolare piena*

La tensione massima risulta:

$$\tau_{\max} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot D^3} = \frac{16 \times 11 \times 10^6}{\pi \cdot 90^3} \approx 76,85 \text{ N/mm}^2$$

*Sezione anulare*

Il diametro interno è  $D_i = 90 - 30 = 60$  mm.

La tensione massima risulta:

$$\tau_{\max} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot (D_e^3 - D_i^3)} = \frac{16 \times 11 \times 10^3}{\pi \cdot (90^3 - 60^3)} \approx 109,21 \text{ N/mm}^2$$

Confrontando i risultati si possono fare le seguenti osservazioni:

- la sezione circolare piena ha un'area  $A \approx 63,62 \text{ cm}^2$  mentre quella della sezione anulare è  $A \approx 35,34 \text{ cm}^2$ , ossia è circa 1,8 volte minore rispetto alla prima, con una uguale riduzione di materiale;
- a parità di momento torcente, la tensione nella sezione circolare piena è circa 1,42 volte minore rispetto a quella della sezione anulare;
- in base a quanto sopra, si deduce che, a parità di tensione, la sezione piena con un'area 1,8 volte più grande di quella anulare può sopportare un momento torcente solo 1,42 volte maggiore rispetto a quello della sezione anulare, che risulta quindi più conveniente.

## 4 Sezioni non circolari

La teoria elementare applicata per sezioni circolari piene o cave non è più valida per le sezioni non circolari, in quanto le sezioni, inizialmente piane, per effetto dell'azione torcente si deformano, diventando cioè gobbe, pur mantenendosi rettilinei i raggi uscenti dal centro della sezione [fig. 9].

Inoltre, le tensioni tangenziali massime si verificano nei punti del contorno più vicini al baricentro della sezione anziché in quelli più lontani.

Per sezioni non circolari lo studio della torsione risulta quindi molto complesso e generalmente per il calcolo delle tensioni tangenziali si ricorre a formule empiriche. Verrà esaminata solo la sezione rettangolare, per la quale verranno fornite solo le formule applicative finali.

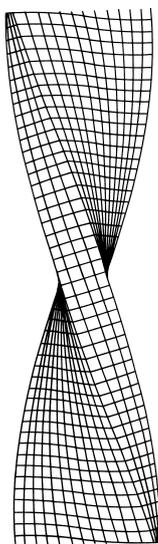


Fig. 9

### Sezione rettangolare

Lungo le diagonali, la tensione tangenziale, partendo da un valore nullo in corrispondenza del baricentro  $G$ , cresce sino a un certo punto, quindi diminuisce per ritornare a un valore nullo ai vertici, ove non si hanno quindi distorsioni [fig. 10].

Lungo le mediane le tensioni aumentano da un valore nullo in  $G$  a un massimo alle estremità, per cui la massima distorsione si verifica nei punti di mezzo dei lati, e in particolare è maggiore nei punti medi dei lati maggiori; in questi ultimi punti si verifica quindi la tensione tangenziale maggiore rispetto a qualsiasi altro punto del contorno.

Il diagramma delle tensioni è riportato in figura 10.

La **tensione tangenziale massima** viene calcolata con la relazione:

$$\tau_{\max} = \alpha \cdot \frac{M_t}{b \cdot a^2} \quad [9]$$

dove  $a$  e  $b$  rappresentano rispettivamente le dimensioni minore e maggiore della sezione, mentre  $\alpha$  è un coefficiente variabile in funzione del rapporto  $b/a$  e i suoi valori sono riportati nella **tabella 1**, oppure possono essere calcolati con la formula:

$$\alpha = 3 + 1,8 \cdot \frac{a}{b}$$

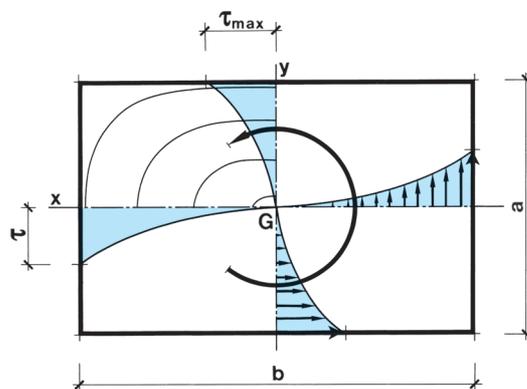


Fig. 10

Tabella 1

b/a	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
$\alpha$	4,804	4,67	4,57	4,48	4,40	4,33	4,27	4,21	4,16
b/a	2	2,5	3	4	5	6	8	10	20
$\alpha$	4,07	3,88	3,74	3,55	3,43	3,35	3,26	3,20	3,10

## Profilati metallici

La sezione dei profilati di acciaio, con esclusione di quelli con sezione tubolare, è costituita di rettangoli con larghezza  $a_i$  e con spessori differenti  $s_i$ ; la tensione massima per torsione si verifica lungo i bordi del rettangolo con lo spessore maggiore  $s_{\max}$  e viene calcolata con la relazione:

$$\tau_{\max} = \frac{3 \cdot M_t \cdot s_{\max}}{\sum_{i=1}^{i=n} (a_i \cdot s_i^3)} \quad [10]$$

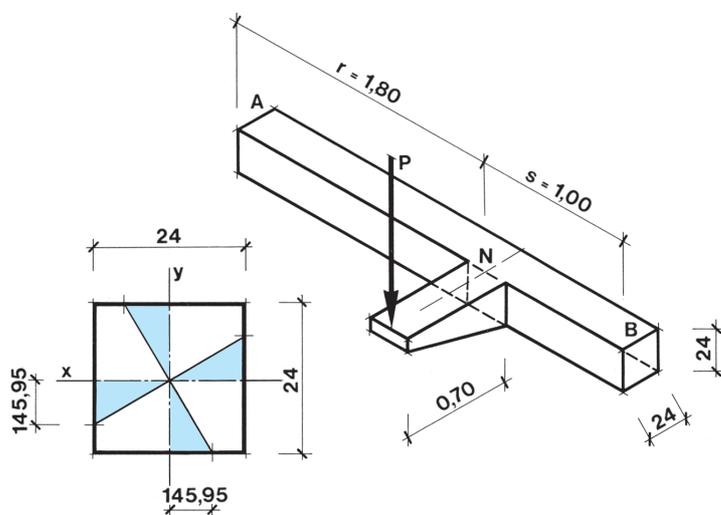
È da rilevare che le sezioni aperte, come sono quelle dei profilati, hanno una resistenza molto scarsa a torsione, resistenza che si riduce ancora quando la torsione è accompagnata anche da un sia pure limitato momento flettente.

## ESERCIZI SVOLTI

6

Una trave in legno con sezione quadrata di  $24 \times 24 \text{ cm}^2$  e con luce  $l = 2,80 \text{ m}$ , impedita a ruotare alle estremità, presenta normalmente al suo asse una mensola lunga  $0,70 \text{ m}$ , sulla cui estremità è applicato il carico  $P = 6 \text{ kN}$  (vedi figura); l'asse della mensola è situato alla distanza di  $1,80 \text{ m}$  dall'estremo A.

Calcolare i momenti torcenti che si verificano nei due tronchi AN e BN, la tensione massima e tracciare il diagramma delle tensioni.



Il momento torcente ha il valore:

$$M_t = 6 \times 0,70 = 4,20 \text{ kN m} = 4,20 \times 10^6 \text{ N mm}$$

Avendo lunghezza differente, nei due tronchi AN e BN il momento torcente avrà valori diversi che possono essere calcolati tenendo presente che l'angolo di rotazione della sezione in N rispetto all'estremo A deve essere uguale a quello rispetto all'altro estremo B, ossia:

$$\varphi_{(AN)} = \beta \cdot \frac{M_{t(AN)} \cdot r}{G \cdot b^4} \quad \varphi_{(BN)} = \beta \cdot \frac{M_{t(BN)} \cdot s}{G \cdot b^4}$$

ed essendo  $\varphi_{(AN)} = \varphi_{(BN)}$ :

$$\beta \cdot \frac{M_{t(AN)} \cdot r}{G \cdot b^4} = \beta \cdot \frac{M_{t(BN)} \cdot s}{G \cdot b^4}$$

e semplificando:

$$M_{t(AN)} \cdot r = M_{t(BN)} \cdot s \quad [11]$$

Inoltre deve anche essere:

$$M_{t(AN)} + M_{t(BN)} = M_t$$

Risolvendo il sistema formato da queste due ultime relazioni si ottiene:

$$M_{t(AN)} = M_t - M_{t(BN)}$$

e sostituendo nella [11] e risolvendo rispetto a  $M_{t(BN)}$  si ha:

$$M_{t(BN)} = \frac{M_t \cdot r}{l} = \frac{4,20 \times 10^6 \times 1800}{2800} = 2,70 \times 10^6 \text{ N mm}$$

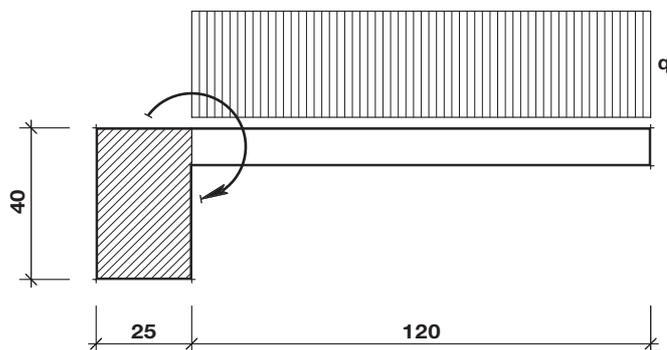
e anche:

$$M_{t(AN)} = \frac{M_t \cdot s}{l} = \frac{4,20 \times 10^6 \times 1000}{2800} = 1,50 \text{ N mm}$$

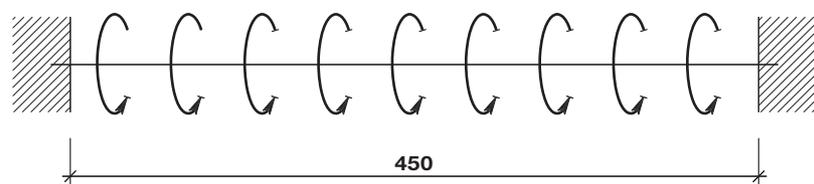
Per  $\frac{b}{a} = 1$  dalla tabella 1 si ricava  $\alpha = 4,804$ ; la tensione massima risulta:

$$\tau_{\max} = \alpha \cdot \frac{M_t}{b^3} = 4,804 \times \frac{4,20 \times 10^6}{240^3} = 1,46 \text{ N/mm}^2$$

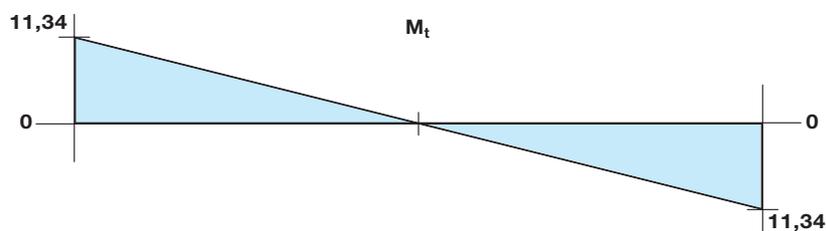
- 7** Su una trave, incastrata agli estremi, con luce  $l = 4,50$  m e sezione rettangolare di  $25 \times 40$  cm<sup>2</sup> [fig. a], è impostato per tutta la sua lunghezza un balcone con lo sbalzo di 1,20 m, sul quale grava il carico ripartito uniforme  $q = 7,00$  kN/m. Calcolare la tensione massima nella trave.



a



b



Il carico totale sul balcone vale:

$$Q = 7,00 \times 1,20 \times 4,50 = 37,80 \text{ kN}$$

e produce il momento torcente sull'intera trave:

$$M_{t,tot} = \frac{Q \cdot l}{2} = \frac{37,80 \times 1,20}{2} = 22,68 \text{ kN m}$$

che viene equilibrato dai momenti di incastro  $M_t$ , che si hanno alle estremità della trave stessa, uguali e con valore:

$$M_t = \frac{M_{t,tot}}{2} = \frac{22,68}{2} = 11,34 \text{ kN m}$$

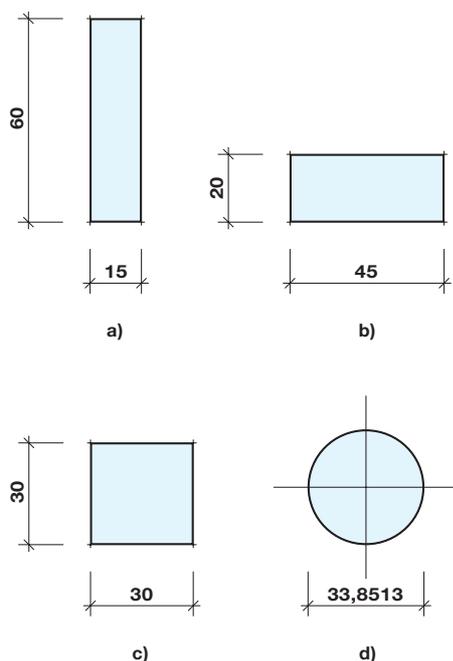
Il diagramma di distribuzione del momento torcente sulla trave è riportato in figura, dal quale risulta che le sezioni più sollecitate sono quelle di estremità.

In base al rapporto  $\frac{b}{a} = \frac{40}{25} = 1,60$ , dalla tabella 1 si ricava  $\alpha = 4,27$ ; si ha quindi:

$$\tau_{\max} = \alpha \cdot \frac{M_t}{b \cdot a^2} = 4,27 \times \frac{11,34 \times 10^6}{400 \times 250^2} \approx 1,93 \text{ N/mm}^2$$

8

Considerando le sezioni di uguale area riportate in **figura**, sollecitate dal momento torcente  $M_t = 12 \text{ kN m}$ , calcolare la tensione tangenziale massima che si verifica in ognuna di esse e metterle a confronto (misure in cm).



Sezione a

Essendo  $\frac{b}{a} = \frac{60}{15} = 4$ , dalla **tabella 1** si ricava  $\alpha = 3,55$  e quindi:

$$\tau_{\max} = \alpha \cdot \frac{M_t}{b \cdot a^2} = 3,55 \times \frac{12 \times 10^6}{600 \times 150^2} \approx 3,16 \text{ N/mm}^2$$

Sezione b

$$\text{Per } \frac{b}{a} = \frac{45}{20} = 2,25 \text{ si ha } \alpha = 3 + 1,8 \cdot \frac{a}{b} =$$

$$= 3 + 1,8 \times \frac{1}{2,25} = 3,80 \text{ e quindi:}$$

$$\tau_{\max} = 3,80 \times \frac{12 \times 10^6}{450 \times 200^2} \approx 2,53 \text{ N/mm}^2$$

Sezione c

Dalla **tabella 1** per  $\frac{b}{a} = 1$  si ha  $\alpha = 4,804$  e quindi:

$$\tau_{\max} = 4,804 \times \frac{12 \times 10^6}{300^3} \approx 2,14 \text{ N/mm}^2$$

Sezione d

$$\tau_{\max} = \frac{16 \cdot M_t}{\pi \cdot D^3} = \frac{16 \times 12 \times 10^6}{\pi \cdot 338,513^3} \approx 1,58 \text{ N/mm}^2$$

Analizzando i risultati ottenuti si osserva che, diminuendo il rapporto  $\frac{b}{a}$ , si riducono anche le tensioni, che assumono un

valore minimo per la sezione quadrata, oppure per la sezione rettangolare con dimensioni poco diverse fra loro. La sezione ottimale ai fini statici sarebbe quella circolare, ma in genere non viene utilizzata nell'edilizia per le difficoltà di inserimento con altre strutture.

9

Calcolare la tensione massima che si ha nella sezione di un profilato HE 240 B soggetta a un momento torcente  $M_t = 6 \text{ kN m}$ .

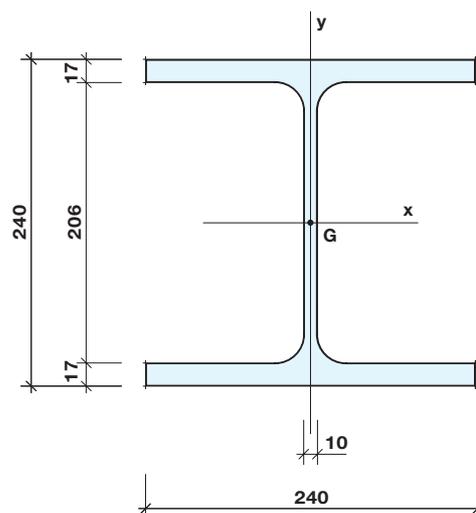
Dalla tabella relativa ai profilati HE si ricavano le caratteristiche geometriche del profilato riportate in **figura**. Si calcola ora il denominatore della [10] considerando i tre rettangoli che compongono la sezione:

$$\sum_{i=1}^{i=3} (a_i \cdot s_i^3) = 2 \times 240 \times 17^3 +$$

$$+ (240 - 2 \times 17) \times 10^3 = 2564,24 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

Lo spessore maggiore è quello delle due ali con  $s_{\max} = 17 \text{ mm}$ , per cui la tensione tangenziale massima risulta:

$$\tau_{\max} = \frac{3 \cdot M_t \cdot s_{\max}}{\sum_{i=1}^{i=3} (a_i \cdot s_i^3)} = \frac{3 \times 6 \times 10^6 \times 17}{2564,24 \times 10^3} \approx 119,33 \text{ N/mm}^2$$



## ESERCIZI

## Sezione circolare piena

- 1** Una mensola è realizzata con un tondo in acciaio del diametro  $D = 80$  mm e all'estremità libera agisce una coppia con forze  $P = 15$  kN e braccio  $b = 0,50$  m. Calcolare la tensione massima dovuta al momento torcente.

$$[\tau \approx 74,60 \text{ N/mm}^2]$$

- 2** La sezione circolare con diametro  $D = 80$  mm di un albero lungo 1,40 m è soggetta al momento torcente  $M_t = 10$  kNm.

Calcolare la tensione massima nella sezione e l'angolo totale di torsione.

$$[\tau \approx 99,47 \text{ N/mm}^2; \quad \varphi = 0,041 \text{ radianti}]$$

- 3** Determinare il diametro di un elemento con sezione circolare, incastrato agli estremi, sollecitato nella sezione di mezzeria da un momento torcente  $M_t = 15$  kNm, con l'ipotesi che la tensione massima non risulti superiore a  $100 \text{ N/mm}^2$ .

$$[D \approx 92 \text{ mm}]$$

## Sezione circolare cava

- 4** Un elemento tubolare con diametri esterno  $D_e = 110$  mm e interno  $D_i = 80$  mm e lungo 1,60 m, perfettamente incastrato alle estremità, è soggetto al momento torcente  $M_t = 15$  kNm, applicato nella sezione di mezzeria. Calcolare la tensione massima e l'angolo totale di torsione (assumere  $G = 85 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ ).

$$[\tau \approx 93,28 \text{ N/mm}^2; \quad \varphi = 0,0273 \text{ radianti}]$$

- 5** Su un albero di trasmissione, realizzato in sezione circolare cava con diametro esterno  $D_e = 80$  mm e spessore di parete  $s = 12$  mm, è montata una puleggia con raggio  $r = 300$  mm sottoposta a uno sforzo perimetrale di 20 kN.

Calcolare la tensione tangenziale massima nell'albero.

$$[\tau \approx 90,84 \text{ N/mm}^2]$$

## Sezioni non circolari

- 6** Una mensola è soggetta all'estremità libera al momento torcente  $M_t = 4,50$  kNm.

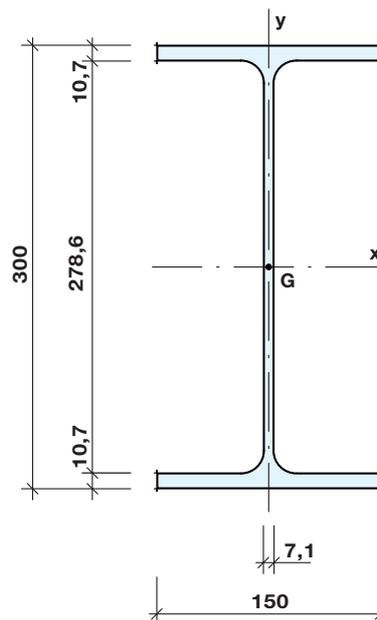
Confrontare le tensioni che si hanno adottando due sezioni equivalenti, una rettangolare di  $19 \times 35 \text{ cm}^2$  e l'altra circolare con diametro  $D = 29,10$  cm.

$$[\text{sezione rettangolare } \tau \approx 1,416 \text{ N/mm}^2; \\ \text{sezione circolare } \tau \approx 0,93 \text{ N/mm}^2; \quad \text{la tensione nella} \\ \text{sezione circolare è circa 1,5 volte inferiore}]$$

- 7** Confrontare le tensioni che si verificano in due travi con sezioni equivalenti, una di  $25 \times 25 \text{ cm}^2$  e l'altra di  $20 \times 31,25 \text{ cm}^2$ , entrambe sollecitate dal momento torcente  $M_t = 6$  kNm.

$$[\text{sezione quadrata } \tau \approx 1,845 \text{ N/mm}^2; \\ \text{sezione rettangolare } \tau \approx 1,993 \text{ N/mm}^2; \\ \text{nella sezione rettangolare la tensione} \\ \text{è superiore di circa 1,08\%}]$$

- 8** Calcolare la tensione massima che si verifica nella sezione del profilato IPE 300 soggetta al momento torcente  $M_t = 2,5$  kNm.



$$[\tau \approx 171,76 \text{ N/mm}^2]$$