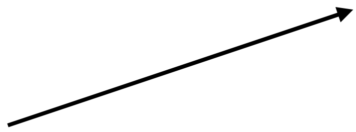
Facoltà di Architettura “L. Quaroni”
Corso di Laurea Specialistica Quinquennale in Architettura UE – A.A. 2006-2007
Corso di STATICA E TEORIA DELLE STRUTTURE (100 ore)
Corso A – Prof. Fabrizio Mollaioli
Dispensa adattata da quella del corso del Prof. L. Decanini

TEORIA DEI VETTORI

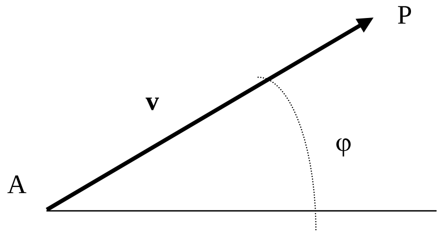
Il problema dell’equilibrio e del moto dei corpi richiede di rappresentare in modo conveniente e sintetico le cause che producono lo stato di quiete o il movimento di un corpo ed i fenomeni ad esso connessi. Un’adeguata rappresentazione di grandezze fisiche dotate di intensità, direzione e verso, si ottiene mediante enti geometrici denominati “vettori”. Il concetto di vettore e l’introduzione di un corrispondente algoritmo costituisce la cosiddetta “Teoria dei vettori”.
L’introduzione di questo ente geometrico risale alla prima metà del secolo XIX (Hamilton, Grasswan, Belloritis etc.). L’algebra dei vettori comprende le operazioni di somma, differenza e prodotto, con cui possono essere rappresentati e risolti tutti i problemi della Meccanica in cui intervengono grandezze per la cui completa caratterizzazione risulta necessario precisare un’intensità ed un orientamento (direzione e verso). Il vettore, quindi, è un ente geometrico caratterizzato da un’intensità (numero reale non negativo detto “modulo”), da una direzione e da un verso.



I primi concetti della Teoria dei vettori possono farsi risalire agli studi sul parallelogramma delle forze, condotti da Stevin (1548-1620), mentre lo sviluppo dell’attuale formulazione risale alla prima metà del secolo XIX.
Nello spazio o nel piano, quindi, un vettore è un ente geometrico atto a descrivere un oggetto fisico dotato di una intensità, una direzione e un verso, rappresentabile cioè con un segmento orientato.

RAPPRESENTAZIONE DEI VETTORI

Un vettore si indica con una lettera in grassetto, o con una lettera soprasegnata (sottosegnata) con un segmento o una freccia, oppure fra due parentesi graffe: **v**, $\bar{v}$, $\vec{v}$, $\{v\}$. In queste dispense il vettore verrà rappresentato con una lettera in grassetto **v**. Graficamente un vettore si rappresenta con un segmento orientato, la cui lunghezza è proporzionale al modulo del vettore. La direzione ed il verso (indicato da una freccia) del vettore sono quelli relativi al segmento orientato.
Punto A: Origine
Punto P: Estremità



E’ inoltre di uso corrente indicare un vettore anche come:

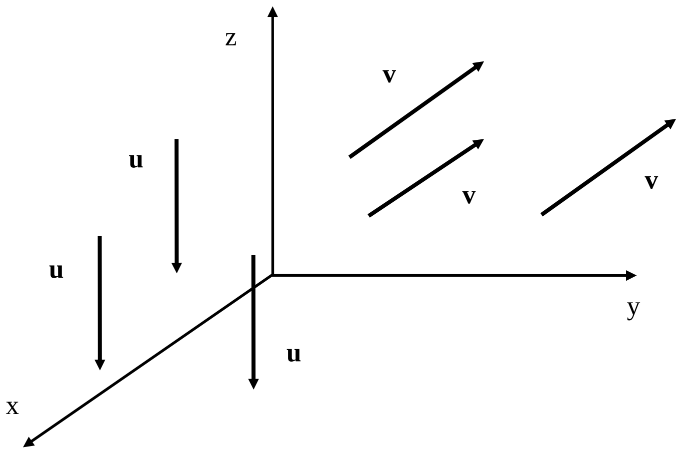
$$(P\text{-}A) = \mathbf{v}$$

dove P-A è il segmento orientato che rappresenta il vettore **v** con origine in A.

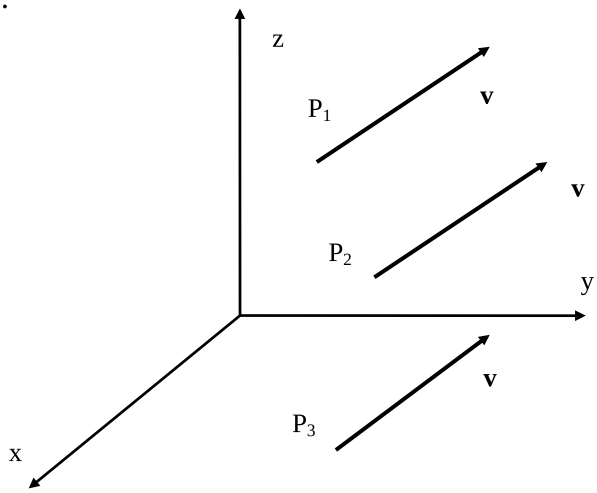
VETTORI LIBERI

Un vettore libero rappresenta infiniti segmenti orientati equipollenti (stessa lunghezza, direzione e verso).

Nello spazio i segmenti orientati equipollenti sono tanti quanti sono i punti, cioè ∞^3.
Quindi un vettore libero non viene assegnato ad un determinato punto nello spazio, potendosi spostare liberamente purché si mantenga inalterato il modulo, la direzione ed il verso.
Come si vedrà nella meccanica i vettori liberi sono atti a rappresentare i momenti (possono spostarsi nello spazio).

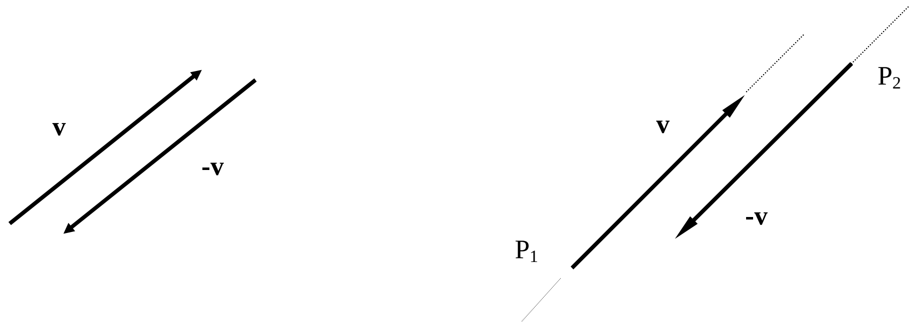


VETTORI APPLICATI
I vettori applicati sono atti a rappresentare grandezze fisiche dotate di intensità, direzione, verso e con un punto di applicazione. Quindi il vettore applicato risulta dall'associazione di un vettore libero e di un punto di applicazione:
(P_1; **v**): **v** applicato in P_1
(P_2; **v**): **v** applicato in P_2
(P_3; **v**): **v** applicato in P_3



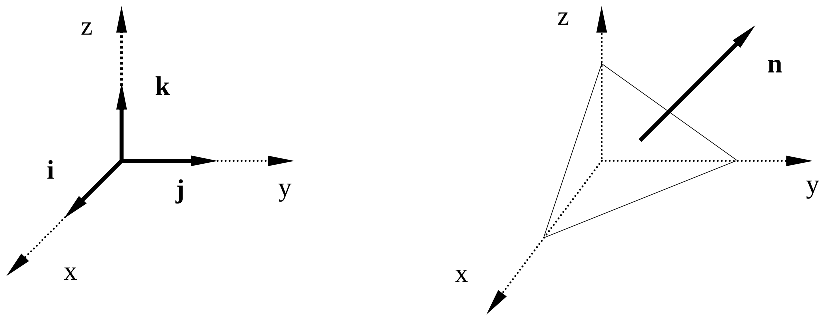
Lo stesso vettore libero **v**, applicato in tre punti distinti, definisce tre vettori applicati. Un vettore applicato è un vettore libero di cui si definisce l'origine (punto di applicazione).
Nella Meccanica il concetto di vettore applicato corrisponde a forze applicate ad un punto materiale o ad un corpo rigido. In sintesi un vettore libero viene definito dal modulo, dalla direzione e dal verso, mentre un vettore applicato richiede anche la precisazione del punto di applicazione. La Statica utilizza sostanzialmente i vettori forza (applicato), momento (libero), spostamento (applicato) e anche vettori rappresentativi di aree.

VETTORE OPPOSTO
Dato il vettore il **v**, il vettore - **v**, che ha lo stesso modulo, la stessa direzione, ma verso opposto, dicesi vettore "opposto" di **v**. Due vettori applicati opposti, che abbiano la stessa retta di applicazione, si dicono direttamente opposti.
Il modulo di un vettore rappresenta l'intensità della grandezza vettoriale ed è un numero reale non negativo e si indica: $|\overline{v}|, v$.



VETTORI UNITARI, "VERSORI"

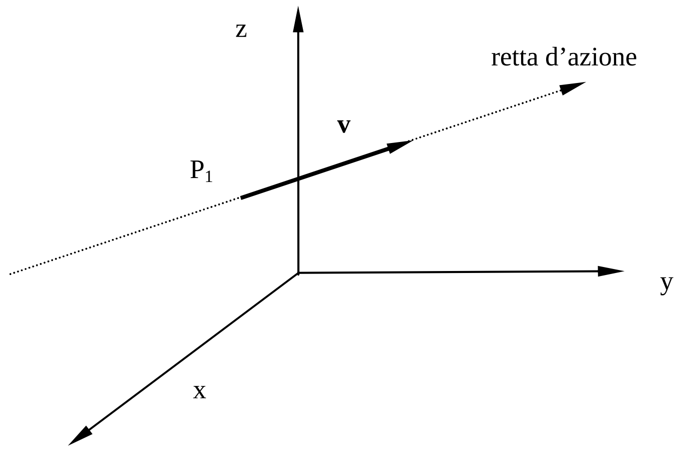
Il versore è un vettore unitario, cioè con modulo uguale ad 1, introdotto con l'obiettivo di definire l'orientamento di una retta o di un vettore.
I versori corrispondenti agli assi cartesiani spesso sono indicati come **i**, **j**, **k**:



n è il versore caratterizzante la direzione ortogonale al piano π con il verso assegnato in figura.

RETTA DI APPLICAZIONE O RETTA DI AZIONE

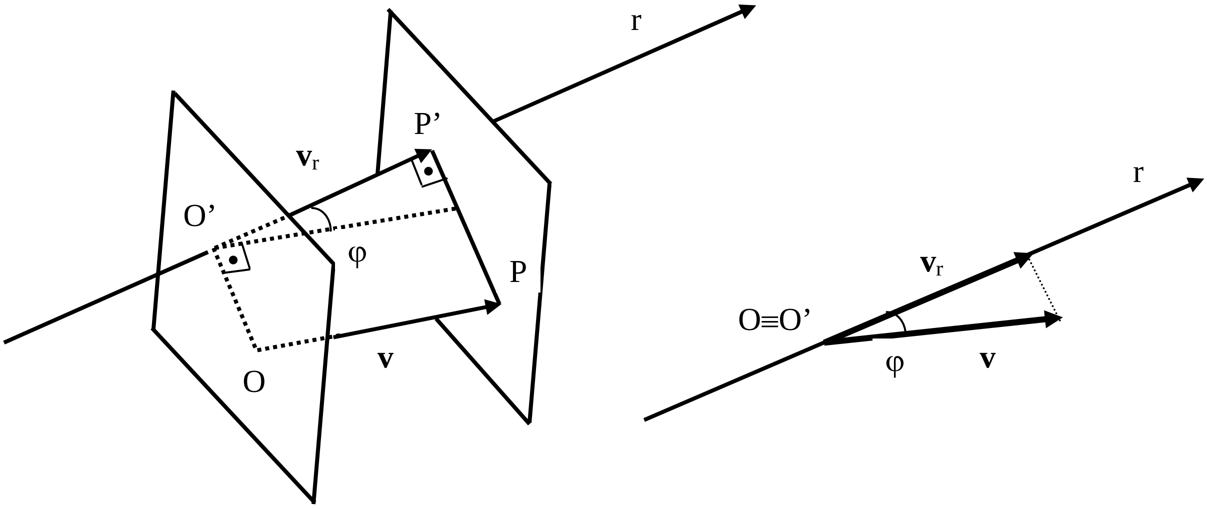
Dato un vettore applicato (P_1; **v**) si chiama retta di applicazione o retta di azione, la retta alla quale il vettore appartiene. Ovviamente non ha senso parlare di retta applicazione di un vettore libero:



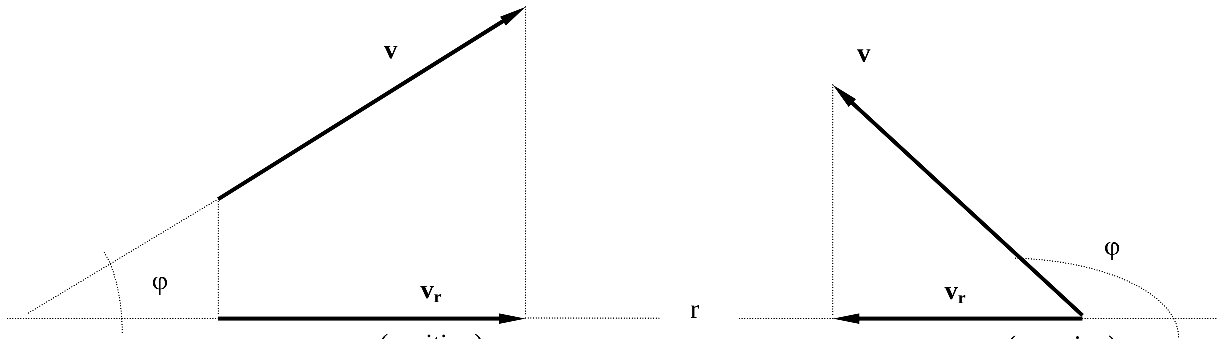
COMPONENTE DI UN VETTORE SECONDO UNA RETTA ORIENTATA

Dato un vettore v e un asse *r* (cioè una retta orientata), si conducano dagli estremi del vettore due piani perpendicolari a *r*. Si intercetta su *r* il segmento orientato O'-P'.
Il segmento orientato (P'-O'=$\mathbf{v}_r$) costituisce il componente vettoriale di **v** secondo *r*. Il modulo di questo vettore $\mathbf{v}_r$ (lunghezza del segmento orientato) è la componente scalare di **v** secondo la retta *r* e sarà positiva se il verso di $\mathbf{v}_r$ è concorde con il verso di *r*, altrimenti sarà negativa. Indicando con φ, ($0\leq\varphi\leq\pi$) l'angolo fra **v** e la retta *r* si può scrivere: $v_r = v\cos\varphi$
Si trasporta quindi il vettore **v** in modo da far coincidere O con O'.
Usualmente la componente scalare v_r viene definita *componente* ed è uno scalare (positivo o negativo) di dimensioni fisiche uguali a quelle del vettore proiettato. Risulta geometricamente

evidente che se si sposta la retta *r* parallelamente a sé stessa in modo di far coincidere A con A’, la componente v_r non cambia:

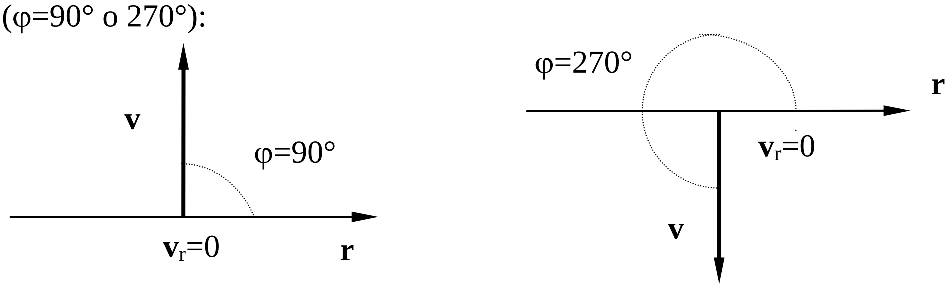


Considerando nel piano (2D) un vettore **v** ed una retta orientata *r*, si possono avere i seguenti casi:

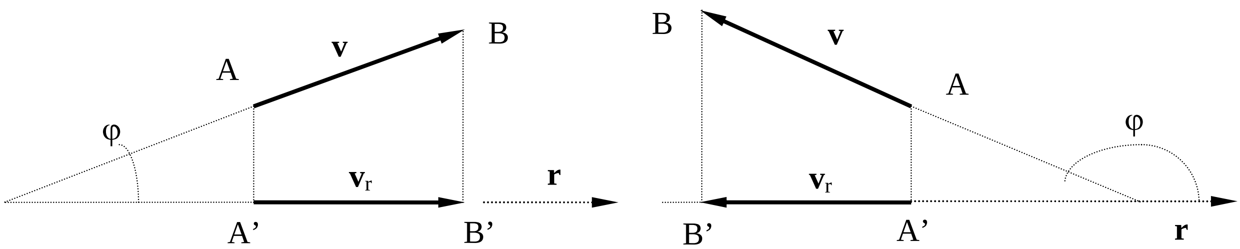


$v_r = v \cos\varphi$ (positivo) $v_r = v \cos\varphi$ (negativo)

Dato un vettore **v** (non nullo) affinché sia nulla la componente di **v** secondo **r** deve essere **v** perpendicolare ad **r**. Se **v** è parallelo e concorde con **r** ($\cos\varphi=1$), si ha $\mathbf{v}_r=\mathbf{v}$. Se **v** è parallelo e discorde con **r** ($\cos\varphi=-1$), risulta $\mathbf{v}_r= -\mathbf{v}$. Dall’espressione $\mathbf{v}_r=\mathbf{v}\cos\varphi$ discende che un vettore non nullo ha componente nulla secondo una retta orientata **r** soltanto se il vettore è perpendicolare alla retta (φ=90° o 270°):



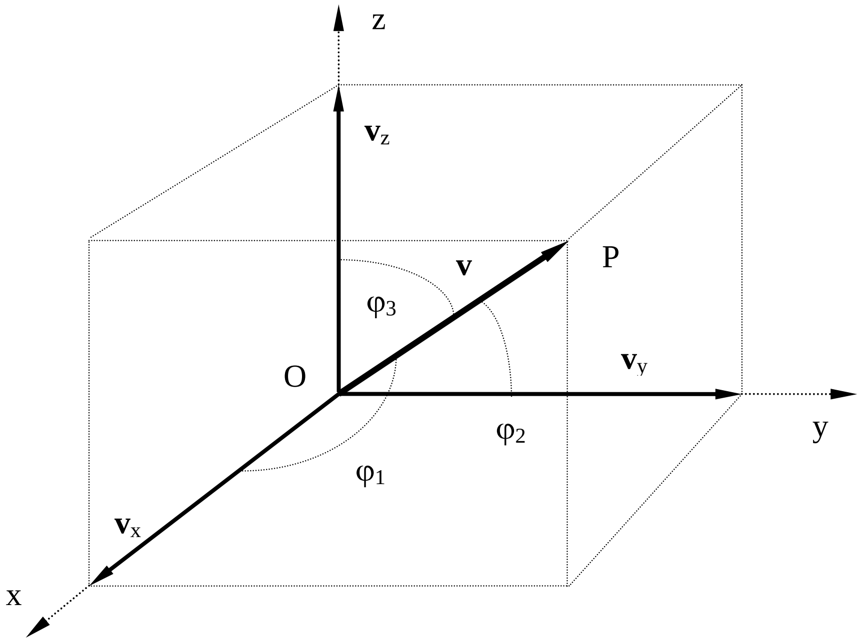
Nello spazio tridimensionale questo implica che il vettore è contenuto in un piano perpendicolare alla retta stessa. Se il vettore e la retta sono invece complanari, le proiezioni dell’estremo e dell’origine di **v** si ottengono mediante due rette normali ad “r”:



$v_r=v\cos\varphi$ (positivo) $v_r=v\cos\varphi$ (negativo)

COMPONENTI CARTESIANE DI UN VETTORE

Si consideri lo spazio (3D) riferito ad una terna ortogonale levogira Oxyz. Gli assi coordinati individuano tre direzioni orientate, perciò dato un vettore è possibile considerare le componenti secondo x,y,z:



Disponendo, per comodità di rappresentazione, l'origine del vettore **v** coincidente con l'origine O del sistema di assi, le coordinate (x_p,y_p,z_p) dell'estremità P, definiscono le tre componenti v_x, v_y e v_z del vettore **v**. Inoltre si può notare che gli spigoli del parallelepipedo, che ha per diagonale **v**, sono le componenti $\mathbf{v_x}$, $\mathbf{v_y}$ e $\mathbf{v_z}$. Nella Figura sono stati indicati con φ_1, φ_2, φ_3 gli angoli che il vettore **v** forma con gli assi cartesiani. Con α, β, γ si indicano i suoi coseni direttori. Ricordando inoltre che il modulo della componente di un vettore secondo una retta è uguale a $v_r = v\cos\varphi$ il modulo delle componenti di **v** secondo gli assi x, y e z sono:

$$v_x = \alpha v = v\cos\varphi_1$$
(a) $$v_y = \beta v = v\cos\varphi_2$$
$$v_z = \gamma v = v\cos\varphi_3$$

elevando al quadrato e sommando membro a membro queste espressioni, si ha:

(b) $$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \alpha^2 v^2 + \beta^2 v^2 + \gamma^2 v^2 = v^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \quad \Rightarrow$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad \Rightarrow \; v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

in cui si è ricavato il modulo del vettore in funzione delle sue componenti secondo gli assi.
Noto il modulo si possono ricavare i coseni direttori:

$$\alpha = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{v_x}{v}$$

(c) $$\beta = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{v_y}{v}$$

$$\gamma = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \frac{v_z}{v}$$

Prefissato un riferimento cartesiano è possibile, quindi, stabilire una corrispondenza biunivoca tra le terne di numeri reali ed i vettori dello spazio, potendo infatti individuare di ogni vettore, mediante le equazioni (a), le componenti cartesiane v_x, v_y e v_z.

Viceversa dati tre numeri reali (non tutti nulli), che definiscono le componenti v_x, v_y e v_z viene individuato un vettore libero il cui modulo è dato dall'equazione (b) ed il cui unico orientamento resta definito dalle equazioni (c), che forniscono i coseni direttori. In sintesi un vettore libero può essere definito dandone le tre componenti oppure il modulo e l'orientamento.
Il vettore v individuato dalle tre componenti cartesiane si indica:

$$v = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}$$

E' immediato che se **v** è unitario (**v**=1) le sue componenti coincidono con i coseni direttori.
Nel caso in cui si conoscano le coordinate dell'estremo P del vettore e dell'origine A, non coincidente con l'origine della terna cartesiana di riferimento, si ha:

$$v_x = x_P - x_A$$
$$v_y = y_P - y_A$$
$$v_z = z_P - z_A$$

il modulo del vettore sarà quindi uguale a:

$$\mathbf{v} = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (z_P - z_A)^2}$$

ed i coseni direttori rispettivamente saranno:

$$\alpha = \frac{x_P - x_A}{v} \qquad \beta = \frac{y_P - y_A}{v} \qquad \gamma = \frac{z_P - z_A}{v}$$

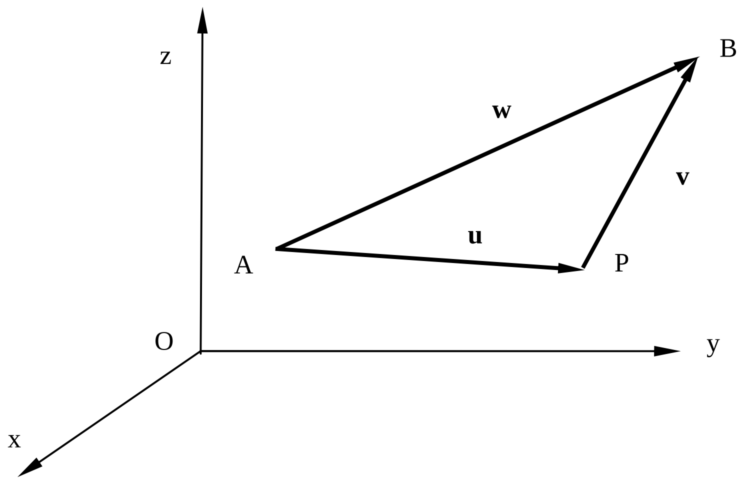
E' evidente che, scelto un sistema di riferimento, le componenti di un assegnato vettore libero non cambiano al variare della posizione del segmento orientato che lo rappresenta . Infatti le differenze tra le coordinate degli estremi del vettore non mutano benché cambiano singolarmente tali coordinate.
Es.: Le componenti v_x, v_y e v_z del vettore **v** non cambiano al variare delle coordinate dei punti origine ed estremo che lo rappresentano nel sistema di riferimento cartesiano:
P(3,2,2) O(0,0,0)
P_1(6,4,4) A_1(3,2,2)
P_2(1,3,3) A_2(-2,1,1)
in tutti e tre i casi si ha:

$$v_x=3;\ v_y=2;\ v_z=2$$
$$v = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{17}$$
$$\alpha = \frac{3}{\sqrt{17}};\beta = \frac{2}{\sqrt{17}};\gamma = \frac{2}{\sqrt{17}}$$

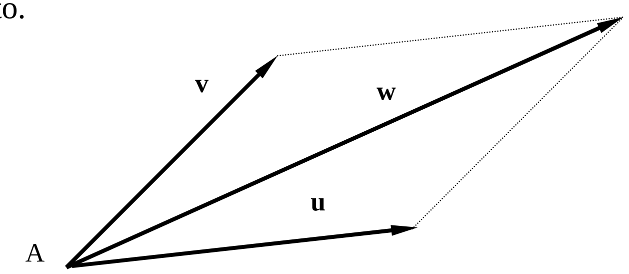
ELEMENTI DI ALGEBRA VETTORIALE

SOMMA DI DUE VETTORI

Siano **u** e **v** due vettori liberi nello spazio. In un punto A di tale spazio si immagini applicato il vettore **u** e nel suo estremo libero si pensi applicato il vettore **v**, si chiama "vettore somma" **w** il vettore che va dall'origine A di **u**, all'estremo libero B di **v**. La somma o risultante **R** di due vettori viene individuata dalla diagonale orientata che ha per lati i due vettori che si sommano. Il vettore risultante è per definizione un vettore libero. La sua identificazione non comporta alcun punto di applicazione. L'identificazione del punto (o della retta) di applicazione del risultante di un sistema di vettori discende da valutazioni esterne al concetto di somma, che concernono il momento di una vettore (applicato).

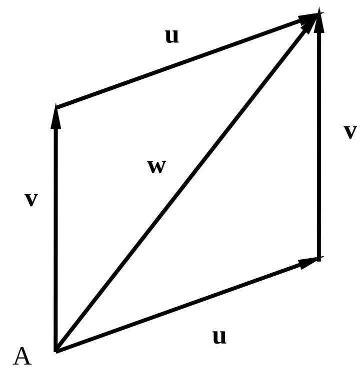


La somma di due vettori **u** e **v** è quindi l'operazione che associa ai due vettori dati, un terzo vettore **v** ottenuto nel modo seguente. Scelto un punto qualsiasi A nello spazio si spostano i vettori **u** e **v**, mantenendoli paralleli a sé stessi e si fa coincidere l'origine di **u** con A e l'origine di **v** con l'estremità B di **u**. Il vettore **w** risulta così definito dal segmento orientato con origine in A ed estremità in B. Allo stesso risultato si giunge prendendo in primo luogo **v** e aggiungendo successivamente **u**.
La somma di vettori gode della proprietà associativa e commutativa:
(**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**)
u + **v** = **v** + **u**
La somma di due vettori si può ottenere anche applicando la *regola del parallelogramma*, trasportando i due vettori parallelamente a sé stessi e facendo coincidere l'origine di ciascuno con un punto A prefissato.



La somma o risultante di due vettori viene individuata dalla diagonale orientata, che ha per lati i due vettori che si sommano. La somma di due vettori gode della proprietà commutativa, infatti si ottiene ugualmente il vettore **w**, sia aggiungendo al vettore **u** il vettore **v** (lato destro del parallelogramma), che aggiungendo a **v** il vettore **u** (lato sinistro).

w = **u** + **v**
w = **v** + **u**

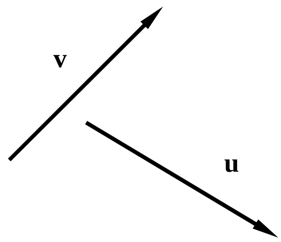


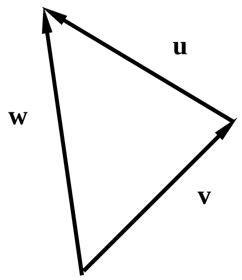
Le componenti di **w** secondo gli assi cartesiani, nel riferimento spaziale Oxyz, sono la somma delle componenti di **v** ed **u**:

$$w_x = v_x + u_x = \alpha_v v + \alpha_u u$$
$$w_y = v_y + u_y = \beta_v v + \beta_u u$$
$$w_x = v_z + u_z = \gamma_v v + \gamma_u u$$

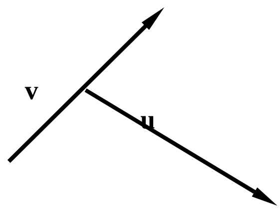
DIFFERENZA DI DUE VETTORI

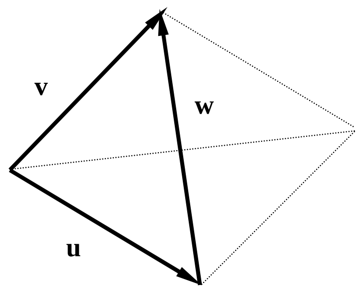
La differenza di due vettori, **w** = **v**-**u**, si ottiene sommando al primo il secondo cambiato di verso, e ripetendo, quindi, quanto precedentemente fatto per la somma di due vettori:





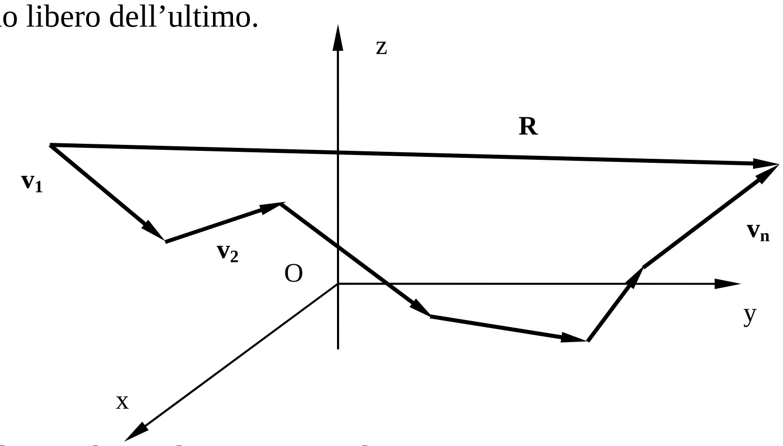
Si potrebbe arrivare allo stesso risultato applicando la regola del parallelogramma, vedendo che la differenza dei due vettori è data dalla seconda diagonale del parallelogramma, mentre la prima come già visto ci dà la somma:





SOMMA DI PIU' VETTORI

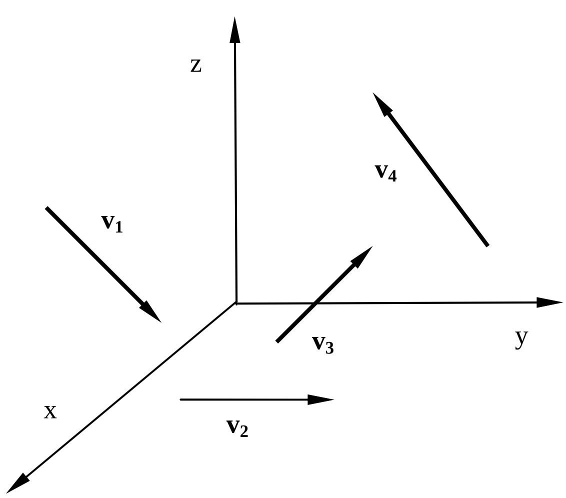
La somma (o composizione) di più vettori si realizza ripetendo la procedura impiegata per sommare due vettori. Dati n vettori liberi $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,...$\mathbf{v}_n$ si sceglie un qualsiasi punto A dello spazio, che si suppone origine del vettore $\mathbf{v}_1$; nell'estremo libero di $\mathbf{v}_1$ si pensi applicato il vettore $\mathbf{v}_2$, nell'estremo libero di $\mathbf{v}_2$ si consideri applicato $\mathbf{v}_3$ e così via fino a completare tutti i vettori. Il vettore risultante o somma geometrica dei vettori dati si ottiene congiungendo l'origine A del primo con l'estremo libero dell'ultimo.

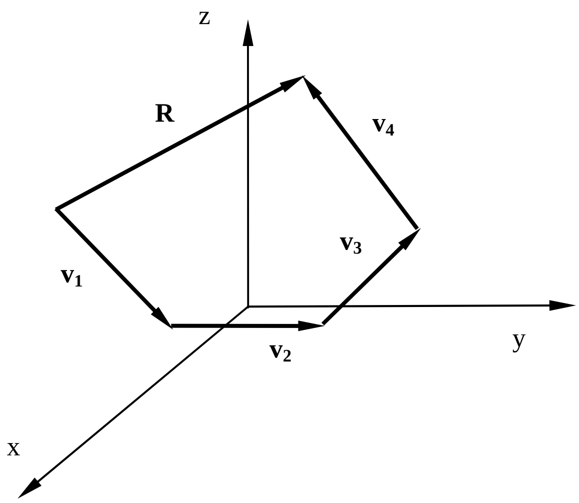


La somma vettoriale si indica nel seguente modo:

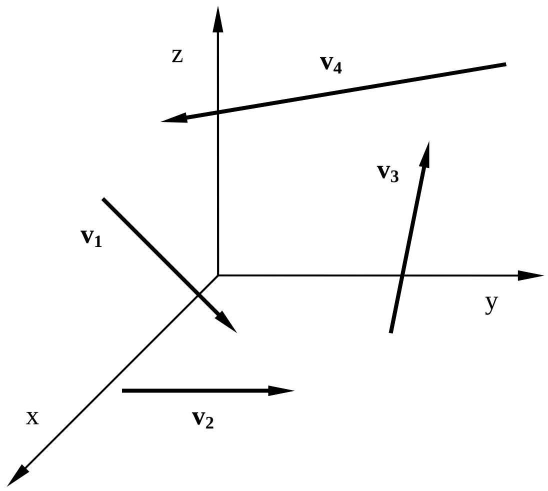
$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i$$

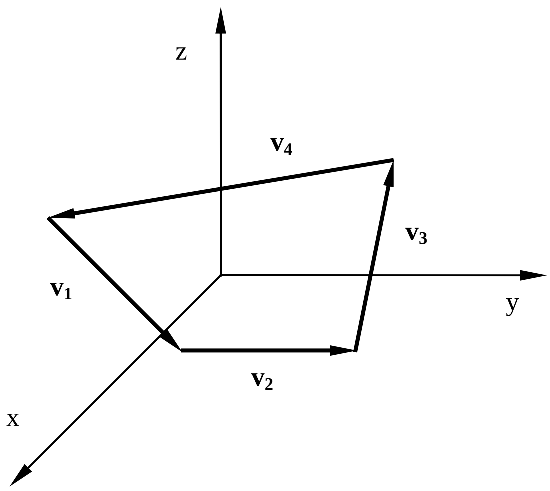
La somma vettoriale o geometrica si può estendere a più vettori, ripetendo l'operazione realizzata per sommare due vettori. Dati n vettori liberi $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,... $\mathbf{v}_n$ a partire da un punto qualsiasi A dello spazio si costruisce la "poligonale dei vettori", il vettore risultante **R** (somma geometrica) si individua congiungendo l'origine del primo vettore con l'estremo libero dell’ultimo. In altre parole il vettore somma o il risultante è rappresentato dal lato di chiusura della poligonale dei vettori.



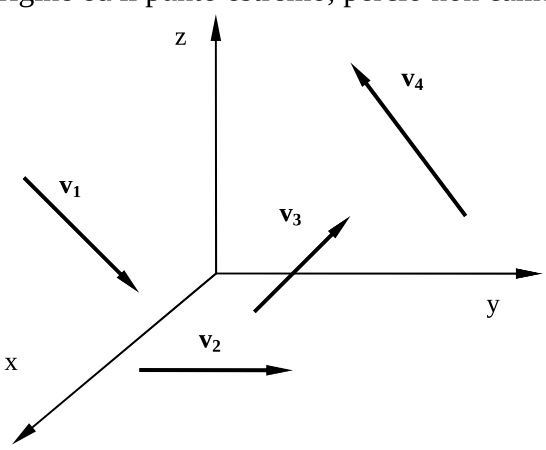


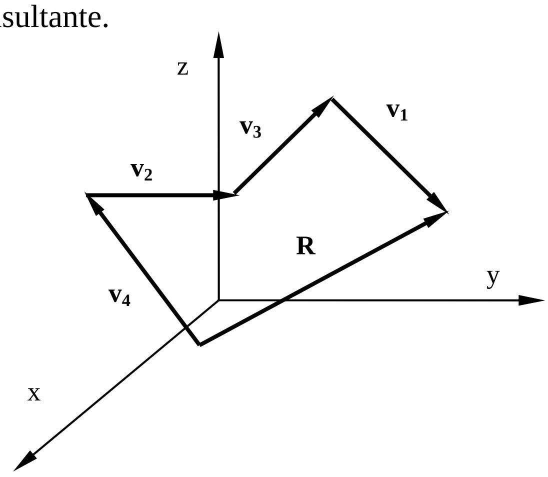
Si osservi che nello spazio la poligonale dei vettori risulta sghemba se i vettori addendi non sono complanari. Può succedere che la poligonale sia chiusa, perciò il risultante è nullo.





Si può notare che se si cambia l’ordine dei vettori, cambia la forma della poligonale, ma non l’origine ed il punto estremo, perciò non cambia il risultante.





A causa di una proprietà elementare delle poligonali la lunghezza (modulo) del risultante è in genere minore della somma delle lunghezze (moduli) dei singoli vettori:

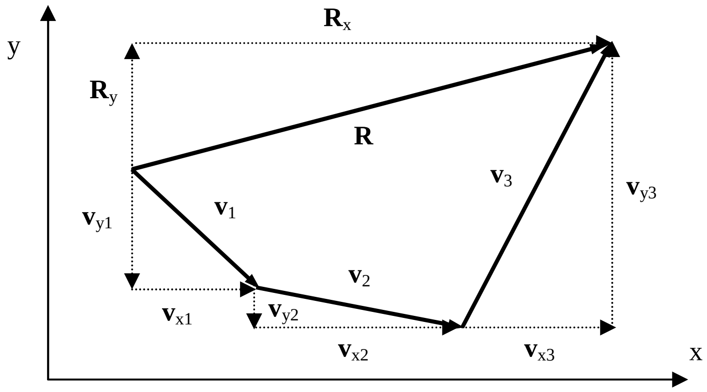
$$\mathbf{R} \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v_i}$$

in cui l’uguaglianza si verificherà soltanto nel caso che i vettori siano tutti paralleli e concordi.

Le componenti $\mathbf{R}_x$, $\mathbf{R}_y$, $\mathbf{R}_z$ di $\mathbf{R}$ sono uguali ciascuna alla somma delle rispettive componenti dei vettori addendi. Nel piano xy si ha:

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} R_x \\ R_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum v_{xi} \\ \sum v_{yi} \end{vmatrix}$$

Applicazione



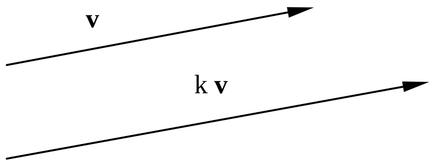
$$\mathbf{v}_1 = \begin{Bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} v_{x2} \\ v_{y2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{Bmatrix} v_{x3} \\ v_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5+4+3 \\ -2-1+6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

PRODOTTO DI UN VETTORE PER UNO SCALARE

Il prodotto di un vettore $\mathbf{v}$ per uno scalare k è un vettore $\mathbf{w}$ che ha come modulo il prodotto del valore assoluto di k per il modulo di $\mathbf{v}$, come direzione la stessa di $\mathbf{v}$ ed il suo stesso verso se k è positivo, opposto se è negativo e si può scrivere:

$$k\,\mathbf{v} = \mathbf{w}$$



Il vettore $\mathbf{v}$ espresso in funzione delle proprie componenti cartesiane e dei versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ degli assi del sistema di riferimento sarà:

$$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$$

e quindi $\mathbf{w}$ sarà:

$$\mathbf{w} = w_x\,\mathbf{i} + w_y\,\mathbf{j} + w_z\,\mathbf{k} = kv_x\,\mathbf{i} + kv_y\,\mathbf{j} + kv_z\,\mathbf{k}$$

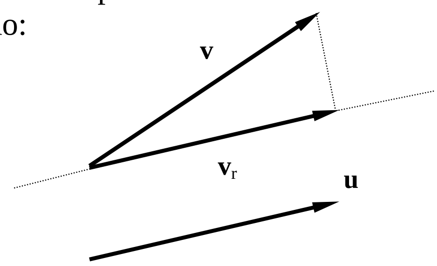
PRODOTTO SCALARE

Il prodotto scalare fra due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ è lo scalare ottenuto dal prodotto del modulo di $\mathbf{u}$ per il modulo di $\mathbf{v}$ per il coseno dell'angolo compreso fra le due direzioni, e si indica:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = u\,v\,\cos\varphi$$

in pratica il prodotto scalare tra due vettori è pari al prodotto del modulo di uno per la componente dell'altro secondo la direzione del primo:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = u\,v_r$$



Se si esprime il prodotto scalare fra i due vettori in funzione delle componenti cartesiane e dei versori degli assi, si ottiene:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_x\, \mathbf{i} + u_y\, \mathbf{j} + u_z\, \mathbf{k}) \times (v_x\, \mathbf{i} + v_y\, \mathbf{j} + v_z\, \mathbf{k})$$

ma ricordando che i versori degli assi **i**, **j**, **k** sono fra loro ortogonali e che quindi i prodotti scalari $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$ sono nulli si ha:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = u_x\, \mathbf{i} \times v_x\, \mathbf{i} + u_y\, \mathbf{j} \times v_y\, \mathbf{j} + u_z\, \mathbf{k} \times v_z\, \mathbf{k}$$

ma poiché $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 1$, si ha:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = u_x\, v_x + u_y\, v_y + u_z\, v_z$$

Chiaramente se i due vettori sono ortogonali fra loro, il prodotto scalare è nullo, in quanto $\cos\varphi = 0$.

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà:

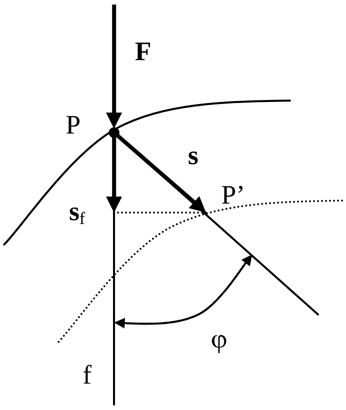
1) commutativa $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$
2) associativa rispetto alla moltiplicazione per uno scalare $k\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times k\mathbf{v}$
3) distributiva rispetto alla somma $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$

LAVORO DI UNA FORZA

Nella meccanica l’esempio più frequente di applicazione del prodotto scalare è dato dal lavoro compiuto da una forza. Se il punto di applicazione P di una forza **F** (di intensità costante) subisce uno spostamento **s**, il lavoro compiuto dalla forza si definisce come la quantità che si ottiene dal prodotto scalare fra i vettori **F** e **s**.

$$L = \mathbf{F} \times \mathbf{s}$$

Si osservi che lo spostamento di un punto è una grandezza vettoriale dotata di intensità direzione e verso.



Il punto P si sposta in P’

$\mathbf{s}_f$ è la componente dello spostamento **s** nella direzione f della forza **F**

Il lavoro compiuto dalla forza **F** nello spostamento **s** del suo punto di applicazione è dato dal prodotto dell’intensità della forza per la componente dello spostamento nella direzione della forza.

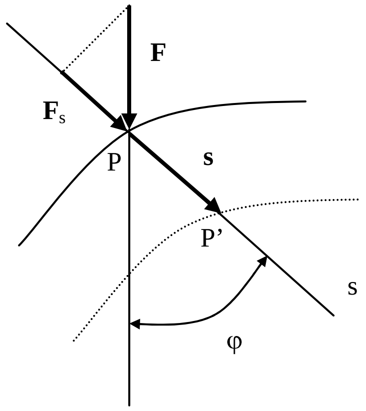
$$L = \mathbf{F} \times \mathbf{s} = F\, s \cos\varphi = F\, s_f$$

Se il punto di applicazione della forza viene spostato in direzione ortogonale a quella della forza stessa, il lavoro è nullo.

Considerando un corpo in equilibrio, lo spostamento **s** può essere provocato da una causa esterna non dipendente dalla forza (spostamento impresso reale o virtuale).

Dalla definizione di prodotto scalare si deduce che il lavoro può anche essere visto come il prodotto del modulo dello spostamento per la componente della forza nella direzione dello spostamento.

$$L = \mathbf{F} \times \mathbf{s} = F \cos\varphi\, s = F_s\, s$$



Il punto P si sposta in P'

$\mathbf{F}_s$ è la componente della forza nella direzione dello spostamento **s**

$$L = \mathbf{F} \times \mathbf{s} = F\, s \cos\varphi = F\, s_f = F \cos\varphi\, s = F_s\, s$$

Il calcolo del lavoro può essere eseguito in modo agevole se si conoscono le componenti cartesiane della forza e dello spostamento. Ad esempio nei sistemi piani, essendo le componenti date da:

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{s} = \begin{Bmatrix} s_x \\ s_y \end{Bmatrix}$$

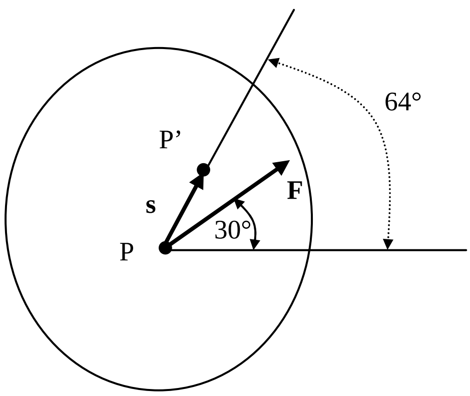
e ricordando che $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = u_x\, v_x + u_y\, v_y$
il lavoro è dato dalla seguente espressione:

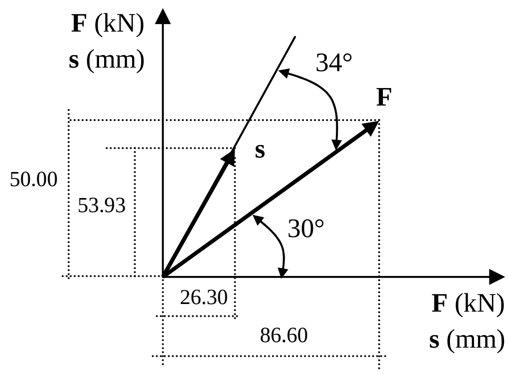
$$L = F_x\, s_x + F_y\, s_y$$

Il lavoro di una forza è uguale alla somma dei prodotti delle componenti omonime della forza e dello spostamento. I concetti indicati verranno utilizzati diffusamente nel Principio dei Lavori Virtuali.

Applicazione. Prodotto scalare.

Dato un corpo rigido, il punto P di applicazione della forza **F**, di intensità pari a 100 kN, subisce uno spostamento **s** di intensità pari a 60 mm. Determinare il lavoro compiuto dalla forza. Direzione e verso di forza e spostamento sono indicati in figura.





$|F| = 100$ kN $\quad |s| = 60$ mm

a) $L = \mathbf{F} \times \mathbf{s} = F\, s \cos\varphi = 100\ 60 \cos 34° \cong 4974$ kN mm

$F_x = F \cos 30° = 100 \cos 30° = 86.60$ kN

$F_y = F \cos 60° = 100 \cos 60° = 50.00$ kN

$s_x = s \cos 64° = 60 \cos 64° = 26.30$ mm

$s_y = s \cos 26° = 60 \cos 26° = 53.93$ mm

b) $L = F_x\, s_x + F_y\, s_y = 86.60 \bullet 26.30 + 50.00 \bullet 53.93 \cong 4974$ kN mm

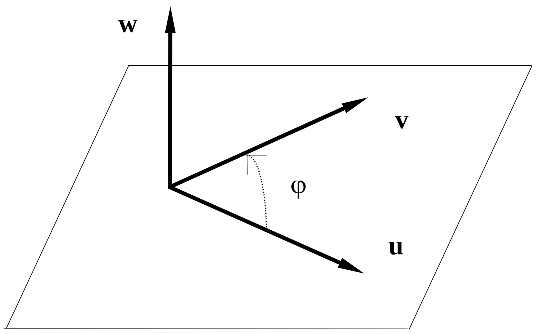
Il lavoro è positivo se i versi della forza e della componente dello spostamento nella direzione della forza sono concordi ($\varphi<\pi/2$).

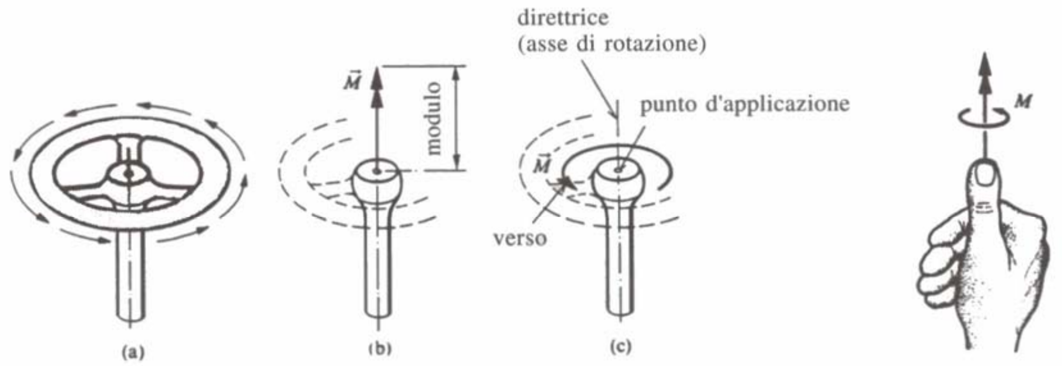
PRODOTTO VETTORIALE

Dicesi prodotto vettoriale di due vettori **u** e **v** l'operazione che associa ai due vettori un terzo vettore **w** così definito:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{r}\ u\ v\ \text{sen}\varphi$$

in cui il modulo è uguale al prodotto dei moduli dei due vettori **u** e **v** per il seno dell'angolo φ ($0\leq\varphi\leq\pi$) compreso tra i versi positivi dei due vettori, ed in cui **r** è un versore normale al piano individuato dai due vettori, il cui verso è quello del medio della mano destra quando il pollice si dispone nel verso di **u** e l'indice nel verso di **v**:

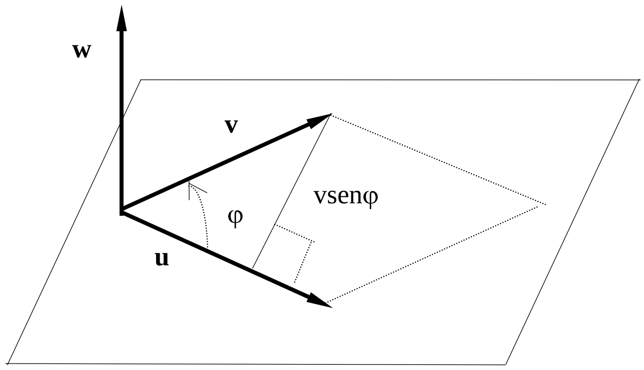




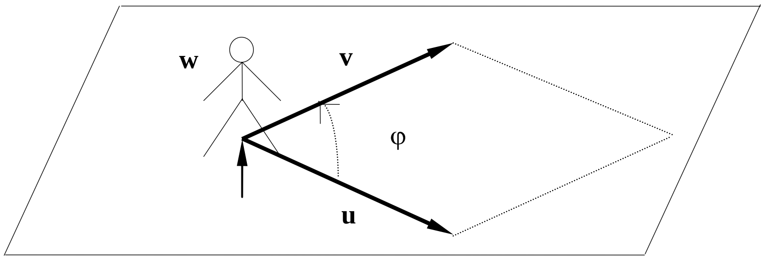
Momento: (a) rotazione, (b) vettore momento, (c) freccia rotante.

Verso d'azione del momento.

Il modulo di **w** è uguale al prodotto del modulo di uno dei vettori per la componente dell'altro nella direzione ad esso ortogonale ($v\,\text{sen}\varphi$), quindi, il modulo di **w** esprime l'area del parallelogramma individuato dai due vettori **u** e **v**:



Si può anche dire che il prodotto vettoriale di due vettori **u** e **v** è un vettore **w** normale al piano individuato dai primi due, avente per modulo il numero che esprime l'area del parallelogramma individuato dai due vettori e per verso quello che va dai piedi alla testa di un osservatore che, disposto con i piedi sul piano, vede il primo vettore **u** descrivere, in senso antiorario, l'angolo φ per sovrapporsi al secondo vettore **v**:



Il prodotto vettoriale non gode della proprietà commutativa, cambiando l'ordine dei fattori cambia infatti il verso del vettore prodotto:

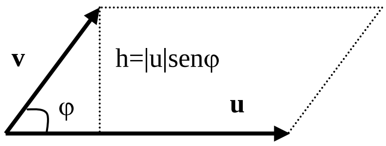
$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$$

mentre gode della proprietà distributiva:

$$\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$$

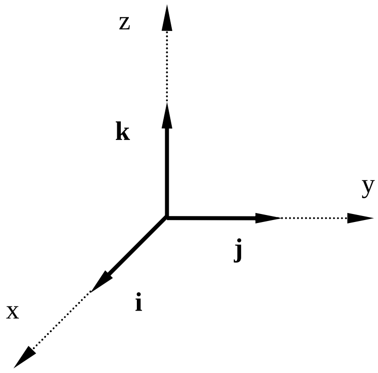
Il modulo del prodotto vettoriale si può interpretare come l'area del parallelogramma individuato dai vettori **u** e **v**:

$$|w| = |v|\ h = |v|\ |u| \mathrm{sen}\varphi$$



PRODOTTI VETTORIALI TRA I VERSORI CARTESIANI

Se si considerano i versori cartesiani **i**, **j**, **k**, diretti come gli assi x, y, z della terna cartesiana di riferimento:



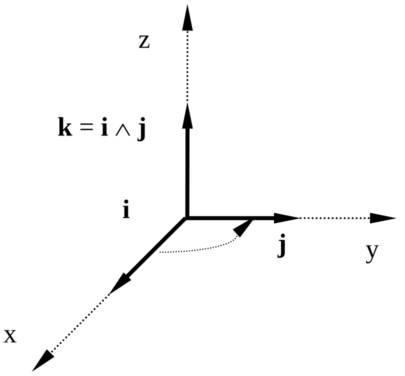
essi godono delle seguenti proprietà:

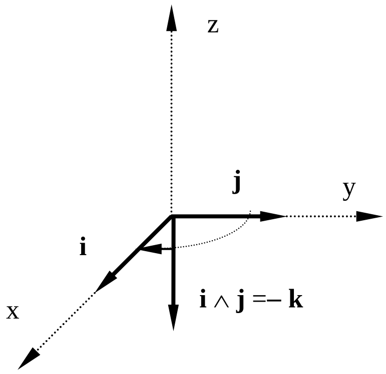
a) $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = 0$ $\quad$ $\mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = 0$ $\quad$ $\mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = 0$

perché sono prodotti vettoriali tra vettori paralleli.

b) $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$ $\quad$ $\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}$ $\quad$ $\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$

perché prodotti vettoriali tra vettori ortogonali (sen90°=1).





PRODOTTO VETTORIALE - DETERMINANTE SIMBOLICO ED ESPRESSIONE MATRICIALE

Dati due vettori **u** e **v** definiti mediante le loro componenti:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}$$

ed indicando con **i**, **j**, **k** i versori diretti come gli assi x, y, z della terna cartesiana, i vettori **u** e **v** si possono esprimere nella seguente forma:

$$\mathbf{u} = u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j} + u_z\,\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$$

il prodotto vettoriale di **u** e **v** è:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j} + u_z\,\mathbf{k}) \wedge (v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k})$$

per la proprietà distributiva del prodotto vettoriale sarà:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_x\,\mathbf{i} \wedge v_x\,\mathbf{i}) + (u_x\,\mathbf{i} \wedge v_y\,\mathbf{j}) + (u_x\,\mathbf{i} \wedge v_z\,\mathbf{k}) + (u_y\,\mathbf{j} \wedge v_x\,\mathbf{i}) + (u_y\,\mathbf{j} \wedge v_y\,\mathbf{j}) + (u_y\,\mathbf{j} \wedge v_z\,\mathbf{k}) +$$
$$+ (u_z\,\mathbf{k} \wedge v_x\,\mathbf{i}) + (u_z\,\mathbf{k} \wedge v_y\,\mathbf{j}) + (u_z\,\mathbf{k} \wedge v_z\,\mathbf{k})$$

ma essendo:

$$(u_x\,\mathbf{i} \wedge v_x\,\mathbf{i}) = 0 \qquad (u_y\,\mathbf{j} \wedge v_y\,\mathbf{j}) = o \qquad (u_z\,\mathbf{k} \wedge v_z\,\mathbf{k}) = 0$$

in quanto prodotti vettoriali fra vettori paralleli, si ha quindi:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = u_x v_y\,(\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) + u_x v_z\,(\mathbf{i} \wedge \mathbf{k}) + u_y v_x\,(\mathbf{j} \wedge \mathbf{i}) + u_y v_z\,(\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) + u_z v_x\,(\mathbf{k} \wedge \mathbf{i}) + u_z v_y\,(\mathbf{k} \wedge \mathbf{j})$$

tenendo conto che:

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j} \quad \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

Quindi:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = u_x v_y\,\mathbf{k} - u_x v_z\,\mathbf{j} - u_y v_x\,\mathbf{k} + u_y v_z\,\mathbf{i} + u_z v_x\,\mathbf{j} + u_z v_y\,\mathbf{i}$$

e riordinando si ha:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (u_y v_z - u_z v_y)\,\mathbf{i} + (u_z v_x - u_x v_z)\,\mathbf{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\,\mathbf{k}$$

Questa espressione è uguale a quella che si ottiene risolvendo il determinante simbolico:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathrm{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

da cui:

$$\mathbf{w} = w_x\,\mathbf{i} + w_y\,\mathbf{j} + w_z\,\mathbf{k}$$

Indicando quindi con $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ il prodotto vettoriale e con w_x, w_y, w_z le sue componenti secondo gli assi cartesiani di riferimento, queste si possono ottenere sinteticamente con:

$$\begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (u_y v_z - u_z v_y) \\ (u_z v_x - u_x v_z) \\ u_x v_y - u_y v_x) \end{Bmatrix}$$

che in forma più compatta si può scrivere:

$$\{w\} = [u]\{v\}$$

Proprietà del prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà:

1) $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$
2) $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = -\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$
3) $t\,\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = t\,(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$
4) $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} \times \mathbf{v} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{u}$

PRODOTTO MISTO DI TRE VETTORI

Per prodotto misto si intende il prodotto scalare C fra due vettori **u** e **z**, in cui quest'ultimo è ottenuto come prodotto vettoriale dei vettori **v** e **w**, si può quindi scrivere:

$$c = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{z}$$

Tenendo presente che il prodotto scalare è la somma dei prodotti delle componenti:

$$c = u_x z_x + u_y z_y + u_z z_z$$

e che le componenti di **z** sono i minori estratti dal determinante simbolico precedentemente visto, si conclude che il prodotto misto è dato dal determinante:

$$c = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \wedge w = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = u_x \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} - u_y \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} + u_z \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}$$

Poiché il valore del determinante cambia segno se si scambiano fra loro due righe, ma rimane invariato se si operano due trasposizioni, valgono le seguenti relazioni:

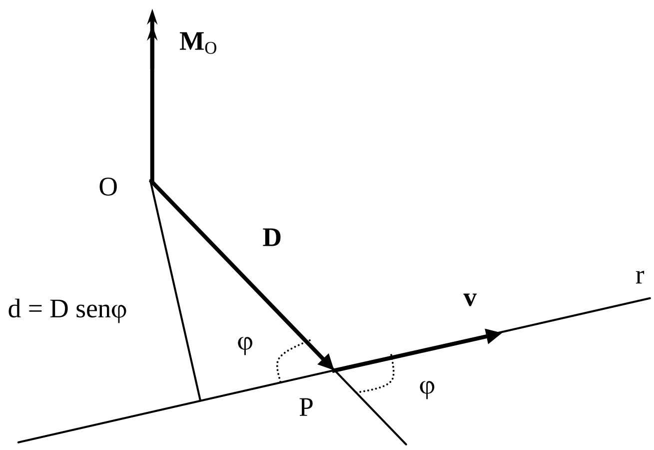
$$c = \mathbf{u} \times \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} \qquad c = \mathbf{v} \times \mathbf{w} \wedge \mathbf{u} \qquad c = \mathbf{w} \times \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$$

Quindi permutando circolarmente i fattori il prodotto misto non cambia.

MOMENTO RISPETTO A UN POLO

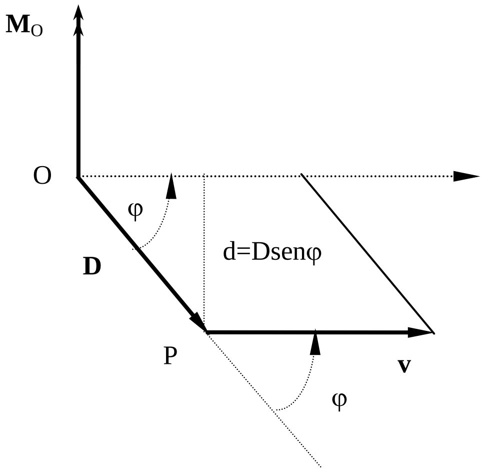
Dato un vettore **v** applicato in un punto P di una retta r, si consideri un altro punto O appartenente ad r. Si definisce *Momento Polare* di v rispetto ad O, o più semplicemente Momento di v rispetto ad O, il vettore definito dalla seguente espressione:

$$\mathbf{M}_O = (P-O) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{D} \wedge \mathbf{v}$$



dove O è il polo, (P-O) = **D** è il vettore posizione di P rispetto ad O, e d è il braccio.

Sapendo che il prodotto vettoriale fra due vettori è un vettore il cui modulo è dato dal prodotto della componente del primo nella direzione ortogonale al secondo, per il modulo di quest'ultimo, la direzione è ortogonale al piano dei due vettori **v** e **D**, ed il verso è quello in cui si trovi un osservatore, che in piedi nel piano π dei due vettori, vede girare in senso antiorario il primo per sovrapporsi al secondo, percorrendo l'angolo φ fra i due vettori.



Il verso del momento M_O esprime il verso della rotazione che **v** tende ad imprimere al corpo rigido, mentre l'intensità di M_O misura la tendenza del vettore **v** ad imprimere un moto di rotazione al corpo rigido attorno ad una asse che contiene O.
La componente di (P-O) nella direzione ortogonale a **v** prende il nome di braccio di **v** rispetto ad O, quindi il modulo del momento di **v** rispetto al polo O si può anche indicare dicendo che è pari al prodotto del modulo di **v** per il suo braccio rispetto al polo O:

$$M_O = v\, D \operatorname{sen}\varphi = vd$$

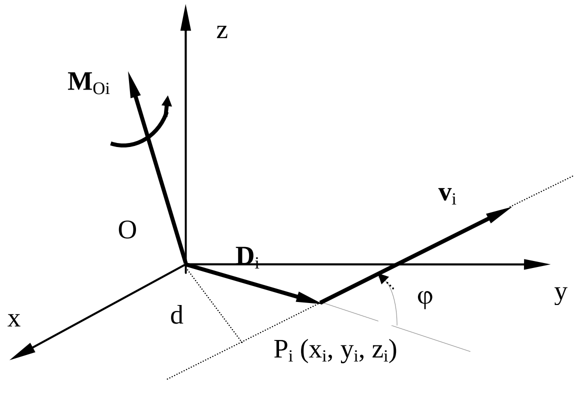
e corrisponde all'area del parallelogramma che ha per lati i vettori **v** e **D**. Se il vettore **v** è una forza **F**, dimensionalmente il modulo del momento della forza rispetto al polo O si può indicare come $|M_O| = |F\ L|$, cioè una forza per una lunghezza, e viene espresso in [kNm].

MOMENTO DI UN VETTORE RISPETTO AD UN PUNTO - ESPRESSIONE MATRICIALE

Dati due vettori $\mathbf{D}_i$ e $\mathbf{v}_i$, di cui il primo ha origine in O ed estremo in P_i, potendolo quindi indicare anche come $(P_i\text{-}O)$, mentre il secondo ha origine in P_i ed estremo in un punto generico dello spazio, si definisce momento di $\mathbf{v}_i$, rispetto al polo O il vettore $\mathbf{M}_{Oi}$, prodotto vettoriale fra i due vettori $\mathbf{D}_i$ e $\mathbf{v}_i$:

$$\mathbf{M}_{Oi} = (P_i\text{-}O) \wedge \mathbf{v}_i = \mathbf{D}_i \wedge \mathbf{v}_i$$

Sapendo che la direzione del prodotto vettoriale fra due vettori è ortogonale al piano dei due vettori ed il verso è quello in cui si trovi un osservatore, che in piedi nel piano π dei due vettori, vede girare in senso antiorario il primo per sovrapporsi al secondo percorrendo l'angolo φ fra i due vettori, si può ricavare l'espressione del vettore momento polare, in funzione delle componenti cartesiane dei due vettori, applicando l'espressione matriciale del prodotto vettoriale.



Essendo $\mathbf{D}_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}$ $\mathbf{v}_i = \begin{Bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{Bmatrix}$ $\mathbf{M}_{Oi} = \mathbf{D}_i \wedge \mathbf{v}_i$, si ha:

$$\mathbf{M}_{Oi} = \begin{Bmatrix} M_{Oix} \\ M_{Oiy} \\ M_{Oiz} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{Bmatrix}$$

Esprimendo le componenti del vettore $\mathbf{v}_i$ secondo gli assi, mediante i coseni direttori della retta di applicazione:

$$v_{xi} = \alpha_i v_i \qquad v_{yi} = \beta_i v_i \qquad v_{zi} = \gamma_i v_i$$

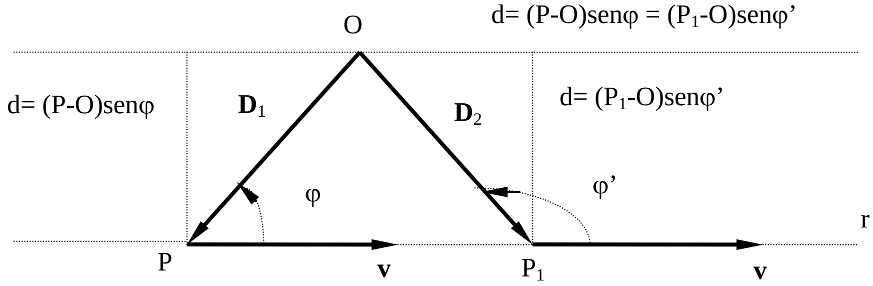
si ha:

$$\mathbf{M}_{Oi} = \begin{Bmatrix} M_{Oix} \\ M_{Oiy} \\ M_{Oiz} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_i v_{xi} \\ \beta_i v_{yi} \\ \gamma_i v_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (-\beta_i z_i + \gamma_i y_i) v_i \\ (\alpha_i z_i - \gamma_i x_i) v_i \\ (-\alpha_i y_i + \beta_i x_i) v_i \end{Bmatrix}$$

Quest'ultima espressione esprime quindi le componenti del momento del vettore $\mathbf{v}_i$ rispetto al polo O, in funzione delle componenti secondo gli assi dei due vettori $\mathbf{D}_i$ e $\mathbf{v}_i$.

Analizziamo le seguenti proprietà del momento di un vettore rispetto ad un polo O:
1) Il momento di un vettore **v** rispetto ad un polo O non cambia spostando il punto di applicazione del vettore lungo la retta r che passa per P, cioè facendo scorrere **v**lungo la sua retta di azione.
Ciò che non varia infatti è il braccio d del vettore rispetto al polo O, che corrisponde alla distanza di O dalla retta r.

d= (P-O)senφ = (P_1-O)senφ'

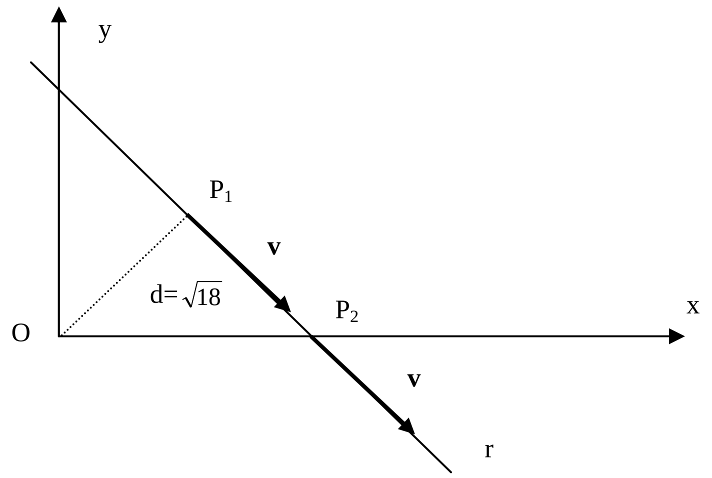


Chiaramente il momento di un vettore rispetto ad un punto della sua retta di applicazione è nullo, in quanto nullo è il braccio del vettore.

<u>Applicazione</u>
Dato un vettore v di componenti secondo gli assi x e y pari a 10 e –10, rispettivamente, supposto applicato in un caso ad un punto $P_1(3, 3)$ e nell'altro al punto $P_2(6, 0)$, determinare i corrispondenti momenti rispetto al polo O origine degli assi di riferimento.

$v \equiv \begin{Bmatrix} 10 \\ -10 \end{Bmatrix}$ a) applicato in $P_1(3, 3)$; b) applicato in $P_2(6, 0)$

a) $\mathbf{M}_O=(P_1\text{-}O) \wedge \mathbf{v}$ $(P_1\text{-}O)=\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$ $\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & k \\ 3 & 3 & 0 \\ 10 & -10 & 0 \end{vmatrix} = -30\mathbf{k} - 30\mathbf{k} = -60\mathbf{k}$



b) $\mathbf{M}_O=(P_2-O)\wedge\mathbf{v}$ $\qquad (P_2-O)=\begin{Bmatrix}6\\0\end{Bmatrix}$ $\qquad \mathbf{M}_O=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & k\\ 6 & 0 & 0\\ 10 & -10 & 0\end{vmatrix}=-60\mathbf{k}$

Il modulo del vettore **v** è: $\mathbf{v}=\sqrt{10^2+(-10)^2}=\sqrt{200}$

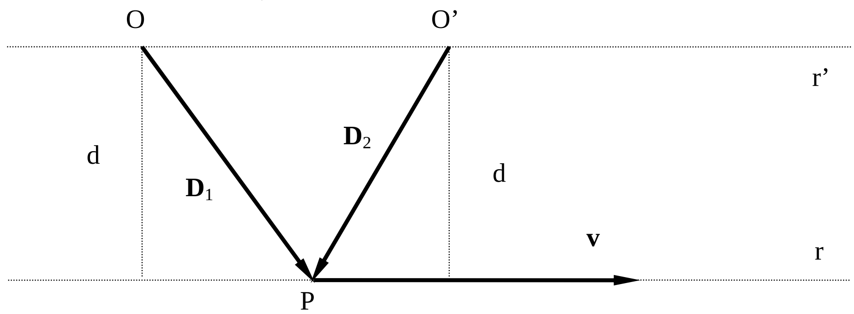
La distanza d della retta d'azione di **v** dal polo O, ovvero il braccio d, è: $d=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$

Il modulo del momento M_O può essere quindi anche calcolato come:

$$M_O = v\,d = \sqrt{200}\,\sqrt{18} = 60$$

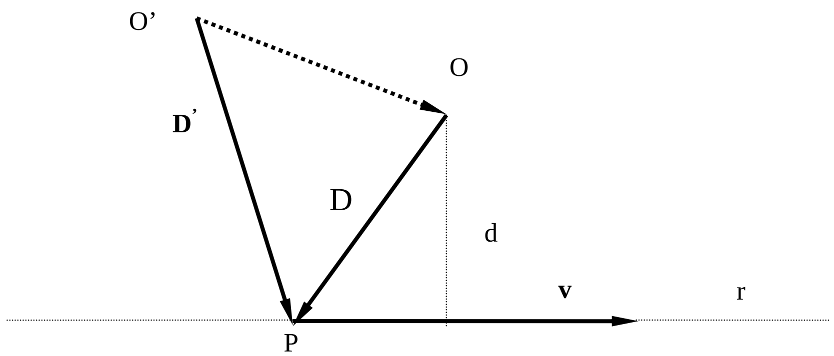
Che corrisponde al modulo dei due vettori momento determinati nei casi a) e b).

2) Il momento del vettore **v** rispetto al polo O non cambia spostando il polo O lungo una retta r' parallela alla retta r di azione del vettore:



infatti il braccio del vettore, uguale alla distanza del polo dalla retta di azione di **v**, non cambia al variare di O su r'. Variano i vettori posizione e gli angoli φ formati dai vettori posizione con il vettore v, ma rimane costante il prodotto Dsenφ che è il braccio d.

3) Il momento del vettore **v** rispetto al polo O', diverso da O, è uguale al momento di **v** rispetto ad O, aumentato del momento del vettore, supposto applicato in O, rispetto ad O':



$$\mathbf{M}_O = (P-O) \wedge \mathbf{v} \qquad \mathbf{M}_{O'} = (P-O') \wedge \mathbf{v}$$

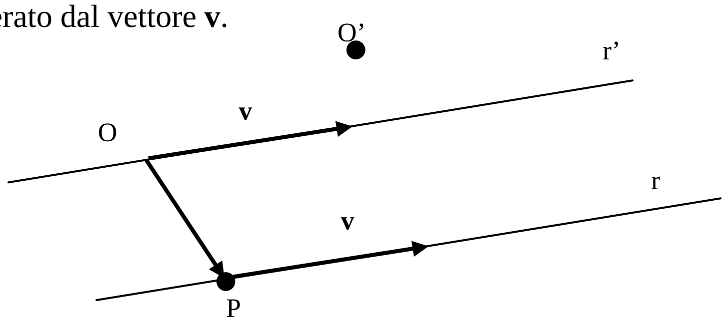
ma è: (P-O') = (P-O) + (O-O'), per cui si ha:

$$\mathbf{M}_{O'} = (P-O') \wedge \mathbf{v} = [(P-O) + (O-O')] \wedge \mathbf{v}$$

Per la proprietà distributiva del prodotto vettoriale si ha:

$$\mathbf{M}_{O'} = (P-O) \wedge \mathbf{v} + (O-O') \wedge \mathbf{v} = \mathbf{M}_O + (O-O') \wedge \mathbf{v}$$

Un vettore può essere trasportato parallelamente a se stesso ed applicato in un punto qualunque purché si aggiunga il momento che nasce da questo trasporto in modo da non alterare il campo vettoriale del momento generato dal vettore **v**.



Il vettore **v** può essere trasportato da P ad O, purché si aggiunga un momento di trasporto pari a

$$\mathbf{M}_O = (P-O) \wedge \mathbf{v}$$

<u>Applicazione</u>

Dato il vettore **v** applicato nel punto P_1, calcolare il momento rispetto all'origine degli assi.

$$v = \begin{Bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \qquad P_1(3;4;-2)$$

Il momento di **v** rispetto all'origine si può vedere come il prodotto vettoriale di un vettore **D**, che vada dall'origine al punto P_1, per il vettore **v**, e quindi applicando il determinante simbolico si ha:

$$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{M}_O = \mathbf{D} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10\mathbf{i} + 15\mathbf{k} \qquad \mathbf{M}_O = \begin{Bmatrix} M_{Ox} \\ M_{Oy} \\ M_{Oz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 15 \end{Bmatrix}$$

Allo stesso risultato si può arrivare applicando l'espressione matriciale del prodotto vettoriale:

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} 0 & -D_z & D_y \\ D_z & 0 & -D_x \\ -D_y & D_x & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 15 \end{Bmatrix}$$

Il modulo ed i coseni direttori del momento polare sono:

$$\mathbf{M}_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2} = \sqrt{10^2 15^2} = 18.028$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{M_{Ox}}{M_O} = \dfrac{10}{18.028} = 0.5547 \\ \beta = \dfrac{M_{Oy}}{M_O} = \dfrac{0}{18.028} = 0 \\ \gamma = \dfrac{M_{Oz}}{M_O} = \dfrac{15}{18.028} = 0..83205 \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

Applicazione

Dato il vettore **v** applicato nel punto $P_2(-6;7;4)$:

a) Calcolare il momento rispetto all'origine degli assi.

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{Bmatrix} -6 \\ 7 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Si risolve il momento del vettore **v** rispetto all'origine degli assi, come prodotto vettoriale fra il vettore $(P_2\text{-}O)$ ed il vettore **v**, calcolando il determinante simbolico:

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -6 & 7 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10\mathbf{i} + 15\mathbf{k} \qquad \mathbf{M}_O = \begin{Bmatrix} M_{Ox} \\ M_{Oy} \\ M_{Oz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ 15 \end{Bmatrix}$$

Le componenti del momento di **v** rispetto all'origine O non sono cambiate, nonostante sia cambiato il punto di applicazione del vettore.

b) Verifichiamo se P_2 appartiene alla retta r che contiene il vettore **v**:

Retta passante per il punto $P_1(3;4;-2)$ e avente la direzione del vettore: $\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$

$$\frac{x - x_1}{v_x} = \frac{y - y_1}{v_y} = \frac{z - z_1}{v_z} \qquad \frac{x-3}{-3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+2}{2}$$

Per verificare se il punto P_2 appartiene alla retta r, si sostituiscono le coordinate del punto all'equazione della retta:

$$\frac{-6-3}{-3} = \frac{7-4}{1} = \frac{4+2}{2} \Rightarrow 3 = 3 = 3$$

Il punto P_2 appartiene quindi alla retta r che contiene **v**, quindi il momento polare del vettore non cambia spostando il suo punto di applicazione lungo la sua retta d'azione.

c) Verifichiamo se il momento del vettore **v** rimane invariato, se il polo si muove su una retta parallela ad r:

Equazione parametrica della retta r, passante per P_1 e contenente **v**:

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda v_x \\ y = y_1 + \lambda v_y \\ z = z_1 + \lambda v_z \end{cases}$$

Equazione parametrica della retta passante per l'origine e parallela ad r:

$$\begin{cases} x = \lambda v_x \\ y = \lambda v_y \\ z = \lambda v_z \end{cases}$$

Sostituendo a quest'ultima equazione le componenti di **v** ed assumendo $\lambda = 2$ si ottengono le coordinate del punto A(-6;2;4), che giace sulla retta r' parallela ad r. Calcoliamo il momento del vettore **v** applicato in P_1, rispetto al punto A:

$$\mathbf{M}_O = (P_1 - A) \wedge \mathbf{v} \qquad (P_1 - A) = \begin{Bmatrix} 3-(-6) \\ 4-2 \\ -2-4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 2 \\ -6 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 9 & 2 & -6 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10\mathbf{i} + 15\mathbf{k}$$

Il momento polare è rimasto invariato.

SISTEMI DI VETTORI

Dato un insieme di vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …., $\mathbf{v}_n$ applicati nei punti P_1, P_2,...P_n, il loro risultante, come già visto, sarà il vettore determinato dalla poligonale dei vettori e si può scrivere:

$$\mathbf{R} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i$$

Si osservi che nello spazio la poligonale dei vettori risulta sghemba se i vettori addendi non sono complanari.

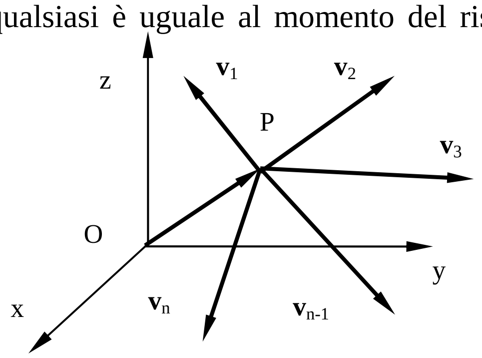
Se la poligonale è chiusa il risultante è nullo. Se cambia l'ordine dei vettori, cambia la forma della poligonale, ma non l'origine e il punto estremo, perciò non cambia la risultante.

Invece il *momento risultante* $\mathbf{M}_{OR}$ rispetto al polo O, origine degli assi, è la somma vettoriale dei momenti dei singoli vettori $\mathbf{M}_{Oi}$ rispetto al punto O.

$$\mathbf{M}_{OR} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \mathbf{v}_i = (P_1 - O) \wedge \mathbf{v}_1 + (P_2 - O) \wedge \mathbf{v}_2 + \ldots + (P_n - O) \wedge \mathbf{v}_n$$

VETTORI CONCORRENTI - TEOREMA DI VARIGNON

Dato un sistema di vettori concorrenti, cioè applicati nello stesso punto P, la somma dei loro momenti rispetto ad un polo qualsiasi è uguale al momento del risultante rispetto allo stesso polo:



$$\mathbf{M}_{OR} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \mathbf{v}_i = (P - O) \wedge \mathbf{v}_1 + (P - O) \wedge \mathbf{v}_2 + \ldots + (P - O) \wedge \mathbf{v}_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (P - O) \wedge \mathbf{v}_i = (P - O) \wedge \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i = (P - O) \wedge \mathbf{R}$$

SISTEMI DI VETTORI - SPOSTAMENTO DEL POLO

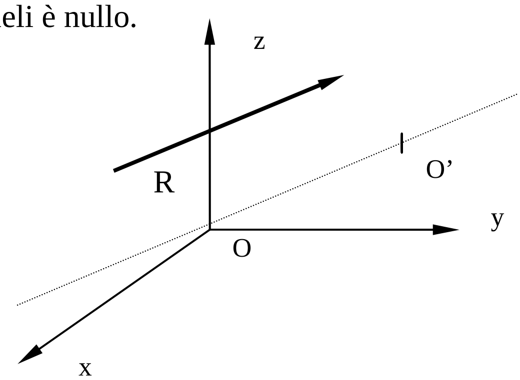
Se si sposta il polo dei momenti da O ad O', il momento risultante è uguale al momento risultante rispetto ad O, come visto in precedenza, aumentato della sommatoria dei momenti rispetto ad O' di tutti i vettori supposti applicati in O, e cioè del momento rispetto ad O' del risultante dei vettori supposto applicato in O:

$$\mathbf{M}_{OR} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \mathbf{v}_i \qquad \mathbf{M}_{O'R} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O') \wedge \mathbf{v}_i \qquad (P_i\text{-}O') = (P_i\text{-}O) + (O\text{-}O')$$

$$\mathbf{M}_{O'R} = \sum_{i=1}^{n} \left[(P_i\text{-}O) + (O\text{-}O') \right] \wedge \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (P_i\text{-}O) \wedge \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{n} (O\text{-}O') \wedge \mathbf{v}_i$$

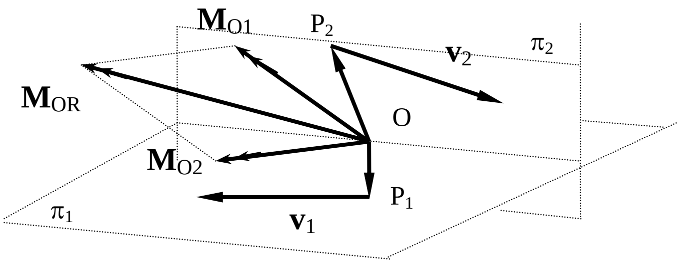
$$\mathbf{M}_{O'R} = \mathbf{M}_{OR} + (O\text{-}O') \wedge \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i = \mathbf{M}_{OR} + (O\text{-}O') \wedge \mathbf{R}$$

a) Se si sposta il polo lungo una retta parallela ad **v** il momento rimane invariato, in quanto il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo.



b) *Invarianza del momento* - Se il risultante dell'insieme dei vettori **R** è nullo, il momento risultante dei vettori è indipendente dal polo, cioè $\mathbf{M}_{O'R} = \mathbf{M}_{OR}$.

Momento risultante di due vettori rispetto ad un polo "O".
Dati due vettori applicati $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, giacenti rispettivamente nei piani π_1 e π_2, il momento risultante rispetto al polo O, che si trova sulla retta individuata dall'intersezione dei due piani, è pari a:



$$\mathbf{M}_{OR} = \sum_{i=1}^{n} (P_i\text{-}O) \wedge \mathbf{v}_i = \mathbf{M}_{O1} + \mathbf{M}_{O2}$$

$$\mathbf{M}_{O1} = (P_1\text{-}O) \wedge \mathbf{v}_1 \qquad\qquad \mathbf{M}_{O2} = (P_2\text{-}O) \wedge \mathbf{v}_2$$

$\mathbf{M}_{O1}$ è perpendicolare a π_1; $\mathbf{M}_{O2}$ è perpendicolare a π_2
Il Momento Risultante è quindi la somma vettoriale dei momenti dei singoli vettori rispetto ad O.

Applicazione
Vettori concorrenti. Dati tre vettori applicati nel punto P(1;2;0), si calcola il loro momento risultante rispetto al polo O, origine degli assi:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{Bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

Si esegue dapprima 1) il momento rispetto ad O dei singoli vettori, poi 2) il momento rispetto ad O del vettore risultante e si confrontano i due risultati:

1) Momento rispetto ad O dei singoli vettori.

$$\mathbf{M}_{O} = \begin{vmatrix} 0 & -D_z & D_y \\ D_z & 0 & -D_x \\ -D_y & D_x & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{O1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{M}_{O2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{O3} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{M}_{OR} = \mathbf{M}_{O1} + \mathbf{M}_{O2} + \mathbf{M}_{O3} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

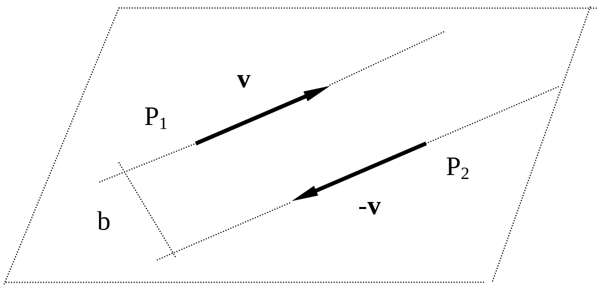
2) Momento rispetto ad O del vettore Risultante:

$$\mathbf{R} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{M}_{OR} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Quindi i due procedimenti danno lo stesso risultato.

COPPIE

Due vettori applicati in due punti distinti formano una *coppia*, se hanno la stessa intensità, linee d'azione parallele e versi opposti. E' chiaro che il risultante di questo particolare sistema è nullo:



$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{v}_i = 0 \qquad \text{Sistema a risultante nullo}$$

I due vettori che costituiscono la coppia sono complanari poiché per ipotesi sono paralleli. Il momento risultante del sistema rispetto ad un punto O qualsiasi nello spazio vale:

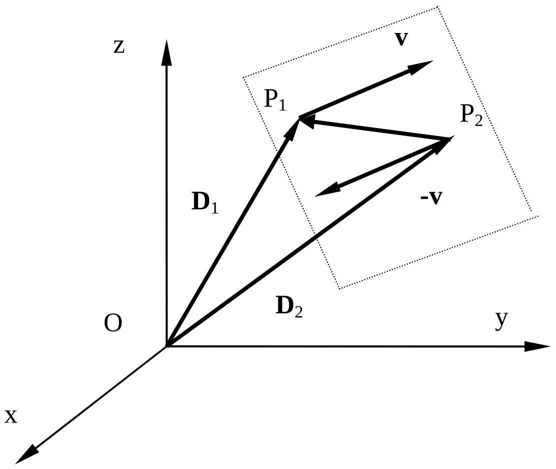
$$\mathbf{M}_O = (P_1 - O) \wedge \mathbf{v} + (P_2 - O) \wedge (-\mathbf{v})$$

per la proprietà distributiva si ha:

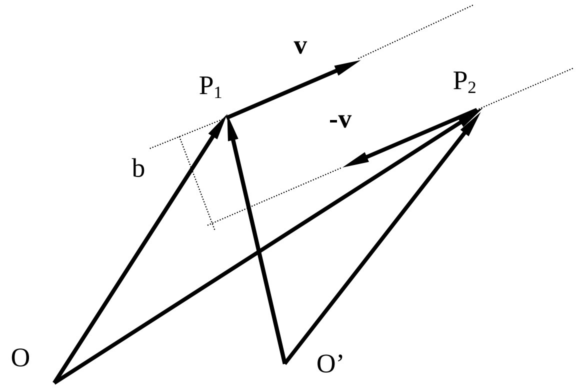
$$\mathbf{M}_O = [(P_1 - O) - (P_2 - O)] \wedge \mathbf{v} = (P_1 - P_2) \wedge \mathbf{v} = [D_1 - D_2] \wedge \mathbf{v}$$

dove $\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2 = (P_1 - P_2)$

Il momento quindi non dipende dal polo scelto, e la differenza tra i vettori di posizione $\mathbf{D}_1$ e $\mathbf{D}_2$ è il vettore $(P_1\text{-}P_2)$, definito dai punti d'applicazione dei due vettori $\mathbf{v}$ e $-\mathbf{v}$, che formano la coppia.



Se il punto O appartiene al piano definito dai vettori **v** e **-v** la rappresentazione è piana:



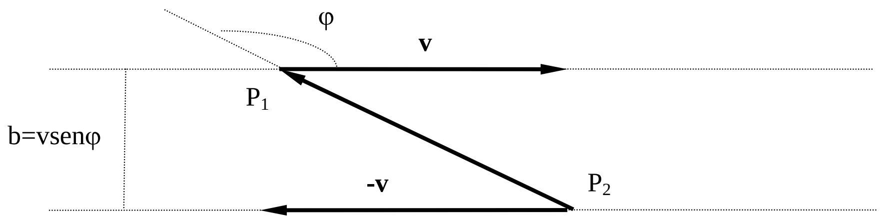
$$\mathbf{M}_O = [(P_1 - O) - (P_2 - O)] \wedge \mathbf{v} = (P_1 - P_2) \wedge \mathbf{v}$$

Se calcoliamo il momento rispetto ad O’ anziché rispetto ad O, si ha:

$$\mathbf{M}_{O'} = [(P_1 - O') - (P_2 - O')] \wedge (-\mathbf{v}) = (P_1 - P_2) \wedge \mathbf{v} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O$$

il momento non cambia qualsiasi sia il punto rispetto al quale si ricerca il momento risultante, ovvero il momento non dipende dal polo.

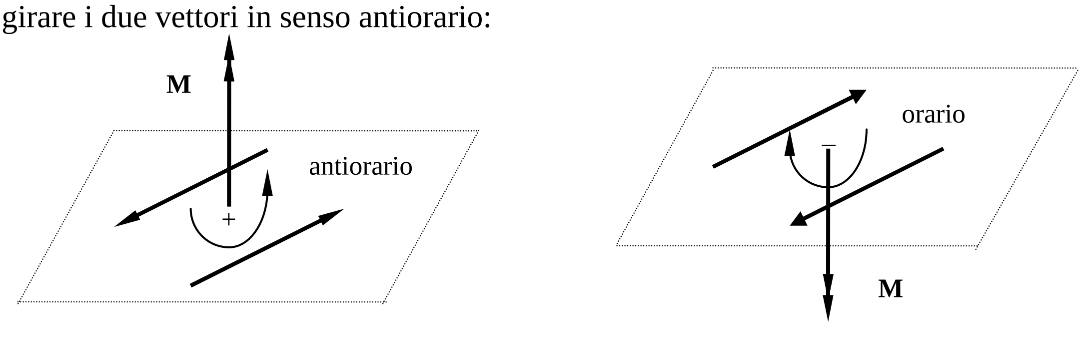
Il modulo del momento della coppia è sempre dato dal prodotto del modulo di uno dei due vettori per il braccio della coppia, qualsiasi sia il punto rispetto al quale si ricerca il momento:



$M_O = |(P_1 - P_2) \wedge \mathbf{v}| = (P_1 - P_2)\, v \,\mathrm{sen}\varphi$

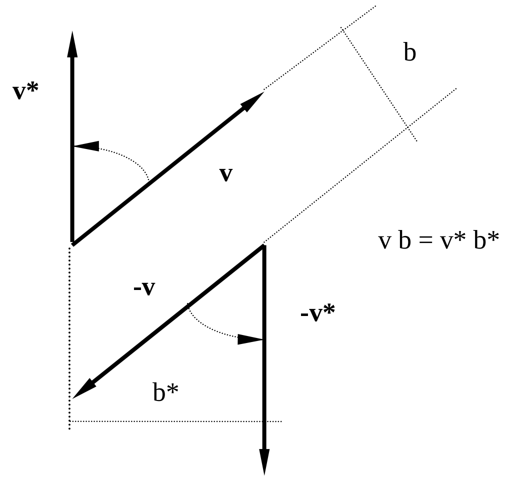
$(P_1 - P_2)\,\mathrm{sen}\varphi = b =$ braccio della coppia $\quad \Rightarrow \quad M_O = v\, b$

Quindi la coppia risulta rappresentata dal suo vettore momento, che ha modulo M=v b, direzione perpendicolare al piano della coppia e verso positivo quando un osservatore in piedi sul piano vede girare i due vettori in senso antiorario:

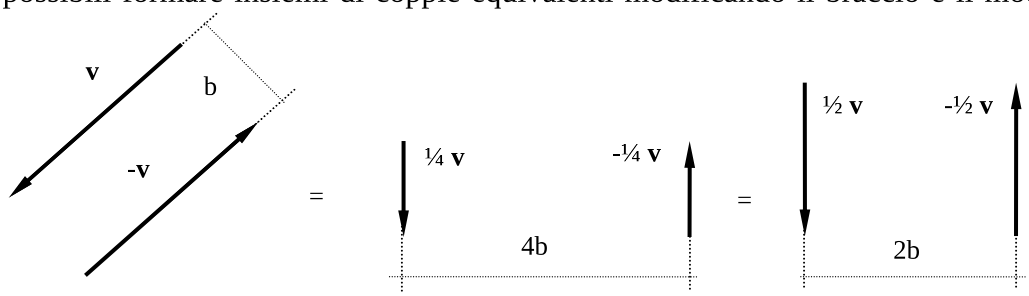


PROPRIETA' DELLE COPPIE

a) I due vettori che compongono la coppia possono ruotare attorno ai loro punti di applicazione purché si cambino i moduli dei vettori, in modo che rimanga costante il modulo del vettore momento che rappresenta la coppia:



quindi è possibili formare insiemi di coppie equivalenti modificando il braccio e il modulo dei vettori.



b) Una coppia può essere trasportata su un piano parallelo a quello su cui giace, senza modificare il campo di momento che essa induce.

c) Una coppia può essere trasportata comunque nel piano in cui giace, senza modificazioni del campo di momento che essa induce.

d) Le coppie possono essere sommate mediante la somma dei loro vettori momento.

Applicazione

Dati i vettori:

$\mathbf{v}_1 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix}$ applicato nel punto $P_1(1;0;4)$ $\qquad$ $\mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$ applicato nel punto $P_2(0;4;1)$

Verificare se costituiscono una coppia, cioè controllare se il risultante è nullo, l'uguaglianza dei moduli, e che le componenti siano proporzionali e quindi appartenenti a rette parallele.

$\mathbf{R} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = 0$

$$v_1 = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \qquad v_2 = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6} \qquad v_1 = v_2$$

Poiché i moduli sono uguali, la somma vettoriale dei due vettori è nulla.

$$\frac{-1}{1} = \frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} = -1$$, sono paralleli (hanno componenti proporzionali)

I due vettori costituiscono quindi una coppia. Calcoliamo ora il momento di ciascun vettore rispetto all'origine e poi il risultante dei due vettori momento:

$$\mathbf{M}_{O1} = \begin{vmatrix} 0 & -z_1 & y_1 \\ z_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8 \\ -3 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{O2} = \begin{vmatrix} 0 & -z_2 & y_2 \\ z_2 & 0 & -x_2 \\ -y_2 & x_2 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{OR} = \mathbf{M}_{O1} + \mathbf{M}_{O2} = \begin{Bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

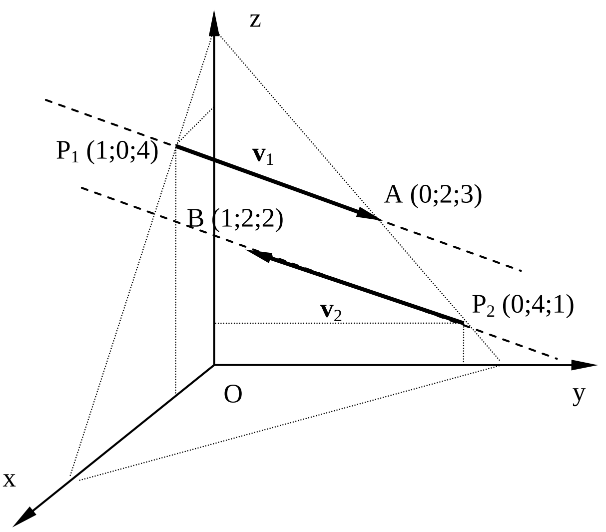
Calcoliamo ora il momento della coppia come prodotto vettoriale fra il vettore (P_1-P_2) ed uno dei due vettori dati, e verifichiamo che il momento della coppia è uguale al momento risultante dei due vettori momento calcolati rispetto all'origine:

$$(P_1 - P_2) = \begin{Bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{M}_O = (P_1 - P_2) \wedge \mathbf{v}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{OR} = \begin{Bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{Bmatrix} \qquad M_O = M_{OR} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12}$$

Eseguiamo lo stesso calcolo precedente, ma questa volta considerando (P_2-P_1) e l'altro vettore:

$$(P_2 - P_1) = \begin{Bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = \mathbf{M}_{OR}$$



Calcoliamo l'equazione del piano su cui giace la coppia:

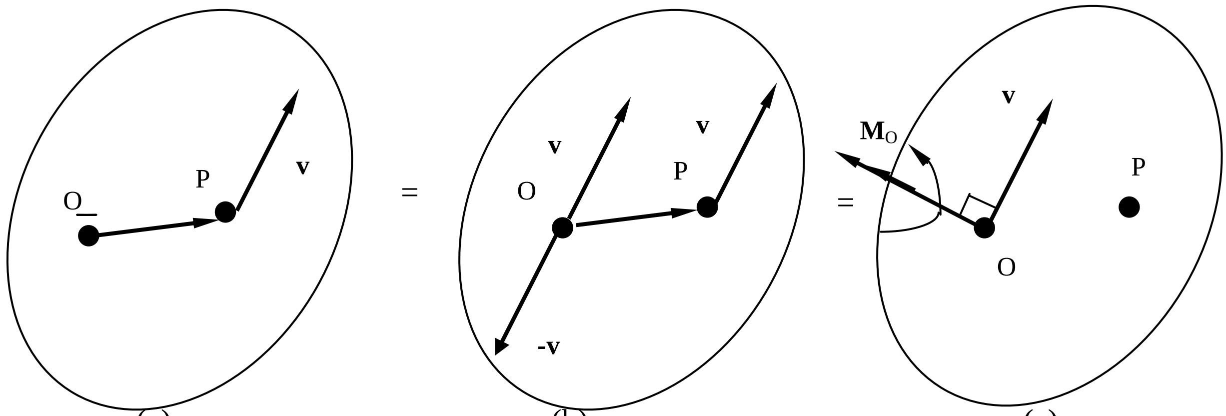
$$\mathbf{v}_1 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - 5 & y & z \\ -5 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 25x + 25y + 25z - 125 = 0 \qquad \text{Piano su cui giace la coppia.}$$

TRASPORTO DI UN VETTORE

Un vettore può essere traslato dal suo punto di applicazione P ad un altro punto O qualsiasi, purchè gli si aggiunga una coppia di Momento $\mathbf{M}_O = (P - O) \wedge \mathbf{v}$

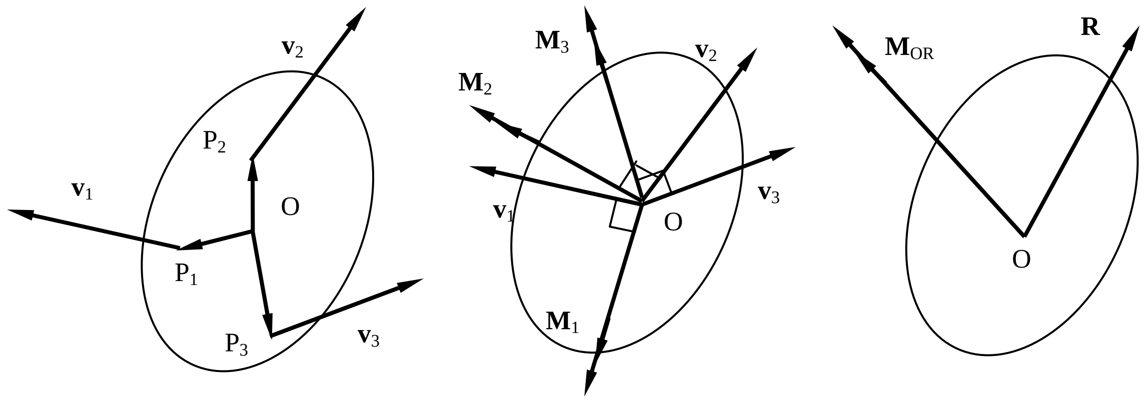
Si prende in esame il vettore **v** applicato nel punto P (Fig.a). Nel punto O si possono applicare altri due vettori, uno uguale a **v** ed uno uguale - **v**, senza modificare l'azione del vettore originale sul corpo rigido (Fig.b). Il vettore **v** applicato in P e quello - **v** applicato in O, costituiscono una coppia $\mathbf{M}_O$ giacente nel piano formato da (P-O) e **v** (Fig.c). La coppia $\mathbf{M}_O$ si chiama *coppia di trasporto*. Il risultato è quello di aver trasportato il vettore **v** dal suo originario punto di applicazione P, al punto O, avendo opportunamente aggiunto una coppia di trasporto.



(a) (b) (c)

RIDUZIONE AL POLO "O" DI UN SISTEMA DI VETTORI

Un sistema di vettori $\mathbf{v}_i$ applicati nei punti P_i si può ridurre ad un vettore risultante **R** applicato in un punto O, qualsiasi dello spazio, e ad un momento risultante $\mathbf{M}_{OR}$. Scelto il punto O possiamo trasportare in esso ciascun vettore, aggiungendo la relativa coppia di trasporto. I vettori concorrenti possono essere sommati e danno luogo al risultante **R** applicato in O. Le coppie di trasporto possono essere sommate e danno luogo al momento risultante $\mathbf{M}_{OR}$.



(a) (b) (c)

Il Risultante **R** ha intensità, direzione e verso perfettamente determinati indipendentemente dalla scelta del polo di riduzione adottato:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

Invece la coppia $\mathbf{M}_{OR}$ dipende dalla posizione del polo, perché è la somma dei momenti di ciascun vettore rispetto al polo O:

$$\mathbf{M}_{OR} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \mathbf{v}_i = (P_1 - O) \wedge \mathbf{v}_1 + (P_2 - O) \wedge \mathbf{v}_2 + (P_3 - O) \wedge \mathbf{v}_3$$

La coppia risultante $\mathbf{M}_{OR} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{Oi}$ giacerà in generale in un piano obliquo alla direzione della forza risultante **R**.

Esprimiamo la formulazione analitica della *Riduzione al polo O di un sistema di vettori*, in funzione delle componenti dei vettori $\mathbf{v}_i$ e del risultante **R**:

$$\mathbf{v}_i = \begin{Bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_i v_i \\ \beta_i v_i \\ \gamma_i v_i \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_{xi} \\ R_{yi} \\ R_{zi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum \alpha_i v_i \\ \sum \beta_i v_i \\ \sum \gamma_i v_i \end{Bmatrix}$$

Essendo le componenti dei momenti dei singoli vettori $\mathbf{M}_{Oi}$ rispetto al polo O:

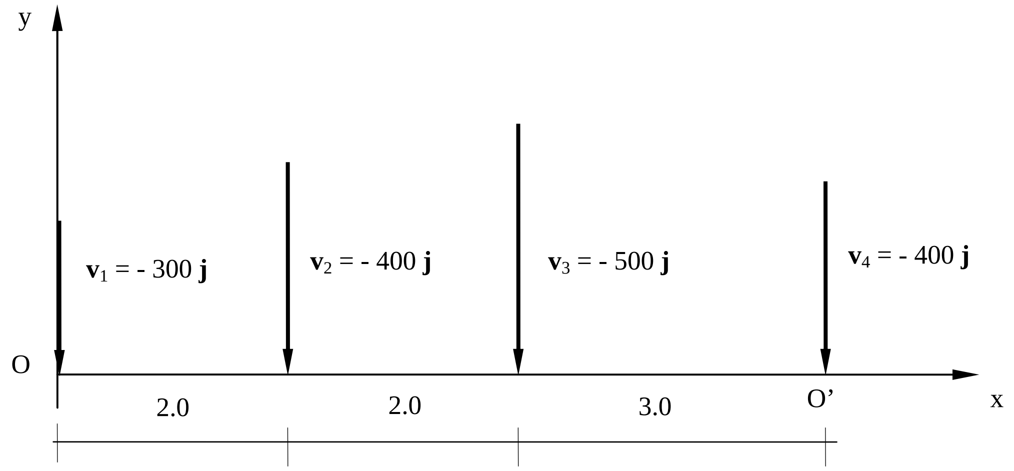
$$\mathbf{M}_{Oi} = \begin{Bmatrix} M_{Oix} \\ M_{Oiy} \\ M_{Oiz} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_i v_i \\ \beta_i v_i \\ \gamma_i v_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (-\beta_i z_i + \gamma_i y_i) v_i \\ (\alpha_i z_i - \gamma_i x_i) v_i \\ (-\alpha_i y_i + \beta_i x_i) v_i \end{Bmatrix}$$

Le componenti del Momento Risultante $\mathbf{M}_{OR} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{Oi}$, saranno:

$$\mathbf{M}_{Oi} = \begin{Bmatrix} M_{Oix} \\ M_{Oiy} \\ M_{Oiz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum (-\beta_i z_i + \gamma_i y_i) v_i \\ \sum (\alpha_i z_i - \gamma_i x_i) v_i \\ \sum (-\alpha_i y_i + \beta_i x_i) v_i \end{Bmatrix}$$

<u>Applicazione</u> - Riduzione al polo O di un sistema di vettori

Dato un sistema di vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ applicati rispettivamente nei punti P_1, P_2, P_3, P_4, calcolare il vettore Risultante ed il Momento Risultante del sistema di vettori rispetto ai due poli O ed O':



$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i = -300\,\mathbf{j} - 400\,\mathbf{j} - 500\,\mathbf{j} - 400\,\mathbf{j}$$

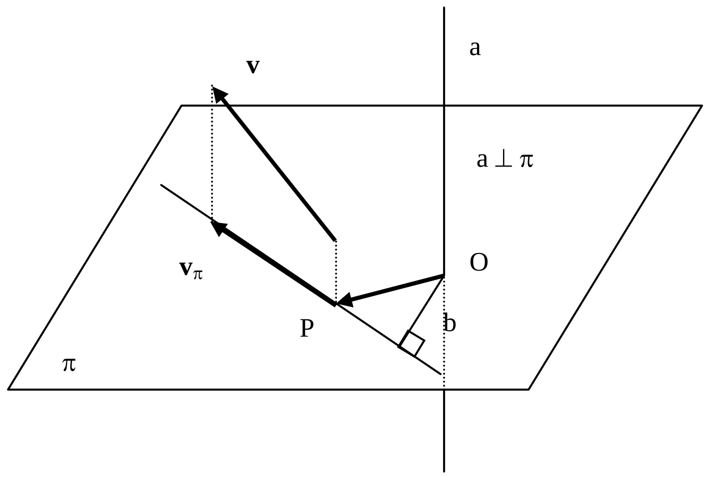
$$\mathbf{M}_{OR} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{Oi} = 2.0\,\mathbf{i} \wedge (-400\,\mathbf{j}) + 4.0\,\mathbf{i} \wedge (-500\,\mathbf{j}) + 7.0\,\mathbf{i} \wedge (-400\,\mathbf{j}) =$$

$$= -800\,\mathbf{k} - 2000\,\mathbf{k} - 2800\,\mathbf{k} = -5600\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_{O'R} = \mathbf{M}_{OR} + (O - O') \wedge \mathbf{R} = -5600\,\mathbf{k} + (-7.0)\,\mathbf{i} \wedge (-1600\,\mathbf{j}) = -5600\,\mathbf{k} + 11200\,\mathbf{k} = 5600\,\mathbf{k}$$

MOMENTO ASSIALE DI UNA FORZA

Dato un asse *a* e una forza **v** (non parallela né incidente l'asse *a*), si definisce momento assiale di **v** rispetto ad *a* il momento polare della proiezione di **v** su un piano π normale all'asse rispetto al punto O intersezione di tale piano con l'asse considerato.



ove $\mathbf{v}_\pi$ è la proiezione di **v** sul piano π.

$$\mathbf{M}_a = (P-O) \wedge \mathbf{v}_\pi$$

Il modulo del momento assiale è: $M_a = v_\pi\, b$

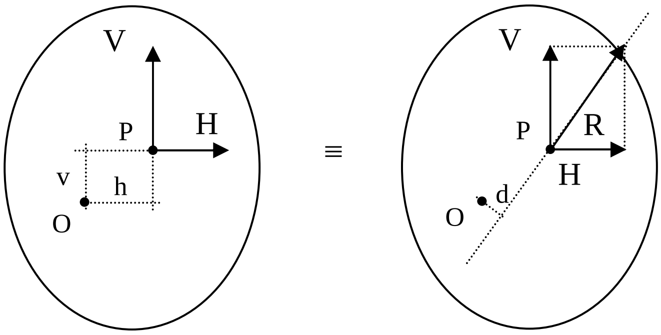
Il momento di un vettore rispetto ad un asse è dato dal prodotto della proiezione del vettore su un piano normale all'asse, per la sua distanza minima dall'asse stesso. Il momento assiale è nullo se il vettore incontra l'asse è anche se gli è parallelo.

EQUIVALENZA STATICA. SISTEMI DI FORZE APPLICATE.

Quando un sistema di forze applicate ad un corpo rigido può essere sostituito da un altro sistema di forze applicate allo stesso corpo senza provocare alcuna modifica degli effetti , quali ad esempio la tendenza alla traslazione e alla rotazione, i due sistemi di forze si dicono staticamente equivalenti.

In sintesi, due sistemi di forze applicate si dicono equivalenti se producono gli stessi effetti meccanici sul corpo rigido cui sono applicati.

Ad esempio la forza **R** applicata in P è staticamente equivalente al sistema di forze concorrenti **V** e **H** applicate allo stesso punto O se le tendenze alla traslazione e alla rotazione indotte dalle forze **V** e **H** sono uguali a quelle provocate da **R**.



Sistema 1 Sistema 2

$$\mathbf{V} + \mathbf{H} = \mathbf{R} \qquad\qquad \mathbf{R} = \mathbf{V} + \mathbf{H}$$

$$\mathbf{M}^1_{OR} = V\,v - H\,h \qquad\qquad \mathbf{M}^2_{OR} = R\,d$$

Il sistema 1 è equivalente al sistema 2 se $\mathbf{M}^1_{OR} = \mathbf{M}^2_{OR}$ (uguale tendenza alla rotazione) e **V** + **H** = **R** uguale tendenza alla rotazione.

Più in generale, dati due sistemi S e S* di forze applicate ad un corpo rigido che abbiano risultante **R** e **R***, e momento risultante rispetto ad un polo qualsiasi O, M_{OR} e $\mathbf{M}^*_{OR}$, tali sistemi si definiscono equivalenti se e solo se hanno stesso risultante e stesso momento risultante rispetto ad un qualsiasi polo.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^* \qquad\qquad M_{OR} = \mathbf{M}^*_{OR}$$

Quindi si può affermare che due sistemi di forze applicate sono equivalenti se entrambi possono essere ridotti allo stesso sistema Risultante-Momento Risultante che caratterizza completamente gli effetti del sistema dato sul corpo rigido.

Dovendo essere uguali i campi vettoriali dei momenti generati da due sistemi equivalenti, risulta che l'uno può essere ricavato dall'altro mediante operazioni invariantive, che non modificano i campi momento.

A partire dalle espressioni di equivalenza:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i = \sum \mathbf{F}^*_i = \mathbf{R}^* \qquad\qquad \mathbf{M}_{OR} = \sum \mathbf{M}_{Oi} = \sum \mathbf{M}^*_{Oi} = \mathbf{M}^*_{OR}$$

e considerando le corrispondenti componenti cartesiane, si possono esprimere le condizioni necessarie e sufficienti affinché due sistemi di forze applicate siano equivalenti:

$$\begin{cases} \sum F_{xi} = \sum F^*_{xi} & \Rightarrow \quad R_x = R^*_x \\ \sum F_{yi} = \sum F^*_{yi} & \Rightarrow \quad R_y = R^*_y \\ \sum F_{zi} = \sum F^*_{zi} & \Rightarrow \quad R_z = R^*_z \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \sum M_{Oxi} = \sum M^*_{Oxi} & \Rightarrow \quad M_{ORx} = M^*_{ORx} \\ \sum M_{Oyi} = \sum M^*_{Oyi} & \Rightarrow \quad M_{ORy} = M^*_{ORy} \\ \sum M_{Ozi} = \sum M^*_{Ozi} & \Rightarrow \quad M_{ORz} = M^*_{ORz} \end{cases}$$

Quindi due sistemi sono equivalenti se entrambi producono la stessa traslazione secondo gli assi x, y, z e la stessa rotazione attorno agli assi x, y, z.

OPERAZIONI INVARIANTIVE

Sono quelle operazioni che non modificano il campo di momenti stabilito dal sistema di forze applicate. Quindi queste operazioni non modificano gli effetti meccanici prodotti dalle forze applicate ad un corpo rigido.

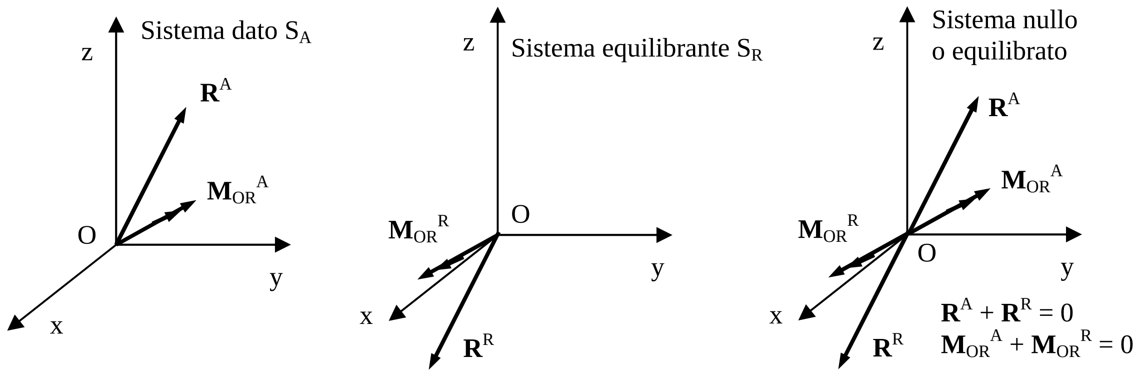
- Spostare il punto di applicazione di una forza lungo la propria retta d'azione.
- Aggiungere o togliere due forze uguali e opposte agenti sulla stessa retta d'azione. Tali forze costituiscono una coppia di momento nullo.
- Sostituire più forze agenti su rette d'azione concorrenti in un punto con il loro risultante applicato nello stesso punto. Viceversa si può decomporre una forza secondo più direzioni.
- Spostare una forza in direzione perpendicolare alla sua retta di azione aggiungendo la corrispondente coppia di trasporto.
- Sostituire più coppie con una sola coppia che abbia come momento il momento risultante dei vettori momento di ciascuna delle coppie date.
- Trasportare una coppia su un piano parallelo a quello su cui giace.

SISTEMA EQUILIBRANTE

Sistema dato S_A + Sistema equilibrante S_R = Sistema nullo o equilibrato

Forze Attive + Forze Reattive = Equilibrio

In ciascun caso il sistema di forze si considera ridotto in un punto generico ad un sistema Risultante- Momento Risultante (Forza-Coppia).



Dato un sistema S^A di forze applicate avente risultante $\mathbf{R}^A$ (forza) e momento risultante $\mathbf{M}_{OR}^{A}$ rispetto ad un polo O qualsiasi, si definisce SISTEMA EQUILIBRANTE (del sistema dato) il sistema S^R di risultante $\mathbf{R}^R$ (forza) e momento risultante $\mathbf{M}_{OR}^{R}$ rispetto allo stesso polo tale che si verifichi:

$\mathbf{R}^A + \mathbf{R}^R = 0$ $\quad$ $\mathbf{R}^A$ e $\mathbf{R}^R$ sono forze opposte

$\mathbf{M}_{OR}^{A} + \mathbf{M}_{OR}^{R} = 0$ $\quad$ $\mathbf{M}_{OR}^{A}$ e $\mathbf{M}_{OR}^{R}$ sono coppie opposte

Si può anche affermare che il sistema S^R è equilibrante del sistema S^A se il sistema formato da tutte le forze appartenenti a S^A e S^R costituiscono un sistema nullo. Quindi il sistema equilibrante sommato al sistema dato produce un sistema equilibrato.

In generale, dato un corpo rigido vincolato, sono note le forze attive applicate in diversi punti del corpo, mentre sono incognite le forze reattive agenti nei vincoli. Se l'insieme deve essere in equilibrio ne segue che le reazioni vincolari devono costituire un sistema equilibrante di quello costituito dalle forze attive. Quindi la determinazione delle reazioni vincolari può essere vista come la ricerca del sistema equilibrante delle forze attive.

SISTEMA DI FORZE NULLO O EQUILIBRATO

Uno dei problemi fondamentali della meccanica è quello dello studio dell'equilibrio dei corpi, cioè delle condizioni a cui devono soddisfare le posizioni di un dato sistema e le forze applicate affinché esso possa rimanere in quiete rispetto ad un prefissato sistema di riferimento quando l'atto di moto iniziale sia nullo.

Un aspetto di notevole importanza riguardante la riduzione di un dato sistema di forze applicate ad un sistema costituito da una sola forza (risultante) e da una sola coppia (momento risultante) si presenta quando sia il Risultante **R** che il Momento Risultante $\mathbf{M}_{OR}$ sono uguali a zero. In tale situazione si dice che il sistema dato è nullo o equilibrato.

Da un punto di vista meccanico, un sistema nullo non provoca nessun effetto sul corpo rigido su cui agisce, per cui il corpo rigido rimane in stato di quiete o di equilibrio.

Si può affermare che un corpo rigido è in equilibrio quando le forze agenti sul corpo costituiscono un sistema nullo o equivalente a zero.

Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo rigido è che il sistema di forze su di esso agente costituisca un sistema nullo o equivalente a zero, ovvero che siano nulli risultante e momento risultante rispetto ad un polo (e quindi ad ogni polo).

Se il sistema è nullo, il risultante delle forze agenti **R** e il loro momento risultante (rispetto ad un polo qualsiasi) M_{OR} debbono essere nulli. Quindi le condizioni di equilibrio di un corpo rigido sono:

$\mathbf{R} = 0 \quad M_{OR} = 0$ EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA (Forma Vettoriale)

Operando in termini di componenti cartesiane, si ottengono le seguenti equazioni in forma scalare:

$$\begin{cases} R_x = 0 \Rightarrow \sum F_{xi} = 0 \\ R_y = 0 \Rightarrow \sum F_{yi} = 0 \\ R_z = 0 \Rightarrow \sum F_{zi} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} M_{ORx} = 0 \Rightarrow \sum M_{Oxi} = 0 \\ M_{ORy} = 0 \Rightarrow \sum M_{Oyi} = 0 \\ M_{ORz} = 0 \Rightarrow \sum M_{Ozi} = 0 \end{cases}$$

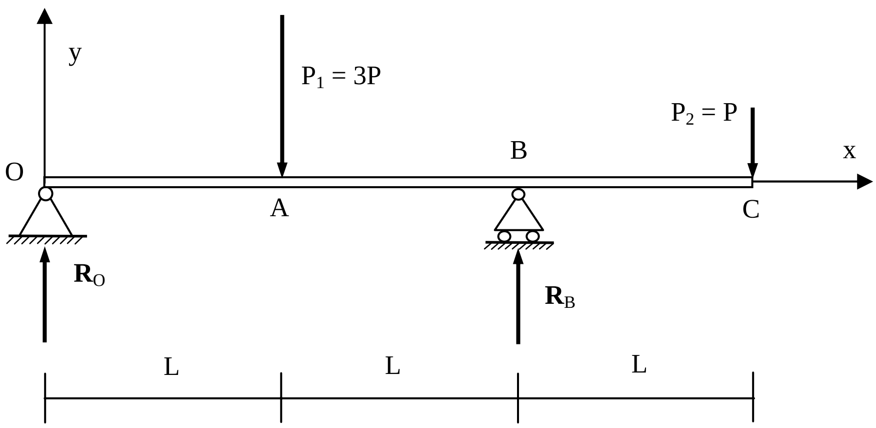
Nel piano le precedenti sei equazioni si riducono a tre equazioni:

$$\begin{cases} \sum F_{xi} = 0 \\ \sum F_{yi} = 0 \\ \sum M_{Oi} = 0 \end{cases}$$

Le precedenti equazioni, che forniscono le condizioni di equilibrio, sono anche denominate Equazioni Cardinali della Statica.

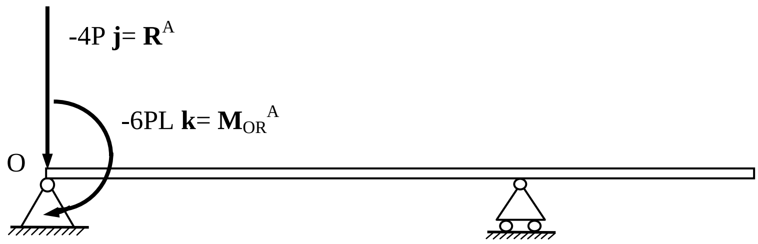
Applicazione: Determinazione reazioni vincolari

Data la trave in figura, determinare le reazioni vincolari applicando il concetto di sistema equilibrante.



Le incognite del problema sono le reazioni vincolari $\mathbf{R}_O$ e $\mathbf{R}_B$.
Le forze $\mathbf{P}_1 = -3P\,\mathbf{j}$ e $\mathbf{P}_2 = -P\,\mathbf{j}$ costituiscono il sistema attivo.
Le forze $\mathbf{R}_O = R_O\,\mathbf{j}$ e $\mathbf{R}_B = R_B\,\mathbf{j}$ costituiscono il sistema reattivo.

– Riduzione al punto O delle forze attive.



$\mathbf{R}^A = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = -3P\,\mathbf{j} - P\,\mathbf{j} = -4P\,\mathbf{j}$
$\mathbf{M}_{OR}{}^A = \mathbf{M}_{O1} + \mathbf{M}_{O2}$
$\mathbf{M}_{O1} = (A-O) \wedge (-3P\,\mathbf{j}) = L\,\mathbf{i} \wedge (-3P\,\mathbf{j}) = -3PL\,\mathbf{k}$
$\mathbf{M}_{O2} = (C-O) \wedge (-P\,\mathbf{j}) = 3L\,\mathbf{i} \wedge (-P\,\mathbf{j}) = -3PL\,\mathbf{k}$
$\mathbf{M}_{OR}{}^A = -3PL\,\mathbf{k} - 3PL\,\mathbf{k} = -6PL\,\mathbf{k}$

Il sistema equilibrante, costituito da $\mathbf{R}_O$ e $\mathbf{R}_B$, deve avere risultante e momento risultante opposti a quelli del sistema attivo, quindi:
$\mathbf{R}^R = \mathbf{R}_O$ e $\mathbf{R}_B = 4P\,\mathbf{j}$
$\mathbf{M}_{OR}{}^R = 6PL\,\mathbf{k}$
Il momento risultante delle forze reattive rispetto ad O, si può esprimere come:
$\mathbf{M}_{OR}{}^R = (B-O) \wedge R_B\,\mathbf{j} = 2L\,\mathbf{i} \wedge R_B\,\mathbf{j} = 2L\,R_B\,\mathbf{k}$
D'altra parte deve essere $\mathbf{M}_{OR}{}^R = 6PL\,\mathbf{k}$, per cui risulta:
$2L\,R_B\,\mathbf{k} = 6PL\,\mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad R_B = 3P \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_B = 3P\,\mathbf{j}$
Essendo $\mathbf{R}^R = \mathbf{R}_O$ e $\mathbf{R}_B = 4P\,\mathbf{j}$, si ha: $\mathbf{R}_O = P\,\mathbf{j}$
$\mathbf{R}_O = P\,\mathbf{j}$ applicata in O e $\mathbf{R}_B = 3P\,\mathbf{j}$ applicata in B costituiscono il sistema di forze reattive equilibranti il sistema dato.

– Determinazione delle reazioni vincolari mediante le Equazioni Cardinali della Statica

La precedente procedura applicata per la determinazione delle reazioni vincolari utilizzando il sistema equilibrante può essere semplificata mediante l'impiego diretto delle equazioni cardinali della statica.

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_O = 0 \end{cases}$$

Si assumono positive le rotazioni antiorarie, mentre le forze sono positive se concordi con gli assi x e y del sistema di riferimento.
La direzione di $\mathbf{R}_B$ è nota in quanto deve risultare ortogonale al piano in cui giace il carrello. Essendo verticali le forze attive $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$, nel caso in esame, anche $\mathbf{R}_O$ sarà verticale.
Dalla prima delle tre precedenti equazioni si ottiene subito: $R_{Ox} = 0$
Dalla seconda si ha:
$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -3P - P + R_O + R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad R_O + R_B = 4P$
Dalla terza equazione si ha:
$\sum M_O = 0 \quad \Rightarrow \quad -3P\,L - P\,3L + R_B\,2L = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B\,2L = 6P\,L \Rightarrow \quad R_B = 3P$
Essendo il risultato positivo è corretto il verso iniziale assunto per R_B.

Tornando alla $\sum F_y = 0$, si ricava l'ultima reazione:

$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_O + R_B = 4P \;\Rightarrow \quad R_O + 3P = 4P \;\Rightarrow \quad R_O = P$

anche il verso supposto per R_O è corretto.

TEOREMA DI VARIGNON O TEOREMA DEI MOMENTI

Un'importante proprietà, già introdotta in precedenza nel caso generale, originariamente formulata dal matematico francese Varignon (1654-1722), viene qui richiamata per i sistemi di forze complanari. Dato un sistema di forze complanari la somma dei loro momenti rispetto a un polo qualsiasi è uguale al momento del risultante rispetto allo stesso polo.

$$\mathbf{M}_{OR} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i = = (A - O) \wedge \mathbf{R}$$

essendo $R = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$

La dimostrazione si ottiene inizialmente per il caso di due forze concorrenti e successivamente si estende al caso di più forze complanari.

Siano $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ due forze complanari applicate nei punti P_1 e P_2 e sia Q il punto di intersezione delle loro rette di azione. Se P_1, P_2 e Q appartengono ad un corpo rigido (in cui le distanze mute trai vari punti del corpo non variano), le forze $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ si possono far scorrere lungo le rispettive rette di azione fino a considerarle applicate in Q. Se O è un punto generico in cui si colloca l'origine degli assi di riferimento, il momento del sistema formato da $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ rispetto ad O è dato da:

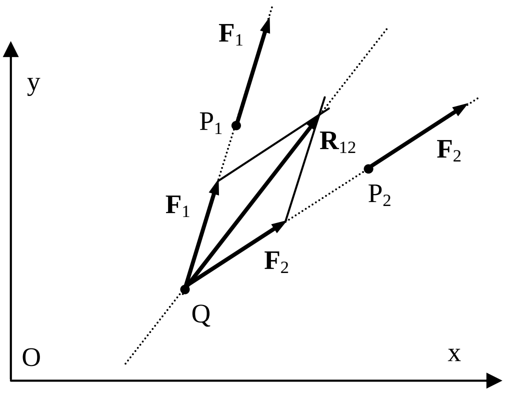
$$\mathbf{M}_{OR} = \mathbf{M}_{O1} + \mathbf{M}_{O2} = (Q\text{-}O) \wedge \mathbf{F}_1 + (Q\text{-}O) \wedge \mathbf{F}_2$$

Applicando la proprietà distributiva del prodotto vettoriale, si ottiene:

$$\mathbf{M}_{OR} = (Q\text{-}O) \wedge (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) = (Q\text{-}O) \wedge \mathbf{R}_{12} \qquad \text{essendo } \mathbf{R}_{12} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

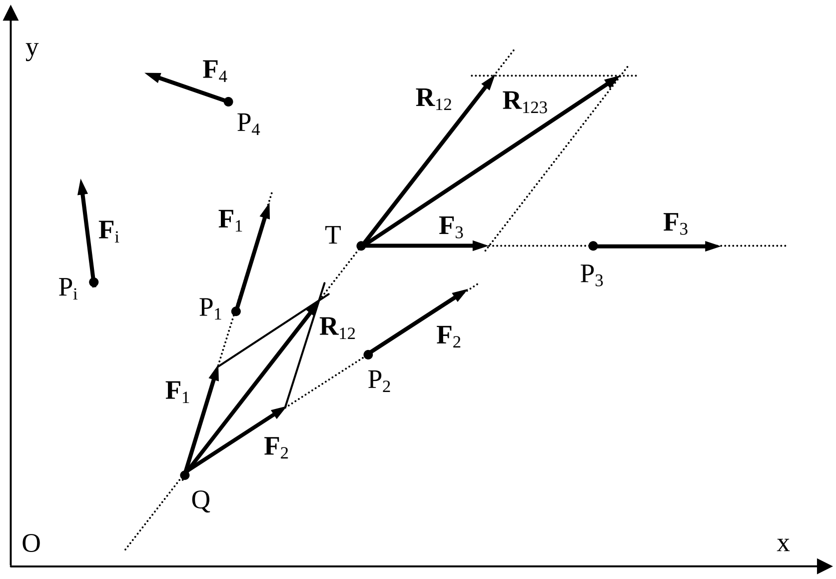
Per cui il momento rispetto ad O di due forze concorrenti è uguale al momento del risultante rispetto allo stesso punto.

La forza $\mathbf{R}_{12}$ applicata in Q è equivalente al sistema costituito dalle due forze $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ (hanno lo stesso risultante e momento rispetto ad O). Quindi si può affermare che il risultante di un sistema di forze complanari è costituito dalla forza che agendo in una definita posizione produce sul corpo rigido gli stessi effetti meccanici prodotti dalle forze date. E' opportuno osservare che se le forze agissero su un corpo deformabile, il risultante non produrrebbe, in generale, i medesimi effetti delle componenti.



La precedente formulazione ricavata per due forze concorrenti può essere generalizzata al caso di più forze complanari comunque disposte. Infatti, operando allo stesso modo con $\mathbf{R}_{12}$ e una terza forza $\mathbf{F}_3$ si ottiene il risultante $\mathbf{R}_{123}$ applicato in un altro punto T. Si considera quindi una quarta forza $\mathbf{F}_4$ e così via fino ad arrivare al risultante $\mathbf{R}$ dell'intero sistema applicato in A. Si perviene quindi alla seguente espressione:

$$\mathbf{M}_{OR} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \mathbf{F}_i = = (A - O) \wedge \mathbf{R}$$



Nella forma generalizzata per i sistemi piani il Teorema di Varignon recita: *il momento del risultante di un sistema di forze complanari rispetto ad un punto del piano è uguale alla somma dei momenti delle singole forze rispetto allo stesso punto.*

Si dimostra che la formulazione di Varignon è valida per i sistemi di forze parallele complanari o spaziali.

Il Teorema di Varignon è anche valido per i sistemi di forze spaziali concorrenti in un punto. E' inoltre applicabile a tutti i casi in cui il sistema di forze dato può essere ridotto al solo risultante $\mathbf{R}$ delle forze. Mediante la formulazione di Varignon è possibile determinare rapidamente la posizione del risultante. Il calcolo può essere agevolato considerando le componenti delle forze secondo gli assi di riferimento.

POSIZIONE DEL RISULTANTE DI UN SISTEMA DI FORZE COMPLANARI E PARALLELE

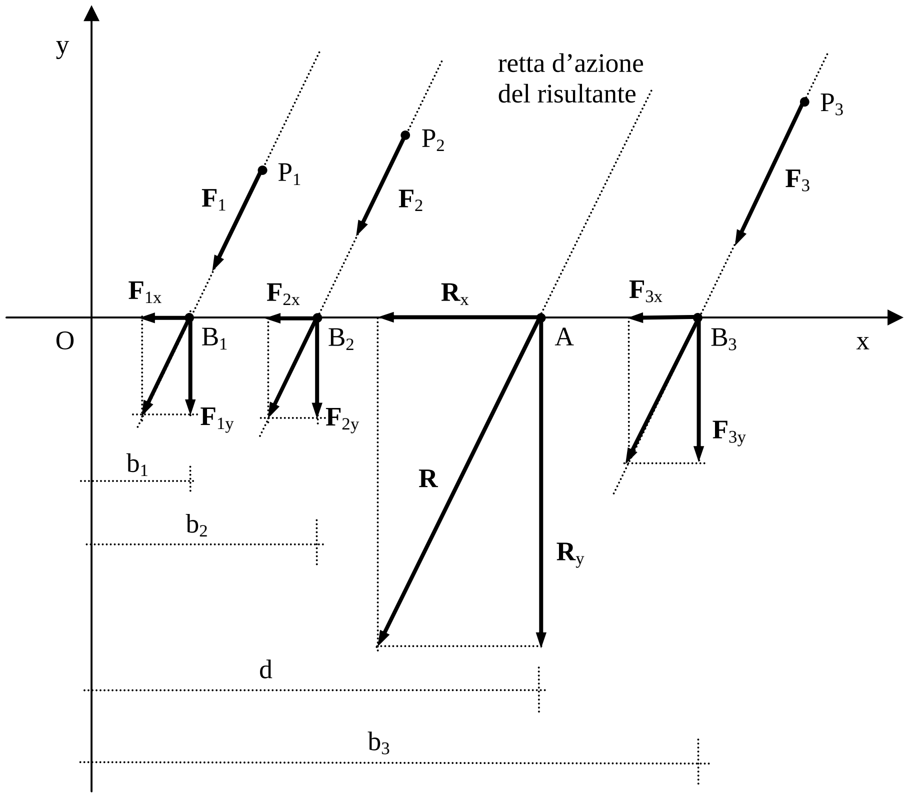
Dato un sistema di forze complanari parallele $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, il risultante R ha la direzione delle forze.

Per definire la posizione di $\mathbf{R}$ è sufficiente quindi determinare le coordinate di un punto della sua retta di azione.

Assunto un sistema di assi di riferimento, si possono spostare le forze $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, lungo la loro retta d'azione fino ad applicarli nei punti B_1, B_2, B_3 di intersezione con l'asse x (operazione invariantiva).

Quindi ciascuna forza viene sostituita dalle rispettive componenti cartesiane $\mathbf{F}_{ix}$ e $\mathbf{F}_{iy}$ (altra operazione invariantiva). Secondo il Teorema di Varignon il momento del risultante rispetto all'origine O è uguale alla somma dei momenti rispetto allo stesso polo di ciascuna delle forze. Inoltre, il momento rispetto ad O di una singola forza $\mathbf{F}_i$ è uguale alla soma dei momenti delle sue componenti $\mathbf{F}_{ix}$ e $\mathbf{F}_{iy}$ sempre rispetto allo stesso polo.

Si può osservare che le componenti $\mathbf{F}_{ix}$ hanno rette d'azione incidenti in O e perciò braccio nullo rispetto a tale punto. Quindi il momento rispetto ad O di una generica forza $\mathbf{F}_i$ applicata in B_i è uguale al momento della sua componente $\mathbf{F}_{iy}$.



Con la notazione adottata in figura si può scrivere:

$$M_{OR} = \Sigma F_{iy}\, b_i = F_{1y}\, b_1 + F_{2y}\, b_2 + F_{3y}\, b_3$$

Considerando che la retta di azione del risultante **R** incontra l'asse x nel punto $A(x_A,0)$ e sostituendo a R le sue componenti $\mathbf{R}_x$ e $\mathbf{R}_y$, si ottiene:

$$M_{OR} = R_y\, d \qquad \text{con } R_y = \Sigma F_{iy} \qquad \text{e } d = x_A$$

Dalle precedenti espressioni si ricava quindi:

$$d = \frac{\sum F_{iy} b_i}{\sum F_{iy}} = \frac{M_{OR}}{R_y}$$

Noto d risulta determinata la posizione della retta di azione del Risultante del sistema dato (come si vedrà tale retta è l'Asse Centrale).

INVARIANTE SCALARE

Si prenda in esame un sistema di vettori applicati e si esegua il momento risultante del sistema rispetto al polo O:

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \mathbf{v}_i$$

calcolando ora il momento risultante del sistema di vettori rispetto al polo O', si ha la nota espressione, in cui il momento risultante rispetto ad O' è uguale al momento risultante rispetto ad O, addizionato del momento rispetto ad O' del Risultante del sistema applicato in O:

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + (O - O') \wedge \mathbf{R}$$

moltiplicando scalarmente ambo i membri per **R** si ha:

$$\mathbf{M}_{O'} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O \times \mathbf{R} + (O - O') \wedge \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

ma $(O - O') \wedge \mathbf{R} \times \mathbf{R} = 0$ perché prodotto scalare fra due vettori ortogonali; rimane quindi:

$$\mathbf{M}_{O'} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O \times \mathbf{R} = I$$

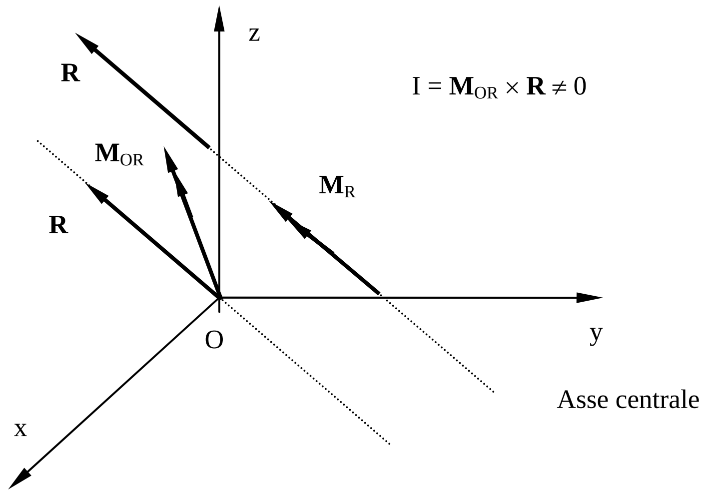
Il prodotto scalare del momento rispetto ad un polo qualsiasi, per il risultante, è invariante rispetto al polo e si chiama *Invariante scalare*. Quindi il prodotto scalare del momento risultante rispetto ad un punto qualsiasi per il risultante è sempre costante e non dipende dal polo. Si può anche scrivere:

$$\mathbf{M}_O \times \mathbf{R} = M_O \cos\varphi \, R = M_{OR} \, R = I$$

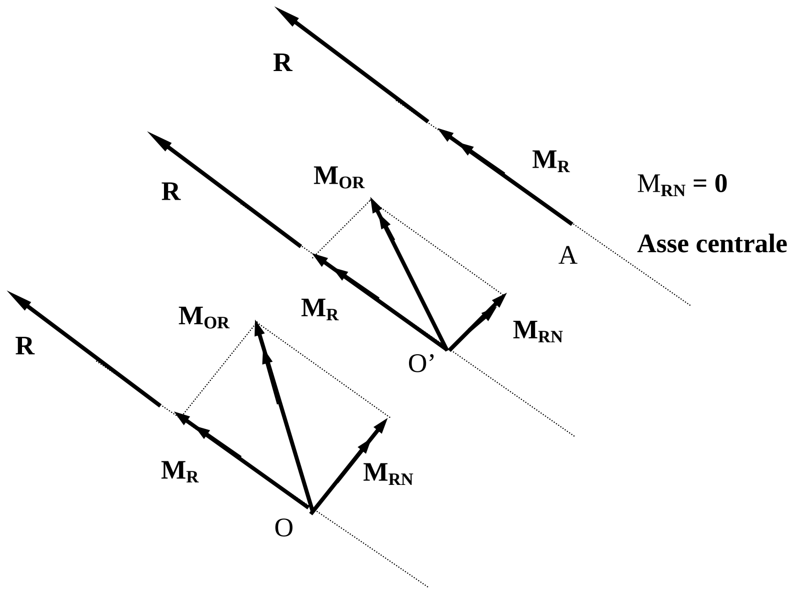
quindi la componente nella direzione di **R** del momento rispetto ad un polo qualsiasi è costante.
L'invariante scalare è nullo se $\mathbf{R} = 0$, o se $\mathbf{M}_O \perp \mathbf{R}$.
Nel caso di sistemi piani di vettori l'invariante scalare è nullo.

<u>ASSE CENTRALE</u> - INVARIANTE SCALARE DEL SISTEMA DIVERSO DA ZERO

Si consideri un sistema di n vettori $\mathbf{v}_i$ non complanari applicati nei punti P_i, la cui riduzione al polo O, fornisce il risultante **R** ed il Momento risultante $\mathbf{M}_{OR}$:
Se il sistema ammette l'invariante scalare diverso da zero, i vettori **R** ed $\mathbf{M}_{OR}$ non risultano perpendicolari. Il vettore $\mathbf{M}_{OR}$ (Momento risultante rispetto al polo O) può essere scomposto in due vettori: $\mathbf{M}_R$ parallelo ad **R** ed $\mathbf{M}_{RN}$ ortogonale ad **R**. Il vettore $\mathbf{M}_R$ diretto nella direzione di **R** è costante qualsiasi sia il polo e costituisce il già citato Invariante scalare, invece il vettore $\mathbf{M}_{RN}$ perpendicolare alla direzione di **R** varia cambiando il polo.
Spostando la retta di azione di **R** esisterà una posizione nella quale la componente $\mathbf{M}_{RN}$ si annulla. In questa posizione la retta è denominata *Asse Centrale del Sistema*.



Quindi l'Asse centrale è il luogo dei punti rispetto ai quali il sistema di vettori si riduce al risultante **R** ed ad un momento risultante $\mathbf{M}_R$ parallelo alla direzione di **R**, che è anche il minimo possibile.



In altre parole sull'asse centrale il sistema si riduce ad un vettore **R** più una coppia, di momento $\mathbf{M}_R$, che giace su un piano ad esso perpendicolare.

$$\mathbf{M}_{OR} = \mathbf{M}_R + \mathbf{M}_{RN} = \text{INVARIANTE}$$

L'Invariante scalare può assumere i seguenti valori:

$I \neq 0$ Sistema spaziale di vettori.
$\mathbf{M}_{OR} \perp \mathbf{R}$ Risultante e momento risultante sono ortogonali. Vettori paralleli o concorrenti.

$I=0$ $\mathbf{R}=0$ Il sistema è costituito da una coppia.
$\mathbf{M}_{OR}=0$ e $\mathbf{R}=0$ Sistema equilibrato.

RICERCA ANALITICA DELL'ASSE CENTRALE

Se il sistema di vettori ammette l'invariante scalare diverso da zero, si può ricavare l'equazione dell'asse centrale nel modo seguente. Essendo **R** il Risultante del sistema ed $\mathbf{M}_{OR}$ il Momento Risultante rispetto all'origine degli assi cartesiani di riferimento, si ha:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i \qquad\qquad \mathbf{M}_{OR} = \sum_{i=1}^{n} M_{Oi}$$

Assumendo che A $(x_A;y_A;z_A)$ sia un punto generico dell'asse centrale, il momento risultante rispetto ad A può esprimersi con la formula della trasposizione del polo:

$$\mathbf{M}_{AR} = \mathbf{M}_{OR} + (O - A) \wedge \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} M_{ORx} \\ M_{ORy} \\ M_{ORz} \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & z_A & -y_A \\ -z_A & 0 & x_A \\ y_A & -x_A & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix}$$

Le componenti del momento sono:

$$\mathbf{M}_{AR} = \begin{Bmatrix} M_{ARx} \\ M_{ARy} \\ M_{ARz} \end{Bmatrix}$$

Se A appartiene all'asse centrale, il vettore $\mathbf{M}_{AR}$ deve essere parallelo ad **R**. La condizione di parallelismo tra due vettori comporta la proporzionalità tra le componenti secondo gli assi cartesiani, cioè:

$$\frac{M_{ARx}}{R_x} = \frac{M_{ARy}}{R_y} = \frac{M_{ARz}}{R_z}$$

Quindi si ha:

$$\frac{M_{ARx}}{R_x} = \frac{M_{ARy}}{R_y} \qquad\qquad \frac{M_{ARx}}{R_x} = \frac{M_{ARz}}{R_z}$$

Ciascuna delle due equazioni rappresenta un piano e la retta d'intersezione dei due piani è l'asse centrale, poiché contiene punti che soddisfano entrambe le relazioni. Sull'asse centrale il sistema si riduce al Risultante ed al minimo Momento Risultante.

ASSE CENTRALE - INVARIANTE SCALARE NULLO

Quando l'invariante scalare è nullo

$$I = \mathbf{M}_O \times \mathbf{R} = 0$$

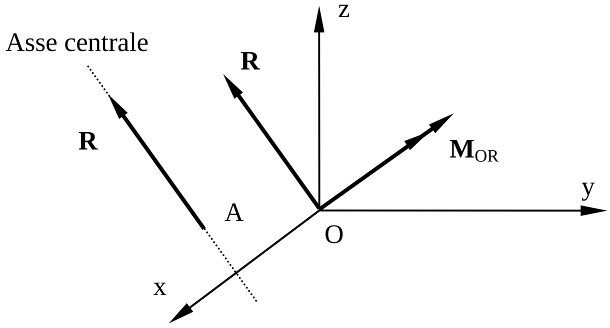
si possono avere due casi:

a) $\mathbf{R}=0$ (il Risultante è nullo)

Il sistema di vettori si riduce ad una coppia e non esiste l'asse centrale.

b) $\mathbf{M}_{OR} \perp \mathbf{R}$ ($\mathbf{M}_{OR}$ ed **R** sono perpendicolari)

L'ortogonalità tra $\mathbf{M}_{OR}$ e $\mathbf{R}$ si verifica quando il sistema di vettori è costituito da vettori che agiscono tutti in un piano (complanari), il sistema è costituito da vettori nello spazio paralleli, il sistema è costituito da vettori concorrenti in un punto.
La proiezione di $\mathbf{M}_{OR}$ sull'asse centrale è nulla, quindi, il momento risultante del sistema rispetto a qualsiasi punto dell'asse centrale è nullo: $\mathbf{M}_{AR}=0$. Il sistema si riduce al solo vettore risultante $\mathbf{R}$ nell'asse centrale.



Ricaviamo ora l'equazione dell'asse centrale nel caso che il Momento Risultante ed il Risultante del sistema di vettori siano perpendicolari. Essendo $A(x_A;y_A;z_A)$ un punto generico dell'asse centrale e applicando l'espressione vettoriale della trasposizione del polo risulta:

$$\mathbf{M}_{AR} = \mathbf{M}_{OR} + (O - A) \wedge \mathbf{R}$$

Le componenti del vettore (O-A) e quindi il prodotto vettoriale $(O - A) \wedge \mathbf{R}$ sono:

$$(O-A)=\begin{Bmatrix} -x_A \\ -y_A \\ -z_A \end{Bmatrix} \qquad (O-A)\wedge\vec{R}=\begin{vmatrix} 0 & z_A & -y_A \\ -z_A & 0 & x_A \\ y_A & -x_A & 0 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} z_A R_y - y_A R_z \\ -z_A R_x + x_A R_z \\ y_A R_x - x_A R_y \end{Bmatrix}$$

Inoltre si ha:

$$\mathbf{M}_{OR} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{Oi} \qquad \mathbf{M}_{Oi} = \begin{vmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{vmatrix}\begin{Bmatrix} v_{xi} \\ v_{yi} \\ v_{zi} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{M}_{OR} = \begin{Bmatrix} M_{oRx} \\ M_{oRy} \\ M_{oRz} \end{Bmatrix}$$

Quindi si ha:

$$M_{ARx} = M_{ORx} + (z_A R_y - y_A R_z)$$
$$M_{ARy} = M_{ORy} + (x_A R_z - z_A R_x)$$
$$M_{ARz} = M_{ORz} + (y_A R_x - x_A R_y)$$

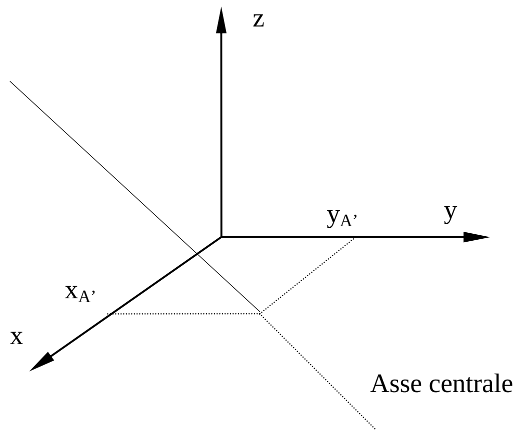
Se si pone $z_A=0$ dalle prime due equazioni si ottiene:

$$M_{ORx} - y_A R_z = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{A'} = \frac{M_{ORx}}{R_z}$$

$$M_{ORy} + x_A R_z = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{A'} = -\frac{M_{ORy}}{R_z}$$

Nel punto $A'(x_{A'};y_{A'};0)$ l'asse centrale attraversa il piano xy. Essendo $A'(x_{A'};y_{A'};0)$ un punto dell'asse centrale, l'equazione dell'asse risulta:

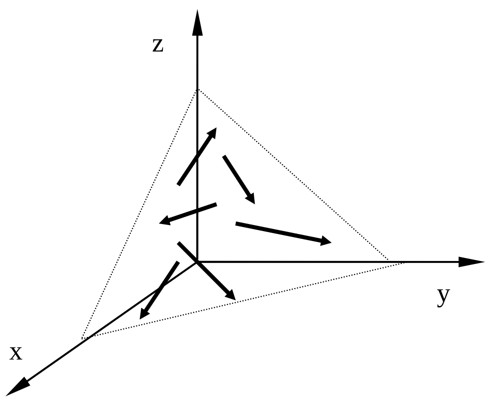
$$\frac{x - x_{A'}}{R_x} = \frac{y - y_{A'}}{R_y} = \frac{z}{R_z}$$

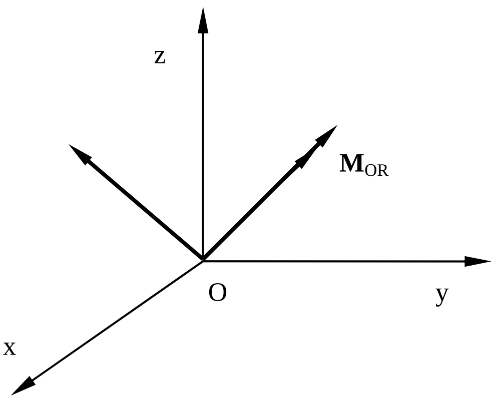


VETTORI COMPLANARI

Se tutti i vettori sono complanari il momento di trasporto di ciascun vettore rispetto al polo O sarà perpendicolare al piano, perciò anche il momento risultante $\mathbf{M}_{OR}$ del sistema di vettori sarà perpendicolare al piano e quindi al risultante **R**. L'invariante scalare risulta nullo e quindi sono applicabili le precedenti considerazioni sull'asse centrale.

Il sistema dato può essere ridotto al polo O. I vettori momento di trasporto corrispondenti a ciascun vettore sono tutti perpendicolari al piano e quindi anche il loro momento risultante è ortogonale al piano su cui giacciono i vettori. Il sistema viene quindi ridotto al risultante **R** applicato in O e al momento risultante $\mathbf{M}_{OR}$. Il sistema si può quindi ridurre al solo vettore risultante **R** applicato in un qualsiasi punto dell'asse centrale, in quanto essendo perpendicolari il momento risultante $\mathbf{M}_{OR}$ ed il risultante sarà nulla la componente $\mathbf{M}_{R}$ del momento parallela ad **R**. Il sistema risulta quindi ridotto alla minima espressione, cioè un solo vettore che agisce lungo l'asse centrale. Il risultante applicato in un punto qualsiasi dell'asse centrale provoca sul corpo rigido gli stessi effetti meccanici causati dal sistema dato.

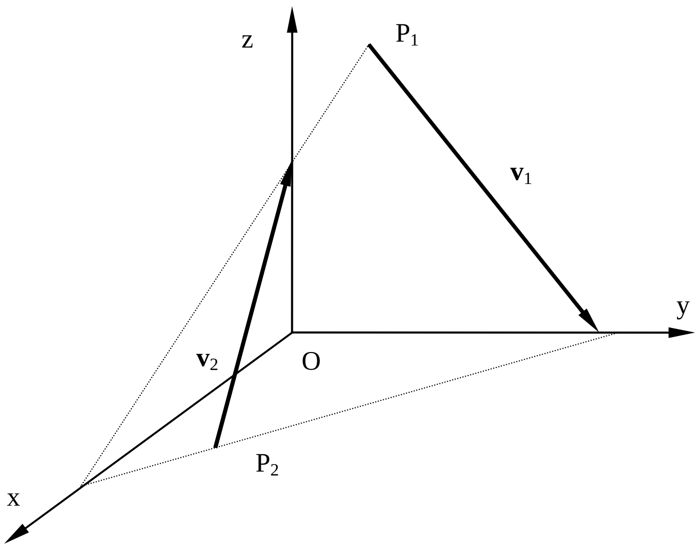




<u>Applicazione</u>

Dati due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ applicati rispettivamente in $P_1(-1;0;6)$ e $P_2(4;1;0)$ e contenuti nel piano $x+y+z-5=0$ si determini l'equazione dell'asse centrale.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{Bmatrix}$$



Calcolo del vettore Risultante: $\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{Bmatrix}$

Calcolo del Momento Risultante rispetto al polo O: $\mathbf{M}_{OR} = \mathbf{M}_{O1} + \mathbf{M}_{O2}$

$$\mathbf{M}_{O1} = \begin{vmatrix} 0 & -z_1 & y_1 \\ z_1 & 0 & -x_1 \\ -y_1 & x_1 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ v_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -30 \\ 0 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{O2} = \begin{vmatrix} 0 & -z_2 & y_2 \\ z_2 & 0 & -x_2 \\ -y_2 & x_2 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ v_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ -20 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{OR} = \begin{Bmatrix} -30 \\ 0 \\ -5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 5 \\ -20 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -25 \\ -20 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

Poiché: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \Rightarrow I = \mathbf{M}_{OR} \times \mathbf{R} = (-3)(-25) + (4)(-20) + (-1)(-5) = 0$
Essendo:
$\mathbf{R} \neq 0$ $\quad \mathbf{M}_{OR} \neq 0 \;\Rightarrow\; \quad I = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{M}_{OR} \perp \mathbf{R}$
Si può determinare il punto A'($x_{A'}$;$y_{A'}$; 0):

$$y_{A'} = \frac{M_{ORx}}{R_z} = \frac{-25}{-1} = 25 \qquad\qquad x_{A'} = \frac{-M_{ORy}}{R_z} = \frac{20}{-1} = -20$$

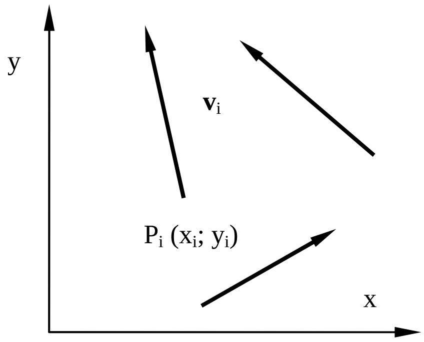
L'equazione dell'asse centrale è:

$$\frac{x - x_{A'}}{R_x} = \frac{y - y_{A'}}{R_y} = \frac{z}{R_z} \qquad\qquad \frac{x+20}{-3} = \frac{y-25}{4} = \frac{z}{-1}$$

Le coordinate del punto A' soddisfano l'equazione del piano x+y+z-5=0, quindi anche l'asse centrale è contenuto nel piano dove giace il sistema di vettori assegnato.

SISTEMI PIANI DI VETTORI

Si considera un sistema piano di n vettori $\mathbf{v}_i$ applicati nei punti $P_i(x_i;\ y_i)$:



Essendo un sistema piano $\mathbf{M}_{OR} \perp \mathbf{R}$ (il Momento Risultante rispetto all'origine risulta perpendicolare al Risultante), quindi l'Invariante scalare è nullo: $I = \mathbf{M}_{OR} \times \mathbf{R} = 0$.

Allora dobbiamo trovare l'asse centrale in modo diverso dal metodo generale.

Sia $A(x_A;\ y_A)$ un generico punto dell'asse centrale, il momento risultante $\mathbf{M}_{AR}$ rispetto ad un punto dell'asse centrale è nullo. Considerando l'espressione della trasposizione del polo, risulta:

$$\mathbf{M}_{AR} = \mathbf{M}_{OR} + (O - A) \wedge \mathbf{R}$$

ricordando che per un sistema piano di vettori $\mathbf{u}\ \{u_x;\ u_y\}$e $\mathbf{v}\ \{v_x;\ v_y\}$si ha:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = (u_x v_y - v_x u_y)\mathbf{k} \qquad \text{oppure } \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -u_y & u_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \{u_x v_y - v_x u_y\}$$

nel nostro caso avremo:

$$\mathbf{M}_{OR} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} -y_i & x_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \{x_i v_{iy} - y_i v_{ix}\}$$

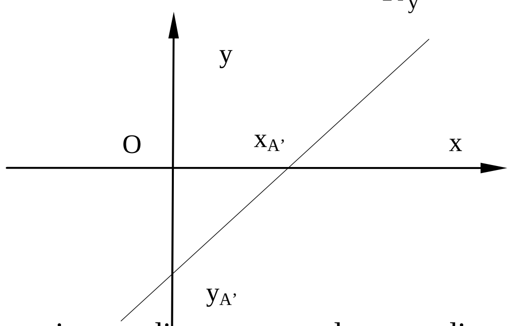
$$(O - A) = \begin{Bmatrix} -x_A \\ -y_A \end{Bmatrix} \qquad (O - A) \wedge \mathbf{R} = \begin{bmatrix} y_A & -x_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} = \{y_A R_x - x_A R_y\}$$

quindi:

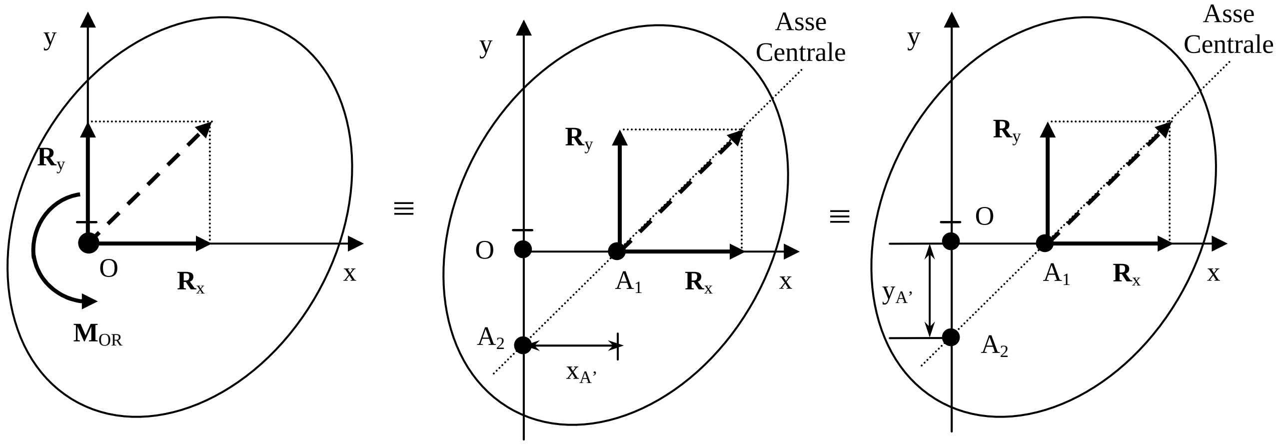
$M_{OR} + y_A R_x - x_A R_y = 0$ è l'Equazione dell'Asse Centrale

le intersezioni con gli assi sono $x_{A'}$ ed $y_{A'}$ determinare dalle seguenti espressioni:

Se $x_A=0 \Rightarrow y_{A'} = \dfrac{-M_{OR}}{R_x}$ Se $y_A=0 \Rightarrow x_{A'} = \dfrac{M_{OR}}{R_y}$



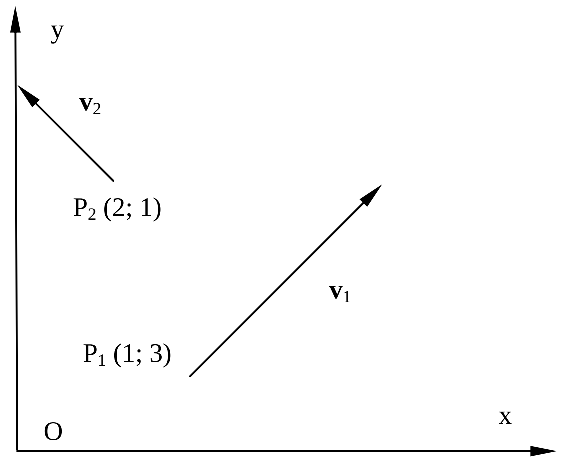
E' possibile quindi determinare direttamente le coordinate $x_{A'}$ e $y_{A'}$ corrispondenti all'intersezione dell'asse centrale con gli assi cartesiani x e y rispettivamente, considerando che il momento risultante del sistema $\mathbf{M}_{OR}$ deve essere uguale al momento rispetto ad O della componente $\mathbf{R}_y$ quando $\mathbf{R}$ è applicato in $A_1(x_{A'},0)$ e uguale al momento $\mathbf{R}_x$ quando $\mathbf{R}$ è applicato in $A_2(0,\ y_{A'})$.



Nel sistema piano di vettori il sistema può essere ridotto al solo Risultante applicato in un qualsiasi punto dell'asse centrale e come caso particolare può ottenersi una coppia risultante o che il sistema sia nullo.

Applicazione: (Asse Centrale nel piano)
Dati due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ applicati rispettivamente in $P_1\,(2\,;\,1)$ e $P_2\,(1\,;\,3)$, determinare l'equazione dell'asse centrale del sistema:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{M}_{O1} = \begin{bmatrix} -y_1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \{2\}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{O2} = \begin{bmatrix} -y_2 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \{4\}$$

$$\mathbf{M}_{OR} = \{2\} + \{4\} = \{6\}$$

$M_{AR} = M_{OR} + y_A R_x - x_A R_y = 0$

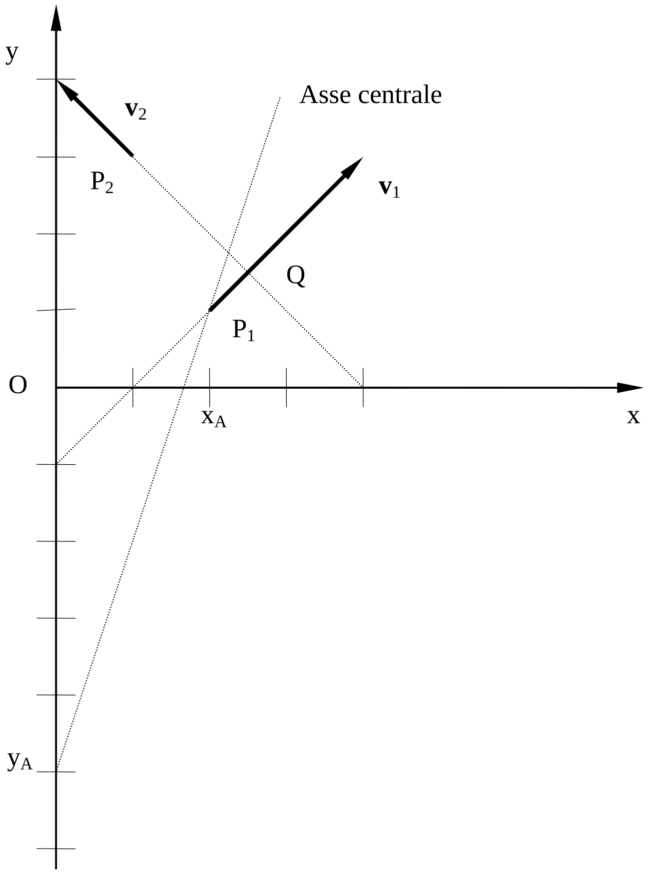
$y_A - 3\,x_A + 6 = 0$ Equazione Asse Centrale

Per $x_A = 0 \Rightarrow y_{A'} = -6$ Per $y_A = 0 \Rightarrow x_{A'} = 2$

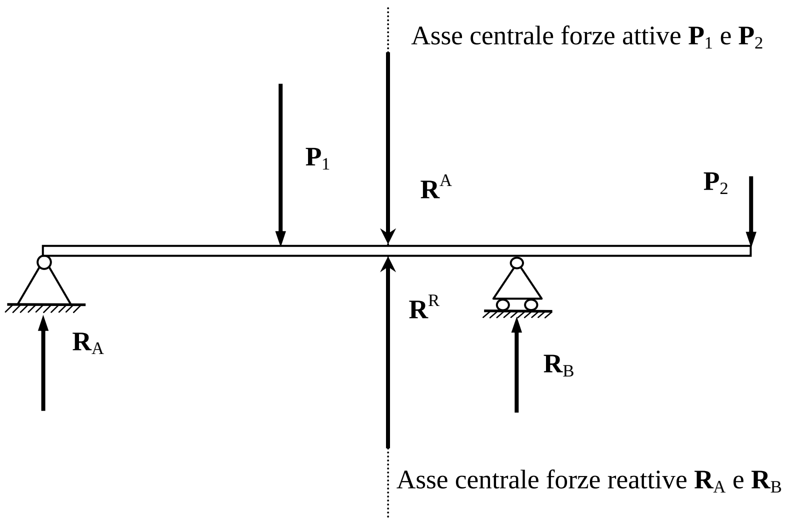
La retta d'azione del vettore $\mathbf{v}_1$ è: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} \Rightarrow y = x - 1$

La retta d'azione del vettore $\mathbf{v}_2$ è: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-3}{1} \Rightarrow y = -x + 4$

Il punto d'intersezione fra le due rette Q(5/2; 3/2), soddisfa l'equazione dell'asse centrale $y_A=3x_A-6$.



Consideriamo ora il caso che il sistema di vettori sia un sistema di forze applicate ad un corpo rigido. In un sistema equilibrato, cioè quando $\mathbf{M}_{OR} = 0$ e $\mathbf{R} = 0$, l'asse centrale non esiste. Tuttavia è possibile distinguere l'asse centrale del sistema di forze attive e l'asse centrale del sistema di forze reattive, che devono necessariamente devono essere coincidenti.



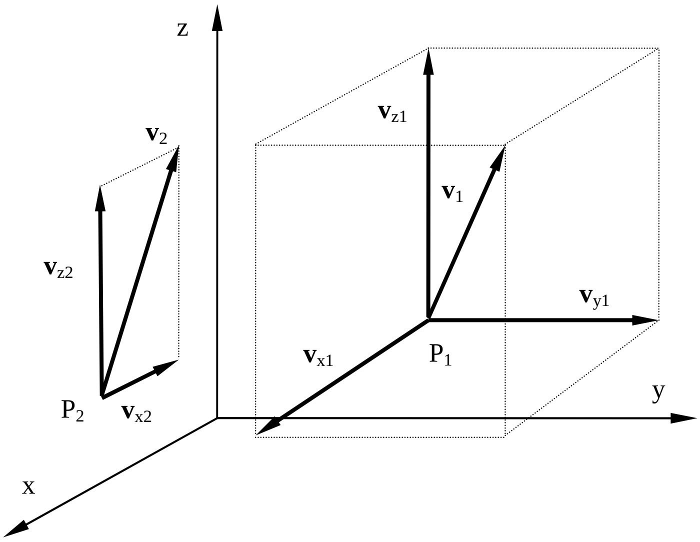
$\mathbf{R}^A = -\mathbf{R}^R$ Assi centrali coincidenti. Sistema equilibrato.

ESERCIZI SUI VETTORI APPLICATI

Esercizio n. 1

Dato il sistema formato dai due vettori $\mathbf{v}_1 = \{2; 2; 3\}$ applicato nel punto $P_1(0;2;1)$ e $\mathbf{v}_2 = \{-1; 0; 2\}$ applicato nel punto $P_2(3;1;2)$, determinare:

1) Il vettore Risultante;
2) Il Momento rispetto all'origine O;
3) Il Momento rispetto al punto O'(3;1;1);
4) L'Asse centrale del sistema.



1) Determinazione del Risultante:

$$\mathbf{R} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

modulo del Risultante: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{1 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{30}$

Noto il modulo e le componenti si trovano i coseni direttori del Risultante:

$$\begin{cases} \alpha_R = \dfrac{R_x}{R} = \dfrac{1}{\sqrt{30}} = 0.1826 \\ \beta_R = \dfrac{R_y}{R} = \dfrac{2}{\sqrt{30}} = 0.3651 \\ \gamma_R = \dfrac{R_z}{R} = \dfrac{5}{\sqrt{30}} = 0.9129 \end{cases}$$

$$\alpha_R^2 + \beta_R^2 + \gamma_R^2 = 0.1826^2 + 0.3651^2 + 0.9129^2 \cong 1$$

2) Calcolo del Momento rispetto all'origine O:

Il Momento Risultante di un sistema di vettori applicati rispetto ad un punto O è la somma vettoriale dei vettori momento di ciascun vettore del sistema rispetto allo stesso punto O, cioè:

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \mathbf{v}_i = (P_1 - O) \wedge \mathbf{v}_1 + (P_2 - O) \wedge \mathbf{v}_2$$

$$(P_1 - O) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}; (P_2 - O) = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k})+(2\mathbf{i}-8\mathbf{j}+\mathbf{k}) = 6\mathbf{i}-6\mathbf{j}-3\mathbf{k} \qquad \mathbf{M}_O = \begin{Bmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

2*) Il calcolo del Momento Risultante si può fare anche mediante l'espressione che fornisce le componenti del momento di ciascun vettore rispetto al polo O:

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \mathbf{v}_i = \begin{Bmatrix} M_{Oix} \\ M_{Oiy} \\ M_{Oiz} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{iz} \end{Bmatrix}$$

nel caso in esame:

$$\mathbf{M}_{O1} = \begin{Bmatrix} M_{O1x} \\ M_{O1y} \\ M_{O1z} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M}_{O2} = \begin{Bmatrix} M_{O2x} \\ M_{O2y} \\ M_{O2z} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -8 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O1} + \mathbf{M}_{O2} = \begin{Bmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

3) Determinazione del Momento Risultante rispetto al polo O'(3;1;1):
Il Momento Risultante rispetto al polo O' è la somma vettoriale di tutti i vettori momento dei singoli vettori rispetto ad O':

$$\mathbf{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O') \wedge \mathbf{v}_i = (P_1 - O') \wedge \mathbf{v}_1 + (P_2 - O') \wedge \mathbf{v}_2 \qquad (P_1 - O') = \begin{Bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; (P_2 - O') = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{O'} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (3\mathbf{i}+8\mathbf{j}-8\mathbf{k})+(-8\mathbf{k}) = 3\mathbf{i}+8\mathbf{j}-8\mathbf{k} \qquad \mathbf{M}_{O'} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 8 \\ -8 \end{Bmatrix}$$

3*) Il Momento Risultante rispetto al polo O' si può anche determinare con la nota formula di trasposizione, si ha quindi:

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + (O - O') \wedge \mathbf{R} = \qquad \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{M}_O = \begin{Bmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{Bmatrix} \qquad (O - O') = \begin{Bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Quindi,

$$\mathbf{M}_{O'} = (6\mathbf{i}-6\mathbf{j}-3\mathbf{k}) + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (6\mathbf{i}-6\mathbf{j}-3\mathbf{k}) + (-3\mathbf{i}+14\mathbf{j}-5\mathbf{k}) = 3\mathbf{i}+8\mathbf{j}-8\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_{O'} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 8 \\ -8 \end{Bmatrix}$$

chiaramente il vettore Momento Risultante rispetto al Polo O’ è uguale a quello ottenuto nel procedimento 3).

4) Determinazione dell’Asse Centrale del sistema:
Il Momento Risultante rispetto ad un generico punto A(X_A; Y_A; Z_A) è uguale a:

$$\mathbf{M}_{AR} = \sum_{i=1}^{n} (P_i - A) \wedge \mathbf{v}_i = (P_1 - A) \wedge \mathbf{v}_1 + (P_2 - A) \wedge \mathbf{v}_2 \qquad \mathbf{M}_{AR} = \begin{Bmatrix} M_{ARx} \\ M_{ARy} \\ M_{ARz} \end{Bmatrix}$$

$$(P_1 - A) = \begin{Bmatrix} 0 - x_A \\ 2 - y_A \\ 1 - z_A \end{Bmatrix}; \qquad (P_2 - A) = \begin{Bmatrix} 3 - x_A \\ 1 - y_A \\ 2 - z_A \end{Bmatrix}$$

Quindi si ha:

$$\mathbf{M}_{AR} = \begin{Bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ (0 - x_A) & (2 - y_A) & (1 - z_A) \\ 2 & 2 & 3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ (3 - x_A) & (1 - y_A) & (2 - z_A) \\ -1 & 0 & 2 \end{Bmatrix} =$$

$$= (-5y_A + 2z_A + 6)\mathbf{i} + (5x_A - z_A - 6)\mathbf{j} + (-2x_A + y_A - 3)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_{AR} = \begin{Bmatrix} M_{ARx} \\ M_{ARy} \\ M_{ARz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5y_A + 2z_A + 6 \\ 5x_A - z_A - 6 \\ -2x_A + y_A - 3 \end{Bmatrix}$$

se il punto A(x_A; y_A; z_A) appartiene all’asse centrale, il vettore $\mathbf{M}_{AR}$ (Momento Risultante rispetto ad A) deve essere parallelo al vettore Risultante **R**.
La condizione di parallelismo significa che le componenti di $\mathbf{M}_{AR}$ e di **R** devono essere proporzionali:

$$\frac{M_{ARx}}{R_x} = \frac{M_{ARy}}{R_y} = \frac{M_{ARz}}{R_z} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(-5y_A + 2z_A + 6)}{1} = \frac{(5x_A - z_A - 6)}{2} = \frac{(-2x_A + y_A - 3)}{5}$$

da cui si ricavano le equazioni di due piani che contengono A e la cui intersezione rappresenta l’Asse centrale del sistema:

a) $\frac{M_{ARx}}{R_x} = \frac{M_{ARy}}{R_y} \Rightarrow \frac{(-5y_A + 2z_A + 6)}{1} = \frac{(5x_A - z_A - 6)}{2} \Rightarrow x_A + 2y_A - z_A - \frac{18}{5} = 0$

b) $\frac{M_{ARx}}{R_x} = \frac{M_{ARz}}{R_z} \Rightarrow \frac{(-5y_A + 2z_A + 6)}{1} = \frac{(-2x_A + y_A - 3)}{5} \Rightarrow x_A - 13y_A + 5z_A + \frac{33}{2} = 0$

la retta intersezione dei piani a) e b) contiene punti che soddisfano le due equazioni ed è quindi l’Asse centrale del sistema costituito dai due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$:

c) $\begin{cases} x_A + 2y_A - z_A - \dfrac{18}{5} = 0 \\ x_A - 13y_A + 5z_A + \dfrac{33}{2} = 0 \end{cases}$ Asse centrale

l'equazione della retta d'intersezione dei due piani si può determinare conoscendo due punti della stessa.

1) Assegnando un valore z_{A1}=0 nel sistema c) si ha:

x_{A1}= 0.92 y_{A1}=1.34 $\Rightarrow$ A_1 (0.92; 1.34; 0) punto dell'Asse centrale

2) Assegnando un valore y_{A2}=0 nel sistema c) si ha:

x_{A2}=0.25 z_{A2}=-3.35 $\Rightarrow$ A_2 (0.25; 0; -3.35) punto dell'Asse centrale

l'equazione della retta passante per A_1 ed A_2 è:

$$\frac{x - x_{A1}}{x_{A2} - x_{A1}} = \frac{y - y_{A1}}{y_{A2} - y_{A1}} = \frac{z - z_{A1}}{z_{A2} - z_{A1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x - 0.92}{0.25 - 0.92} = \frac{y - 1.34}{-1.34} = \frac{z}{-3.35} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x - 0.92}{-0.67} = \frac{y - 1.34}{-1.34} = \frac{z}{-3.35}$$

quest'ultima equazione rappresenta l'equazione dell'Asse centrale.

Allo stesso risultato si può pervenire considerando l'equazione della retta d'intersezione dei due piani, come la retta passante per un punto A_1(0.92; 1.34; 0) e parallela alla direzione del Risultante.

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{Bmatrix} \qquad \frac{x - x_1}{R_x} = \frac{y - y_1}{R_y} = \frac{z - z_1}{R_z} \Rightarrow \frac{x - 0.92}{1} = \frac{y - 1.34}{2} = \frac{z}{5}$$

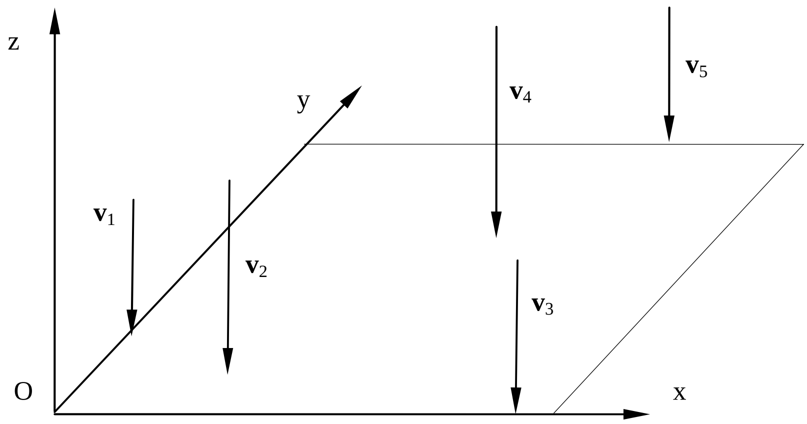
Esercizio n. 2

Dato un sistema piano di vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_5$, rappresentanti forze applicate ad un corpo rigido, ed applicati rispettivamente nei punti P_1(0; 1), P_2(1.5; 0.5), P_3(7; 0), P_4(4; 3), P_5(5; 5), determinare:

1) Riduzione al polo O del sistema di vettori;

2) Asse centrale del sistema.

$\mathbf{v}_1 = -3.5\ \mathbf{k}$
$\mathbf{v}_2 = -6\ \mathbf{k}$
$\mathbf{v}_3 = -4\ \mathbf{k}$
$\mathbf{v}_4 = -7.5\ \mathbf{k}$
$\mathbf{v}_5 = -3\ \mathbf{k}$



1)Riduzione di un sistema di vettori al Risultante **R** più una coppia risultante $\mathbf{M}_O$.

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i \qquad \mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge \mathbf{v}_i$$

Vettori (P_i-O):

(P_1-O) = 0**i** + 1**j**

$(P_2\text{-}O) = 1.5\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j}$
$(P_3\text{-}O) = 7\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$
$(P_4\text{-}O) = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
$(P_5\text{-}O) = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -24 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{M}_O = \begin{Bmatrix} -44 \\ 82 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2) Determinazione dell'Asse centrale del sistema:
Essendo $\mathbf{R}$ ortogonale ad $\mathbf{M}_O$, il momento del sistema rispetto ad un punto dell'asse centrale è nullo.
L'intero sistema si riduce al solo vettore risultante $\mathbf{R}$ nell'asse centrale.
Se il punto $A(x_A; y_A)$ appartiene all'asse centrale si ha:

$$\mathbf{M}_{AR} = \mathbf{M}_{OR} + (O - A) \wedge \mathbf{R} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (O - A) \wedge \mathbf{R} = -\mathbf{M}_{OR}$$

per cui in funzione delle componenti del vettore (O-A), del Risultante e del Momento Risultante rispetto al polo O si ha:

$$(O - A) = \begin{Bmatrix} -x_A \\ -y_A \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -24 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M}_{OR} = \begin{Bmatrix} -44 \\ 82 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(O - A) \wedge \mathbf{R} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -x_A & -y_A & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{vmatrix} = 24y_A\mathbf{i} - 24x_A\mathbf{j} \qquad \Rightarrow \qquad 24y_A\mathbf{i} - 24x_A\mathbf{j} = 44\mathbf{i} - 82\mathbf{j}$$

da cui si ricavano i valori x_A e y_A del punto in cui l'asse centrale incontra il piano xy:

$$24y_A = 44 \Rightarrow y_A = \frac{44}{24} = 1.833 \qquad \Rightarrow \qquad -24x_A = -82 \Rightarrow x_A = \frac{82}{24} = 3.417$$

si osservi che:

$$x_A = -\frac{M_{Oy}}{R_z} \qquad y_A = \frac{M_{Ox}}{R_z}$$