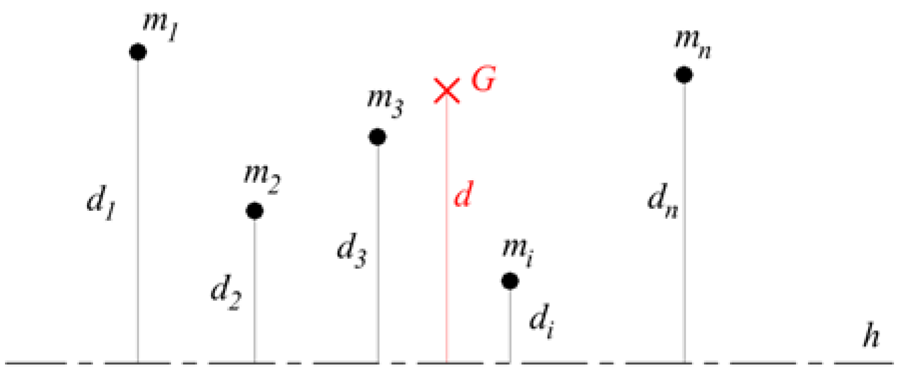
MOMENTO STATICO E BARICENTRO

Considerando un sistema di masse elementari, $m_1, m_2, .., m_n$ si definisce momento statico di questo sistema masse rispetto ad una retta h:



$$S_h = m_1 d_1 + m_2 d_2 + .. + m_n d_n = \sum_i m_i d_i$$

Il momento statico calcolato come somma dei momenti delle singole masse è uguale al prodotto della massa totale per la distanza della massa totale dal suo baricentro rispetto la retta h:

$$S_h = \sum_i m_i d_i = m \cdot d$$

Se la retta h passa per il baricentro G delle masse, il suo momento statico è nullo.

Le formule ricavate per le masse si applicano anche nel caso di figure piane soprattutto se queste vengano decomposte in parti elementari di cui si conoscano i baricentri e concentrare in questi al posto delle masse i valori delle aree; in questo caso il momento statico si misura in

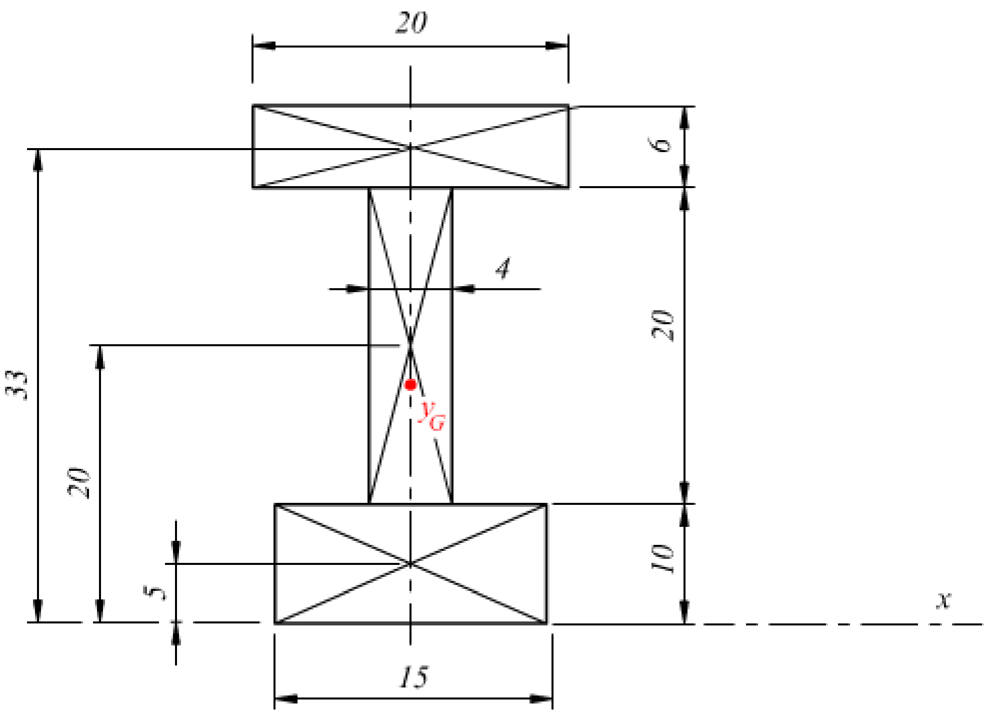
$$S_h = \sum_i a_i \cdot d_i = A \cdot d \quad [m^3]$$

E' dunque facile conoscere la distanza del baricentro di un sistema di aree rispetto ad un dato asse h

$$d = \frac{\sum_i a_i \cdot d_i}{A} = \frac{S_h}{A}$$

Il momento statico di una qualsiasi figura piana rispetto ad una qualsiasi retta passante per il suo baricentro è nullo.

Questo principio può essere usato anche nel caso del calcolo del momento statico di semplici linee.



$$S_x = 120 \cdot 33 + 80 \cdot 20 + 150 \cdot 5 = 6310$$

$$S_x = 6310 = S \cdot d = (120 + 80 + 150) \cdot d = 350d \longrightarrow y_G = d = \frac{6310}{350} = 18{,}03$$

In generale assegnato un sistema di coordinate xy il baricentro di una figura piana, rispetto a tale sistema si ottiene con le formule:

$$x_G = \frac{S_y}{S} \qquad y_G = \frac{S_x}{S}$$

Con S_x ed S_y momenti statici della figura piana rispetto agli assi x e y, mentre S è la superficie della figura.

In modo analogo, per i sistemi di masse discrete si ha :

$$\bar{r}_G = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{\sum_i m_i} \equiv \begin{cases} x_G = \dfrac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \\ y_G = \dfrac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \\ z_G = \dfrac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} \end{cases}$$

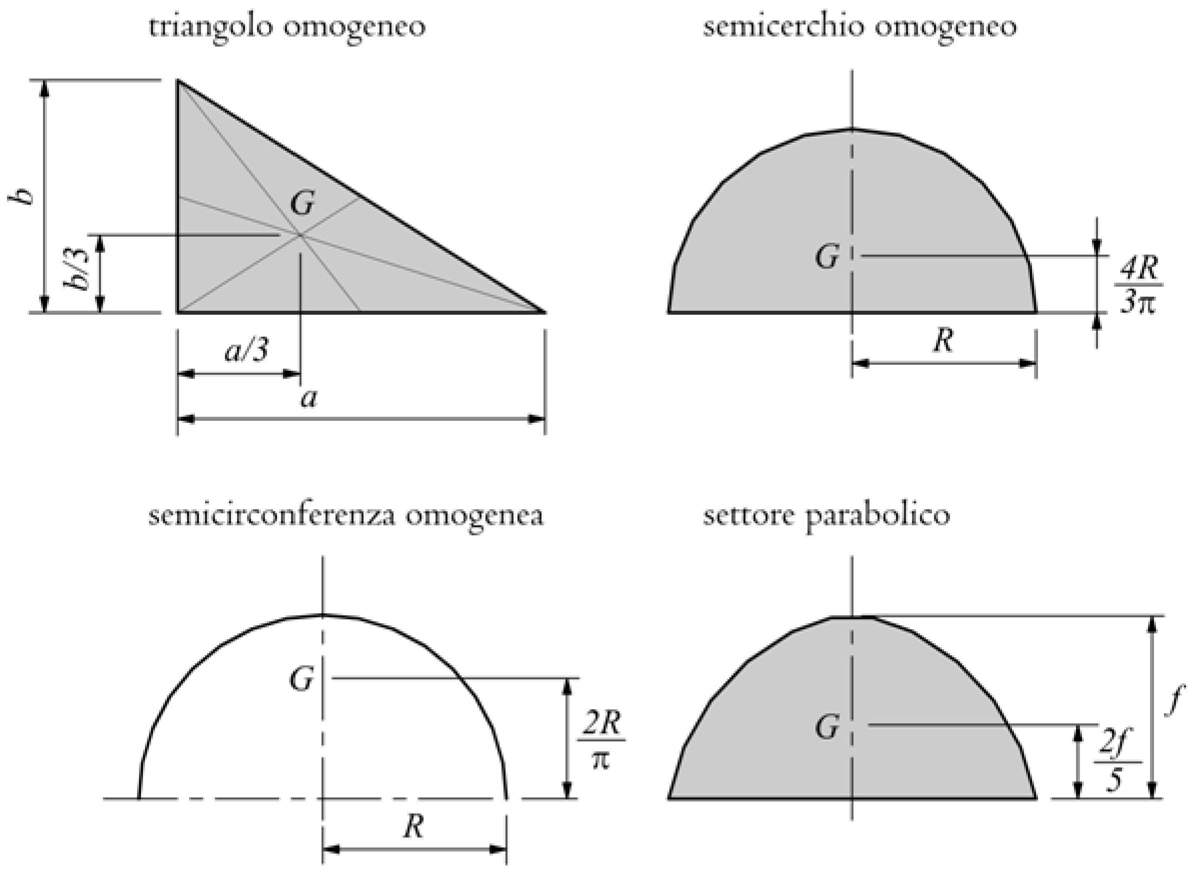
per i sistemi di masse continue si ha :

$$\bar{r}_G = \frac{\int_C \rho \cdot \bar{r} \cdot dC}{\int_C \rho \cdot dC} = \begin{cases} x_G = \dfrac{\int_C \rho \cdot x \cdot dC}{\int_C \rho \cdot dC} \\ y_G = \dfrac{\int_C \rho \cdot y \cdot dC}{\int_C \rho \cdot dC} \\ z_G = \dfrac{\int_C \rho \cdot z \cdot dC}{\int_C \rho \cdot dC} \end{cases}$$

indicando con dC un elemento di campo e con ρ la densità, lineare o superficiale o di volume a secondo se dC è un elemento di linea, di superficie o di volume.

Se un corpo o una figura omogenea ha un asse o un piano di simmetria, il baricentro giace su di esso.

Baricentri di uso frequente sono anche i seguenti.



MOMENTO DI INERZIA

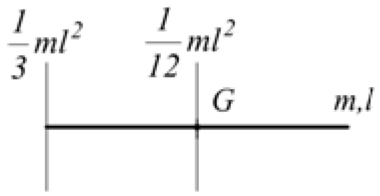
Il momento di inerzia di un sistema di masse elementari rispetto una retta h viene definito come è la somma dei prodotti delle singole masse per il quadrato delle rispettive distanze dalla retta stessa.

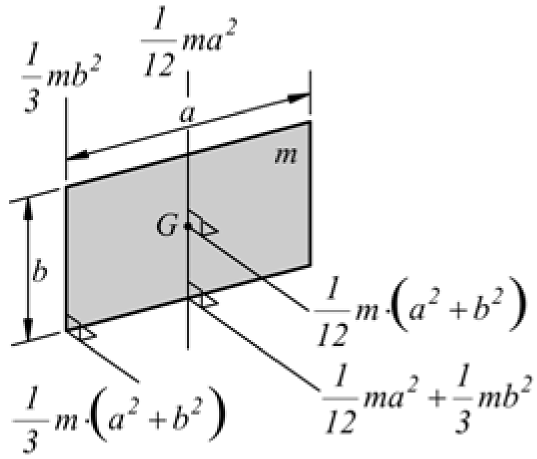
$$J_h = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + ..m_n d_n^2 = \sum_i m_i d_i^2$$

momenti d'inerzia di uso frequente

Momento d'inerzia per un'asta omogenea

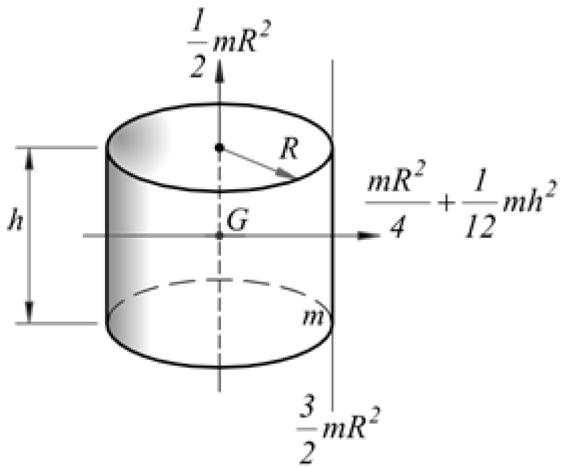
Momento d'inerzia per una lamina rettangolare omogenea

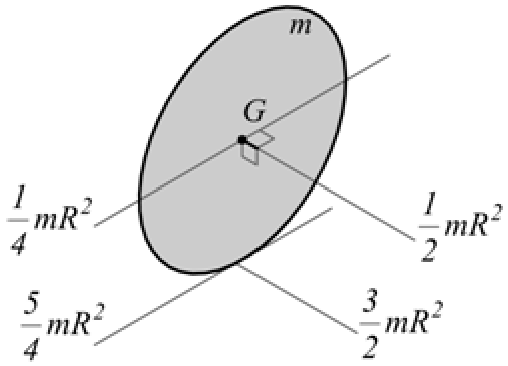




Momento d'inerzia per un cilindro omogeneo

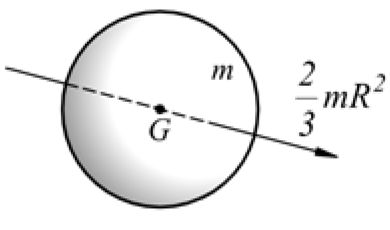
Momento d'inerzia per un disco omogeneo

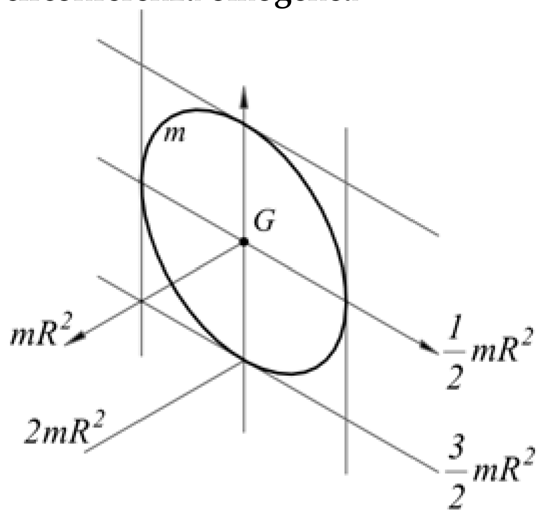




Momento d'inerzia per una sfera omogenea

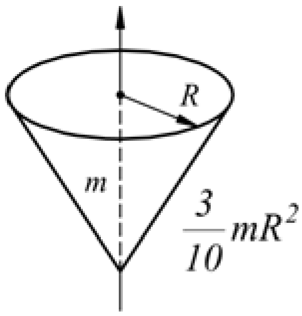
Momento d'inerzia per una circonferenza omogenea

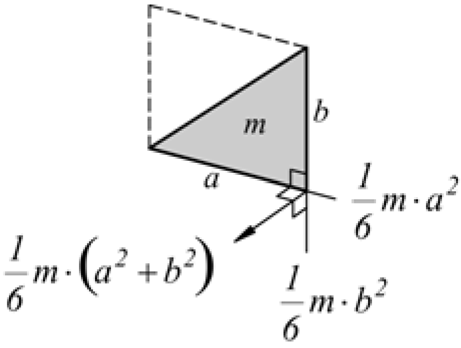




Momento d'inerzia per un cono omogeneo

Momento d'inerzia per un triangolo rettangolo omogeneo



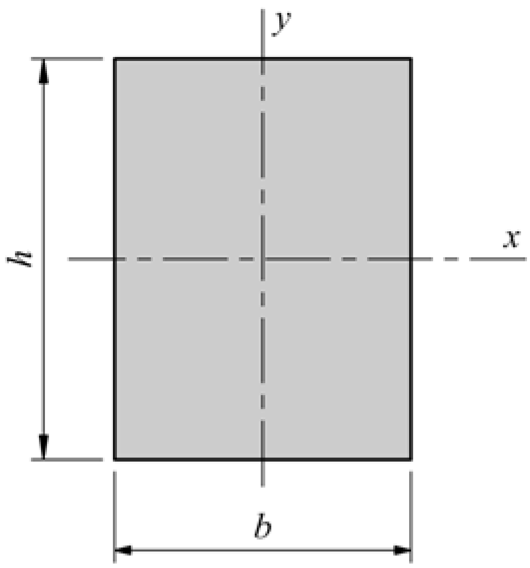


Come nel caso del momento statico, le formule ricavate per le masse si applicano anche nel caso di figure piane a compatibilmente con la possibilità che queste vengano decomposte in parti elementari di cui si conoscano i baricentri e concentrare in questi al posto delle masse i valori delle aree; in questo caso il momento di inerzia si valuta come:

$$J_h = \sum_i a_i \cdot d_i^2 = A \cdot d^2 \quad [m^4]$$

momenti di inerzia per alcune principali figure piane

sezione rettangolare **momento d'inerzia e modulo di resistenza**



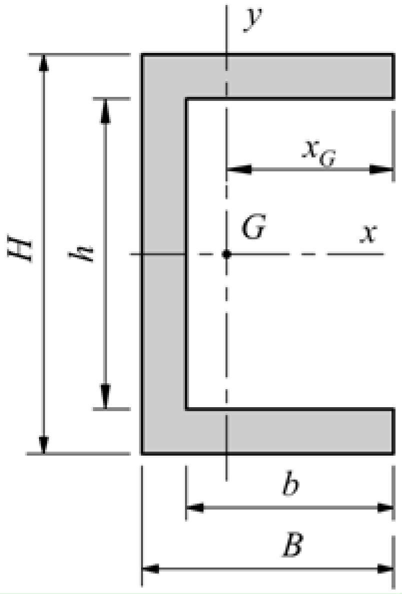
$$J_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_y = \frac{b^3h}{12}$$

$$W_x = \frac{2J_x}{h} = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_y = \frac{2J_y}{b} = \frac{b^2h}{6}$$

sezione a U



$$J_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

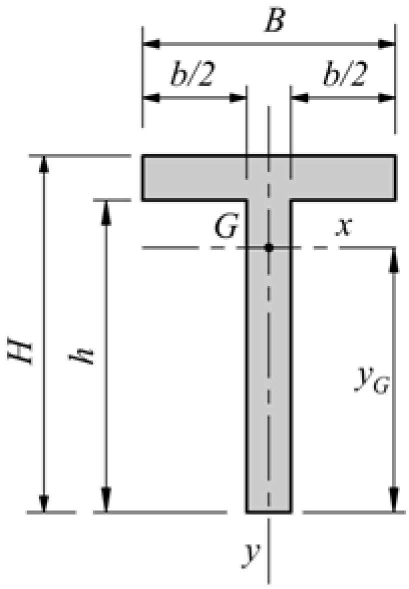
$$J_y = \frac{B^3H - b^3h}{12}$$

$$x_G = \frac{B^2H - b^2h}{2(BH - bh)}$$

$$W_x = \frac{2J_x}{H}$$

$$W_y = \frac{J_y}{x_G}$$

sezione a T



$$J_x = \frac{BH^3 - bh^3}{3} - \frac{(BH^2 - bh^2)^2}{4(BH - bh)}$$

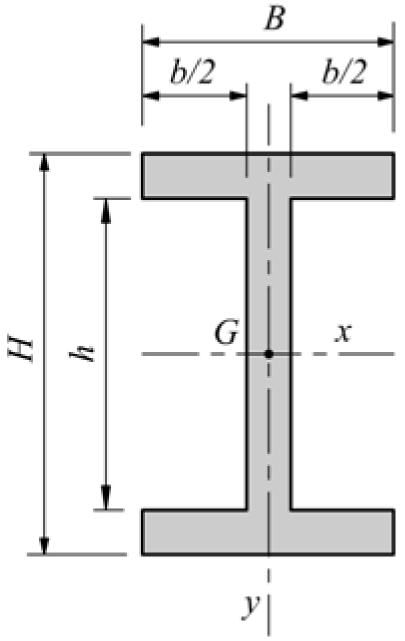
$$J_y = \frac{HB^3}{12} - \left[\frac{h}{6}\left(\frac{b}{2}\right)^3 + bh\left(\frac{B}{2} - \frac{b}{4}\right)^2 \right]$$

$$y_G = \frac{BH^2 - bh^2}{2(BH - bh)}$$

$$W_x = \frac{J_x}{y_G}$$

$$W_y = \frac{2J_y}{B}$$

sezione a doppia T



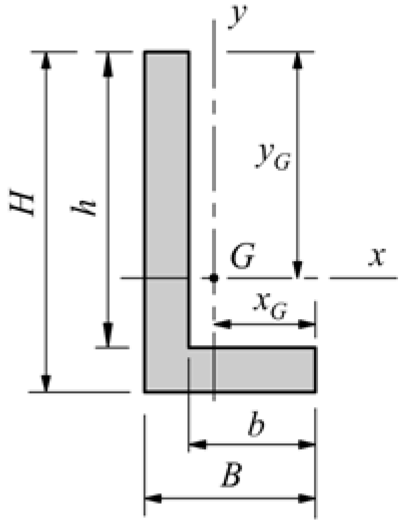
$$J_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

$$J_y = \frac{HB^3}{12} - 2 \cdot \left[\frac{h}{12}\left(\frac{b}{2}\right)^3 + \frac{bh}{2}\left(\frac{B}{2} - \frac{b}{4}\right)^2 \right]$$

$$W_x = \frac{2J_x}{H}$$

$$W_y = \frac{2J_y}{B}$$

sezione a L con lati disuguali



$$J_x = \frac{BH^3 - bh^3}{3} - \frac{(BH^2 - bh^2)^2}{4(BH - bh)}$$

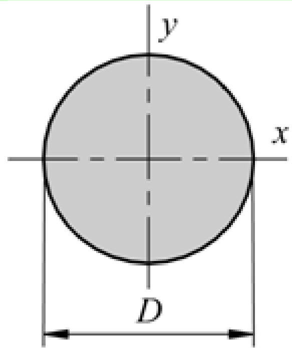
$$J_y = \frac{BH^3 - bh^3}{3}$$

$$x_G = \frac{B^2H - b^2h}{2(BH - bh)} \qquad y_G = \frac{BH^2 - bh^2}{2(BH - bh)}$$

$$W_x = \frac{J_x}{y_G}$$

$$W_y = \frac{J_y}{x_G}$$

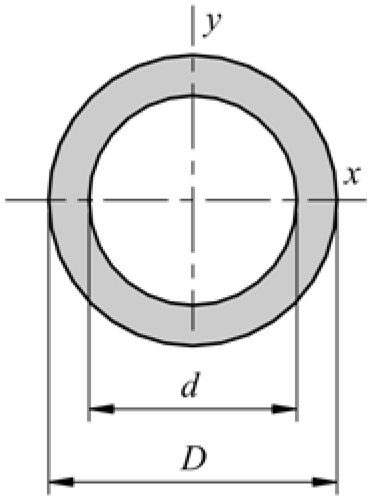
sezione circolare



$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32}$$

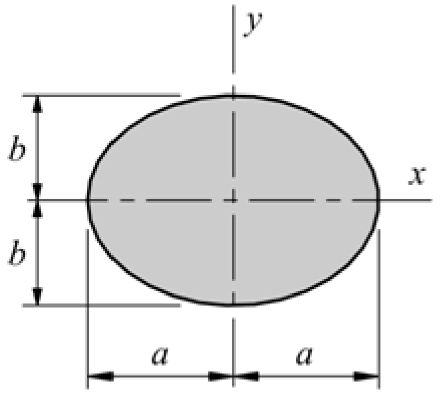
sezione circolare cava



$$J_x = J_y = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$$

$$W_x = W_y = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32D}$$

sezione ellittica



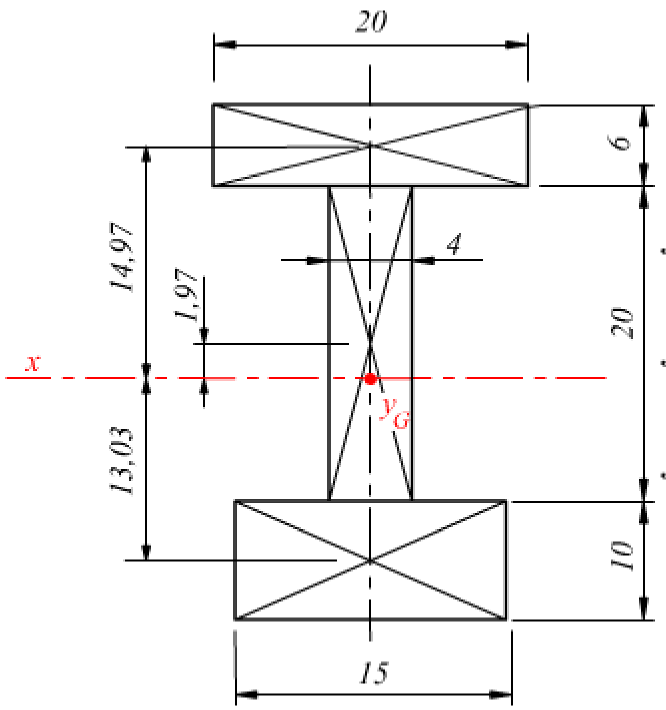
$$J_x = \frac{\pi}{4} ab^3$$

$$J_y = \frac{\pi}{4} a^3 b$$

$$W_x = \frac{J_x}{b}$$

$$W_y = \frac{J_y}{a}$$

Nel caso del momento di inerzia, si può applicare il teorema di trasposizione : il momento d'inerzia rispetto ad un qualsiasi altro asse parallelo a quello baricentrico si ottiene sommando al momento di inerzia baricentrico il prodotto dell'area della figura per il quadrato della distanza fra i due assi. Con riferimento alla figura illustrata, di cui conosciamo la posizione del baricentro y_{G}=18,03 rispetto all'asse h che alla base della figura piana:



$$J_{x1} = \frac{20 \cdot 6^3}{12} = 360$$

$$J_{x2} = \frac{4 \cdot 20^3}{12} = 2667$$

$$J_{x3} = \frac{15 \cdot 10^3}{12} = 1250$$

applicando il teorema di trasposizione rispetto all'asse x baricentrico dell'intera figura:

$$J_{xG1} = J_{x1} + A_1 d_1^2 = 360 + 120 \cdot 14{,}97^2 = 27.252$$

$$J_{xG2} = J_{x2} + A_2 d_2^2 = 2667 + 80 \cdot 1{,}97^2 = 2.977$$

$$J_{xG3} = J_{x3} + A_3 d_3^2 = 360 + 150 \cdot 13{,}03^2 = 26.717$$

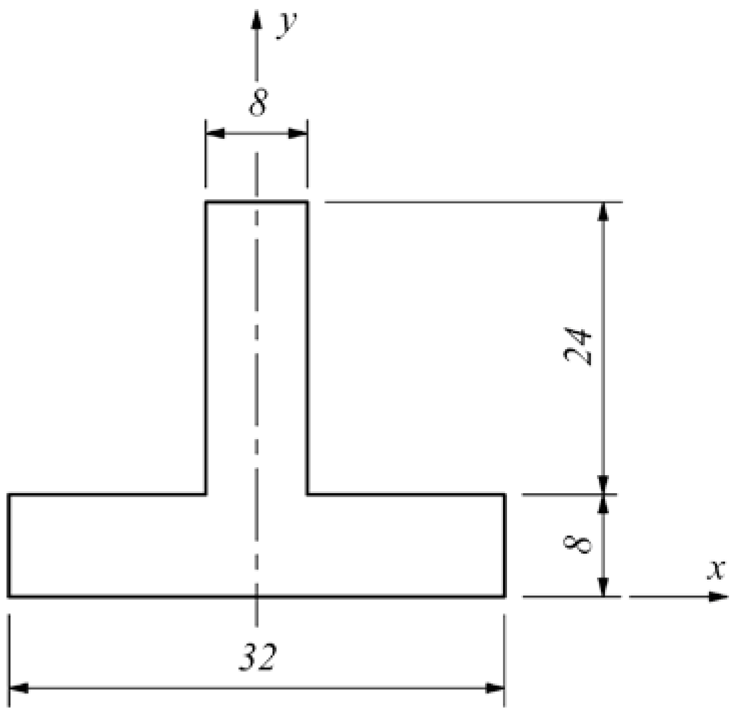
il momento di inerzia dell'intera figura piana rispetto al suo asse x baricentrico è:

$$J_{xG} = J_{xG1} + J_{xG2} + J_{xG3} = 56.946$$

Baricentro e momento di inerzia: esercizi risolti

Esercizio no.1

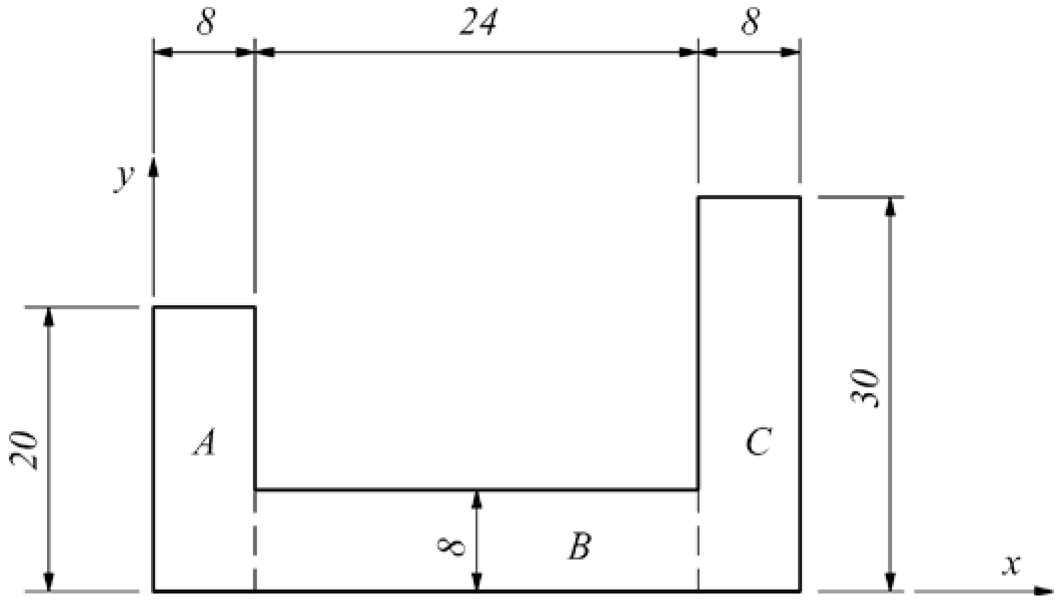
Trovare il baricentro per la seguente figura:



[Risp.:x_G=0, y_G=10,86]

Esercizio no.2

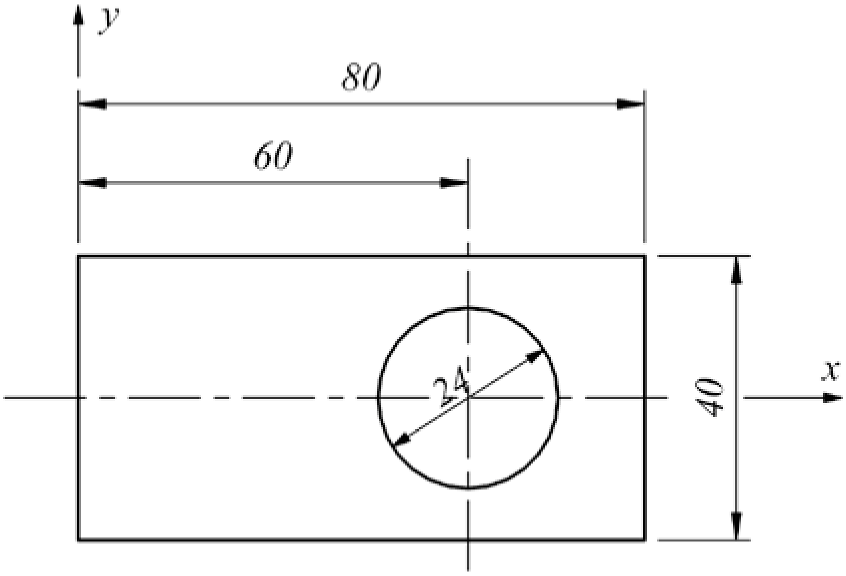
Trovare il baricentro per la seguente figura:



[Risp.:x_G=22,y_G=10,08]

Esercizio no.3

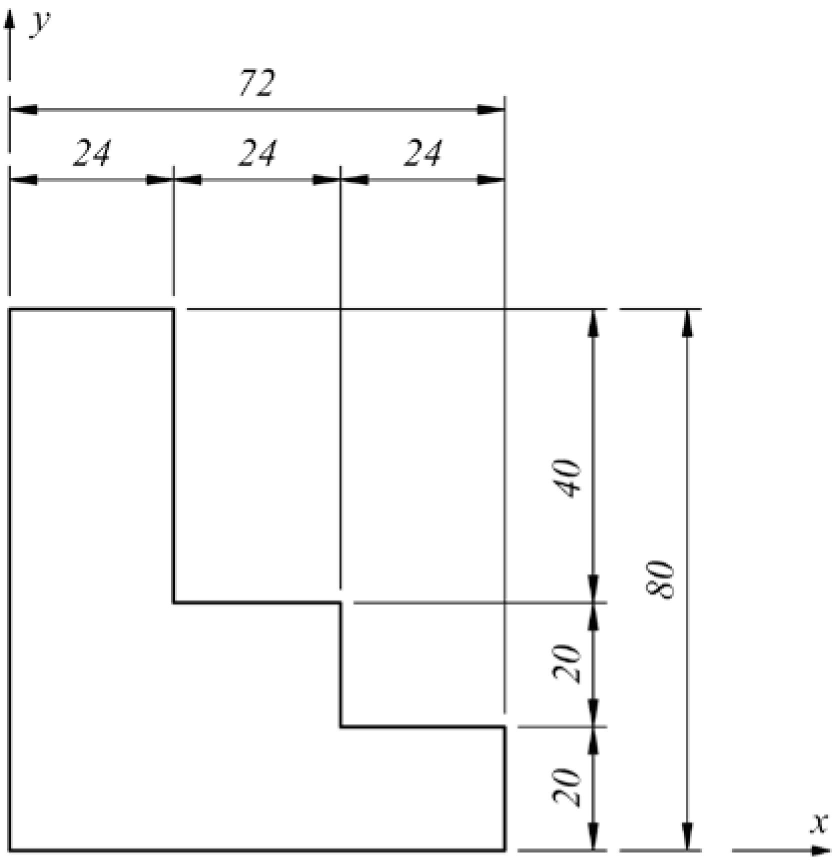
Trovare il baricentro della seguente figura, dove il foro Ø24 è passante



[Risp.:x_G=36,7,y_G=0]

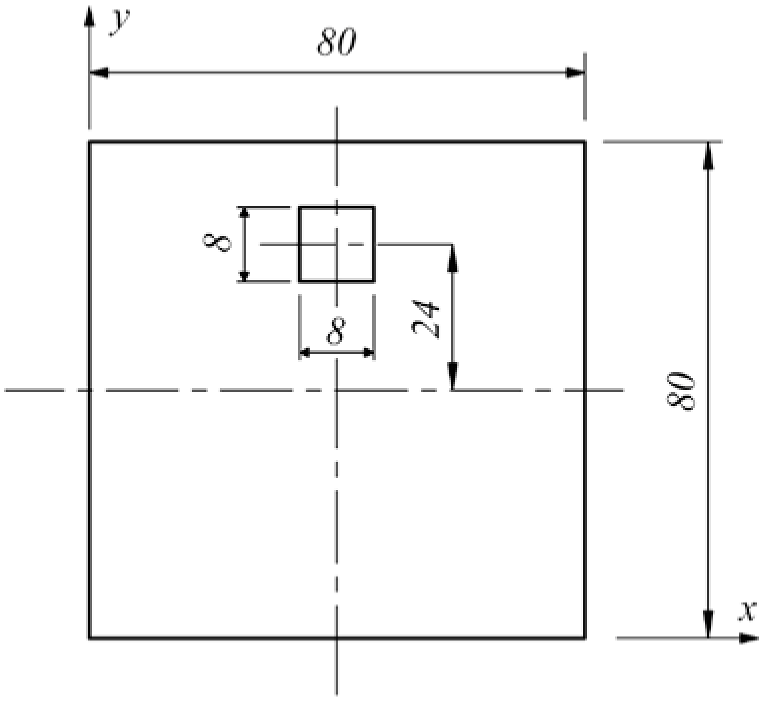
Esercizio no.4

Trovare il baricentro per la seguente figura:



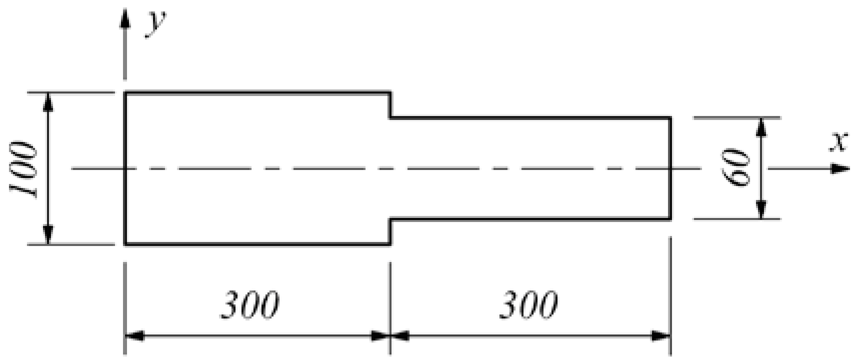
[Risp.:x_G=25,7, y_G=30]

Esercizio no.5
Trovare il baricentro per la seguente figura dove il quadrato 8x8 è un foro passante:



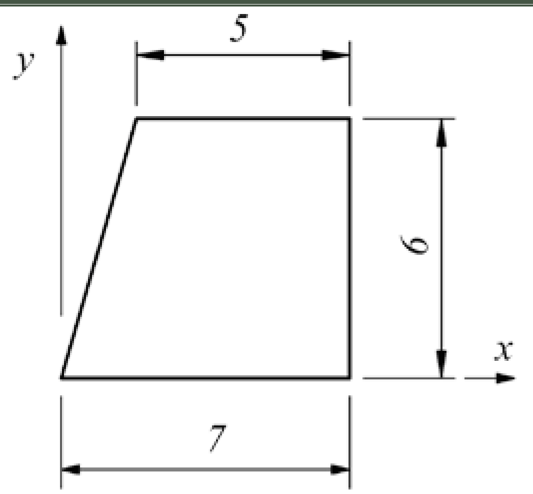
[Risp.:x_G=40, y_G=39,7]

Esercizio no.6
Trovare il baricentro della seguente figura:



[Risp.:x_G=262,5, y_G=0]

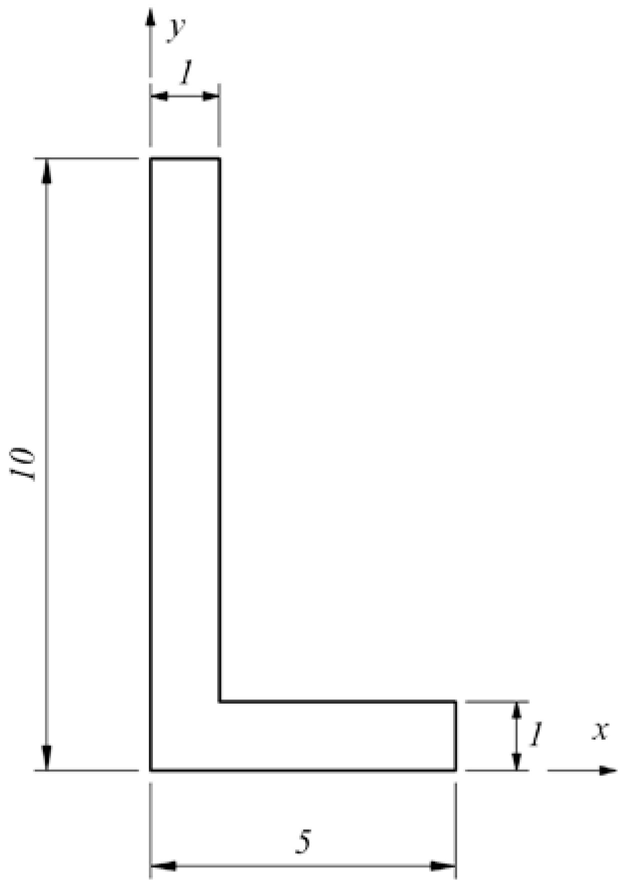
Esercizio no.7
Trovare il baricentro della seguente figura:



[Risp.: x_G=3,97, y_G=2,83]

Esercizio no.8

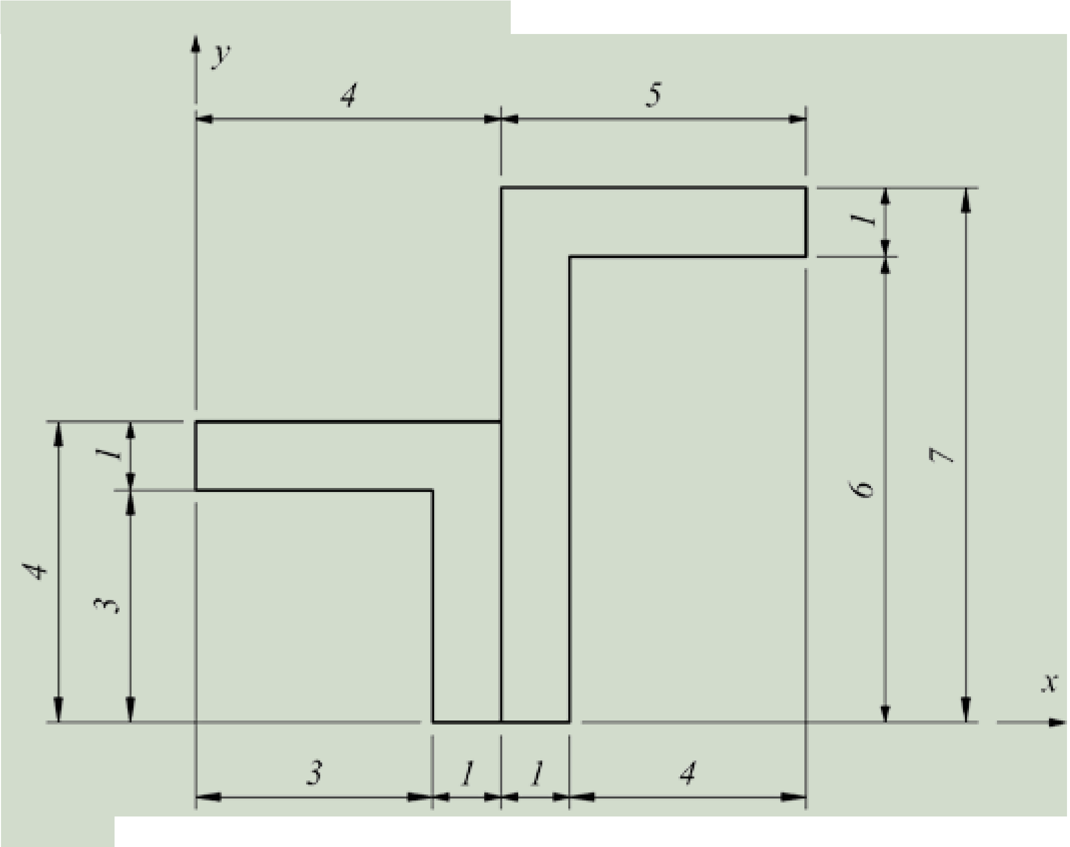
Trovare la posizione del baricentro e il valore del momento di inerzia rispetto all'asse x baricentrico per la seguente figura.



[Risp.: x_G=1,21, y_G=3,71 , J_{xG}=141,52]

Esercizio no.9

Calcolare il valore del momento di inerzia rispetto all'asse x e all'asse orizzontale baricentrico per la seguente figura.



[Risp.: x_G=4,33, y_G=3,83 , J_{xG}=77,5 J_x=341,5]