GEOMETRIA DELLE AREE

(Distillazione verticale)

OBIETTIVO: SAPERE CALCOLARE IL BARICENTRO DI UNA FIGURA PIANA COMPLESSA.

- Centro di forze parallele (def.)

- Baricentro (def.)

- Baricentro di una figura piana (def.)
  - baricentri segmento, quadrato,rettangolo
    - triangolo, trapezio, cerchio (appl.)
  - asse di simmetria (def.)
  - regole pratiche (descr.)

- Momento statico di una superficie rispetto ad un asse (def.)
  - unità di misura

- Coordinate del baricentro di figure piane complesse (appl.)
  - strategia di soluzione (descr.)

GEOMETRIA DELLE AREE - SCHEDA DI LEZIONE

CENTRO DI FORZE PARALLELE: è il punto di intersezione delle direzioni delle risultanti di forze parallele fatte ruotare intorno ai loro punti di applicazione.

BARICENTRO: è il centro di forze parallele le cui intensità rappresentano il peso del corpo.

BARICENTRO DI UNA FIGURA PIANA: è il centro di forze parallele le cui intensità rappresentano delle aree.

Baricentro SEGMENTO: è il punto medio del segmento.
Baricentro QUADRATO O RETTANGOLO: è il punto di intersezione delle diagonali.
Baricentro TRIANGOLO: è il punto di intersezione delle mediane.
Baricentro CERCHIO: coincide con il centro del cerchio.

ASSE DI SIMMETRIA: è l'asse che divide in due parti speculari la figura.

REGOLE PRATICHE: se la figura ha un asse di simmetria, il suo baricentro è un punto di tale asse; se la figura ha due o più assi di simmetria, il suo baricentro è il punto di intersezione di tali assi.

MOMENTO STATICO DI UNA SUPERFICIE RISPETTO AD UN ASSE: é la somma dei prodotti delle aree infinitesime (a_i) per le relative distanze dall'asse (d_i) , (le distanze tra aree e asse vanno prese perpendicolarmente all'asse).

$$S_t = \sum a_i \cdot d_i = a_1 \cdot d_1 + a_2 \cdot d_2 + a_3 \cdot d_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n \cdot d_n$$

Il momento statico può essere positivo, negativo o nullo e la sua unità di misura è quella di una lunghezza al cubo (m^3).
Per il teorema di Varignon, il momento statico è uguale al prodotto tra l'area della figura (A) e la distanza del suo baricentro dall'asse (d_t).

$$S_t = \sum a_i \cdot d_i = A \cdot d_t \quad \text{con} \begin{cases} A & \text{area della figura} \\ d_t & \text{distanza tra baricentro e asse} \end{cases} \qquad \Rightarrow$$

$$d_t = \frac{S_t}{A} \qquad \text{formula utile per il calcolo dei baricentri}$$

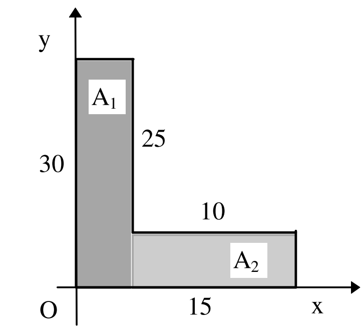
Il momento statico di una figura qualsiasi rispetto ad un <u>asse passante per il suo baricentro è sempre nullo</u> perché è nulla la distanza tra asse e baricentro.

STRATEGIA DI CALCOLO DELLE COORDINATE DEL BARICENTRO DI UNA FIGURA PIANA COMPLESSA:

1) si fissa un sistema di riferimento cartesiano arbitrario e si rappresenta nella figura;
2) si divide la figura in figure elementari di cui è nota la posizione del baricentro;
3) si calcolano le coordinate dei baricentri delle figure elementari rispetto al sistema di riferimento fissato e le aree delle figure elementari;
4) si calcolano le coordinate del baricentro della figura complessa rispetto al sistema di riferimento fissato: $\quad x_G = \dfrac{S_y}{\sum A_i} \quad ; \quad y_G = \dfrac{S_x}{\sum A_i}$
5) si segna sulla figura la posizione del baricentro $G \equiv (x_G , y_G)$.

ESERCIZI SUI BARICENTRI

Calcolare il baricentro della sezione a L rappresentata in figura (misure espresse in centimetri). Calcolare il baricentro di una figura complessa vuol dire calcolare le coordinate del baricentro rispetto ad un sistema di riferimento scelto arbitrariamente.

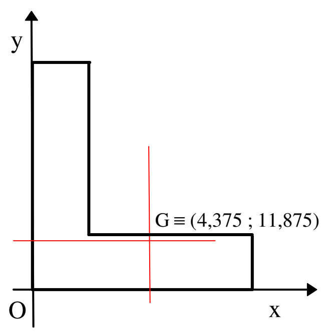


Si sceglie arbitrariamente il sistema di riferimento segnato in figura.
Si suddivide la figura nei due rettangoli (30 x 5) e (10 x 5) e si calcolano le aree e le coordinate dei loro baricentri rispetto al sistema di riferimento scelto.

$A_1 = 30 \times 5 = 150\ cm^2$ $\qquad G_1 \equiv (2{,}5\ ;\ 15)$

$A_2 = 10 \times 5 = 50\ cm^2$ $\qquad G_2 \equiv (10\ ;\ 2{,}5)$

Si calcolano le coordinate del baricentro della figura complessa con le formule $x_G = \dfrac{S_y}{\sum A_i}$; $y_G = \dfrac{S_x}{\sum A_i}$ essendo S_y e S_x i momenti statici delle figure elementari rispetto agli assi y ed x.

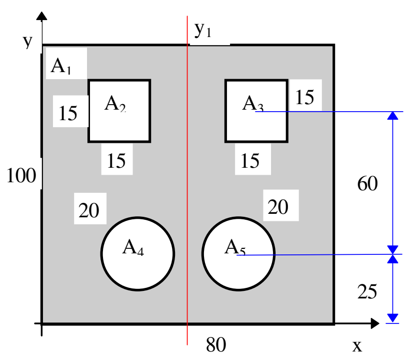


$$x_G = \frac{S_y}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot x_{G1} + A_2 \cdot x_{G2}}{A_1 + A_2} = \frac{150 \cdot 2{,}5 + 50 \cdot 10}{150 + 50} = 4{,}375\ cm$$

$$y_G = \frac{S_x}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_{G1} + A_2 \cdot y_{G2}}{A_1 + A_2} = \frac{150 \cdot 15 + 50 \cdot 2{,}5}{150 + 50} = 11{,}875\ cm$$

$G \equiv (4{,}375\ ;\ 11{,}875)$

Calcolare il baricentro della piastra forata rappresentata in figura (misure espresse in centimetri).



Si sceglie arbitrariamente il sistema di riferimento in figura.
Si suddivide la figura nel rettangolo (100 x 80), nei quadrati (di lato 15 cm), nei cerchi di diametro 20 cm e si calcolano le aree e le coordinate dei loro baricentri rispetto al sistema di riferimento scelto.

$A_1 = 100 \times 80 = 8000\ cm^2$ $\qquad G_1 \equiv (40\ ;\ 50)$

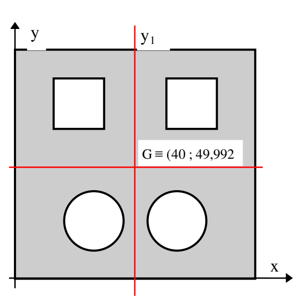
$A_2 = A_3 = 15 \times 15 = 225\ cm^2$ $\qquad G_2 \equiv (23\ ;\ 85)$

$G_3 \equiv (57\ ;\ 85)$

$A_4 = A_5 = 3{,}14 \times 10^2 = 314\ cm^2$ $\qquad G_4 \equiv (27\ ;\ 25)$

$G_5 \equiv (53\ ;\ 25)$

Si calcolano le coordinate del baricentro della figura complessa.
Poiché la retta $y_1 = 40$ cm è un asse di simmetria per la figura, ciò vuol dire che il baricentro della figura è un punto di tale retta, per cui la coordinata x del baricentro vale $x_G = 40$ cm. Quindi rimane da determinare la coordinata y_G.



$$y_G = \frac{S_x}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_{G1} - A_2 \cdot y_{G2} - A_3 \cdot y_{G3} - A_4 \cdot y_{G4} - A_5 \cdot y_{G5}}{A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5} =$$

$$= \frac{8000 \cdot 50 - 225 \cdot 85 - 225 \cdot 85 - 314 \cdot 25 - 314 \cdot 25}{8000 - 225 - 225 - 314 - 314} = 49{,}992\ cm$$

$G \equiv (40\ ;\ 49{,}992)$