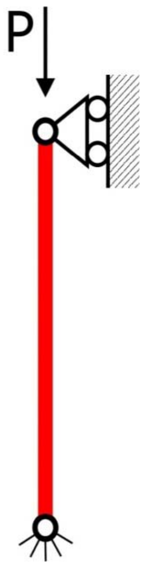
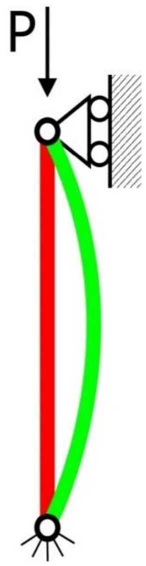
Appendice: Instabilità dell’equilibrio in aste compresse

COLLASSO DI UNA TRAVE SOGGETTA A CARICO ASSIALE





Esaurimento della resistenza
del materiale:
$P_0 = A\sigma_0$

area sezione
dell'asta

sforzo limite
del materiale

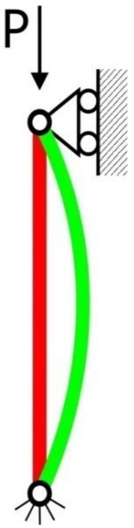
Instabilità della struttura:
incapacità di sostenere i carichi
assegnati senza incorrere in un
cambiamento improvviso di
configurazione per perdita di
rigidezza flessionale

STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO

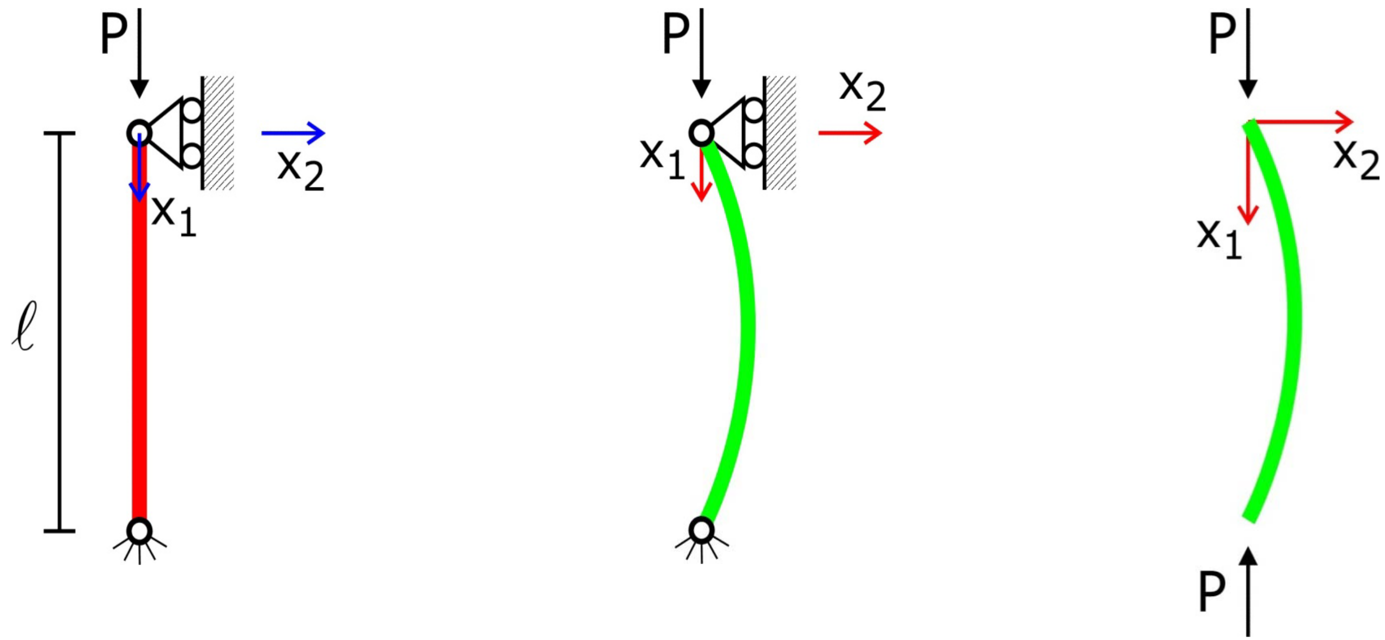
Una configurazione di equilibrio è:

Stabile se dopo piccole perturbazioni la struttura ritorna nella configurazione di partenza;

Instabile se perturbazioni piccole causano l'allontanamento dalla configurazione di partenza.

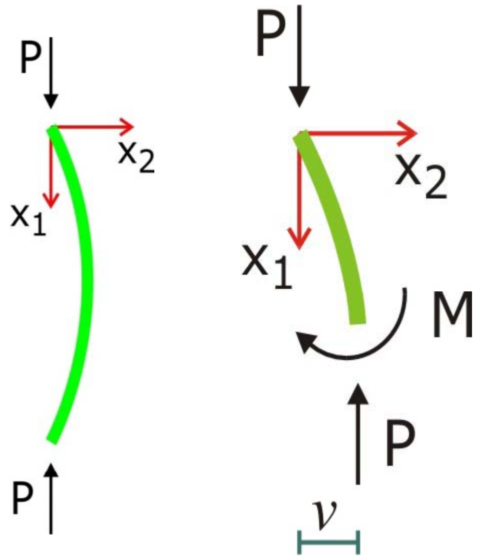


CARICO CRITICO EULERIANO DI ASTE COMPRESSE



Noi siamo interessati solo al valore del carico per cui è possibile che la struttura si atteggi secondo una configurazione di equilibrio deformata. Abbiamo visto prima che questo può essere ottenuto:

1. Imponendo l ’equilibrio nella configurazione deformata,



$$M = Pv$$

2. linearizzando le relazioni geometriche. E quindi per quanto riguarda le equazioni di congruenza queste sono le stesse già viste a proposito della teoria delle travi. Per cui:

$$\left.\begin{array}{l} \chi = -v'' \\ M = EI\chi \end{array}\right\} \rightarrow \quad EIv'' = -M$$

Sostituendo si ottiene:

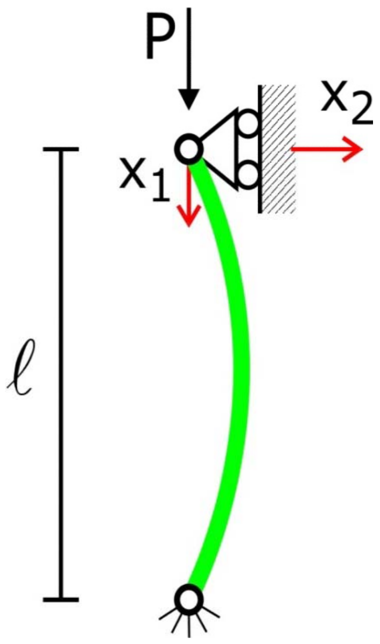
$$EIv'' + Pv = 0$$

Ponendo $\alpha^2 = \dfrac{P}{EI}$ si ottiene:

$$v'' + \alpha^2 v = 0$$

$$c.c. \begin{cases} x_1 = 0, \quad v = 0 \\ x_1 = \ell, \quad v = 0 \end{cases}$$

Da cui si ottiene la seguente soluzione:



$$v(x_1) = A\sin\alpha x_1 + B\cos\alpha x_1$$

$$c.c.\quad \begin{cases} B = 0 \\ A\sin\alpha\ell = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A = 0 \quad \rightarrow \quad v(x_1) = 0 \\ \sin\alpha\ell = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha\ell = n\pi \quad \rightarrow \quad P = \dfrac{n^2\pi^2 EI}{\ell^2} \end{cases} \end{cases}$$

$$n = 1 \quad \rightarrow \quad P_E = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$ Carico Critico Euleriano

Osservazione: il valore del carico critico dipende da:

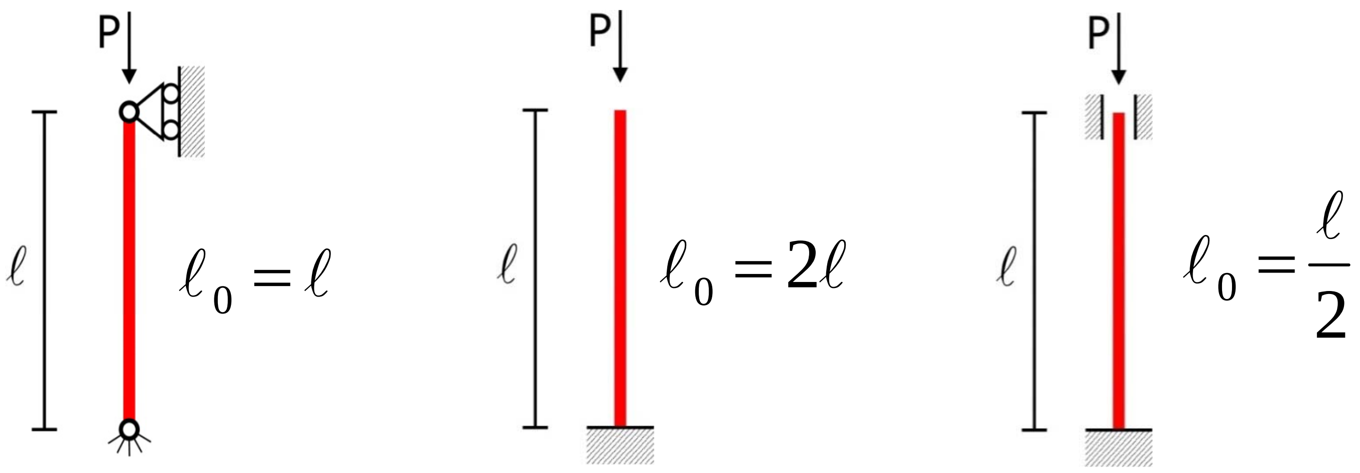
- Proprietà del materiale (E)
- Geometria della sezione (I)
- Lunghezza dell’asta (L);
- Condizioni di vincolo (c.c.)

In genere, il valore del carico critico euleriano si può esprimere come:

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2}$$

$\boxed{\ell_0}$

Lunghezza libera di inflessione (distanza tra due successivi flessi della deformata critica)



SFORZO CRITICO EULERIANO DI ASTE COMPRESSE

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{A l_0^2} = \frac{\pi^2 E \rho^2}{l_0^2}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$$

raggio d'inerzia
della sezione [L]

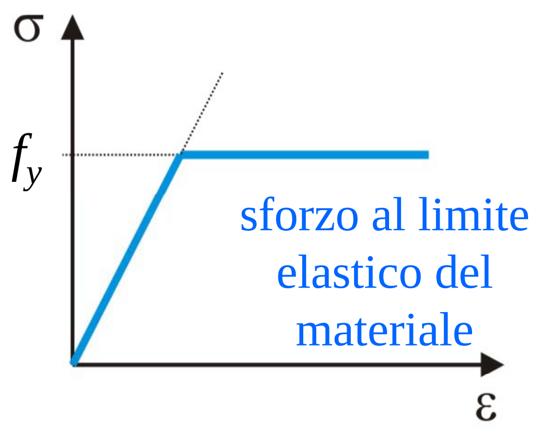
Definisco il parametro
snellezza

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Sforzo Critico
Euleriano

dipende da:
- condizioni di vincolo;
- proprietà geometriche della sezione;
- lunghezza dell'asta.

CURVA DI STABILITÀ



$$\sigma_E = f_y \quad \Rightarrow \quad f_y = \frac{\pi^2 E}{\lambda_p^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

Snellezza di transizione

$$\lambda \le \lambda_p \quad \Rightarrow \quad \sigma_{CR} = f_y$$

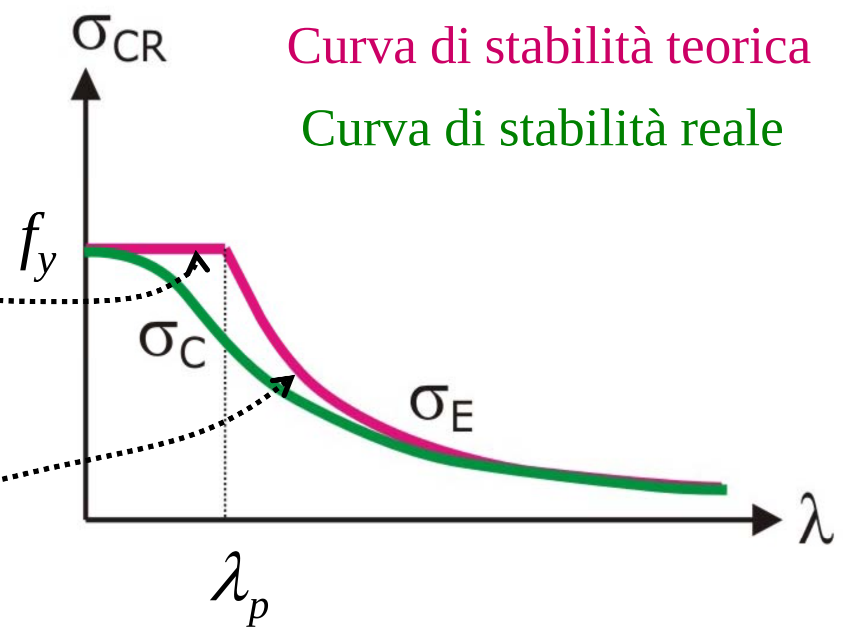
collasso per rottura del materiale

$$\lambda > \lambda_p \quad \Rightarrow \quad \sigma_{CR} = \sigma_E$$

collasso per instabilità dell’equilibrio

Curva di stabilità teorica

Curva di stabilità reale



Osservazioni:

- Nelle aste reali esistono sempre delle imperfezioni iniziali di tipo geometrico legate ad una non perfetta linearità e di tipo meccanico legate alla presenza di sforzi residui e distribuzione non omogenea delle proprietà meccaniche;

- Per effetto di queste imperfezioni i due fenomeni di plasticità ed instabilità si influenzano a vicenda facendo si che lo sforzo critico sia inferiore rispetto a quello predetto dalla curva di stabilità teorica; e tale penalizzazione è tanto più marcata quanto più siamo vicino alla snellezza di transizione;

- per questo motivo esistono delle curve di stabilità reale, che tengono conto di ciò e che danno in funzione della snellezza e del tipo di sezione il valore dello sforzo critico reale.