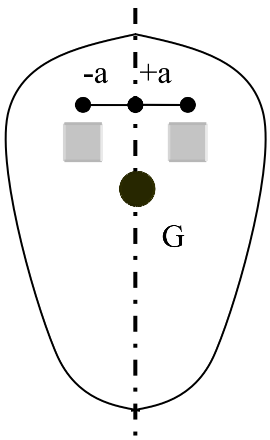
Prima Facoltà di Architettura "Ludovico Quaroni"

Corso di Laurea 5 U.E.
A.A. 2001/2002 - II semestre

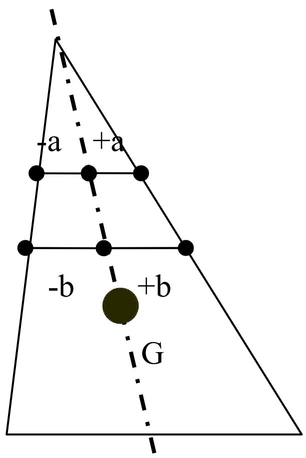
Note sulle lezioni del corso di

STATICA

tenute dal Prof. Luis Decanini



Simmetria retta



Simmetria obliqua

GEOMETRIA DELLE MASSE

INDICE

1.1. Introduzione

Oltre a quelle intese in senso fisico (resistenza alla variazione dello stato di moto), possono essere interpretate come masse anche altre grandezze scalari purché omogenee fra loro (ad es.: volumi, aree, linee).

Ciò generalizza il concetto di massa e consente di estendere i risultati ottenuti per una delle quantità omogenee ad altre quantità di volta in volta utili nell'analisi di numerosi problemi della Statica, della Scienza delle Costruzioni e della Dinamica.

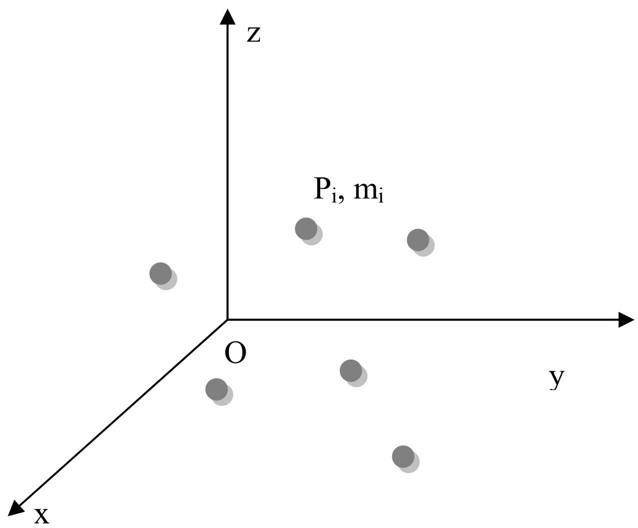
Alcune definizioni necessarie sono le seguenti:

- Punto materiale: punto in cui può pensarsi concentrata una certa quantità di materia che rappresenta la massa puntuale
- Corpo materiale: può essere visto come composto da un insieme infinito di punti materiali

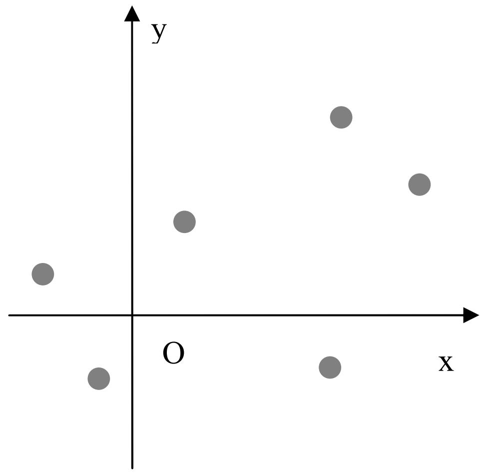
Considerando sistemi di punti materiali sedi di masse, si possono distinguere:

- Sistemi discreti (insieme finito di punti materiali)
- Sistemi continui (insieme infinito di punti materiali adiacenti)

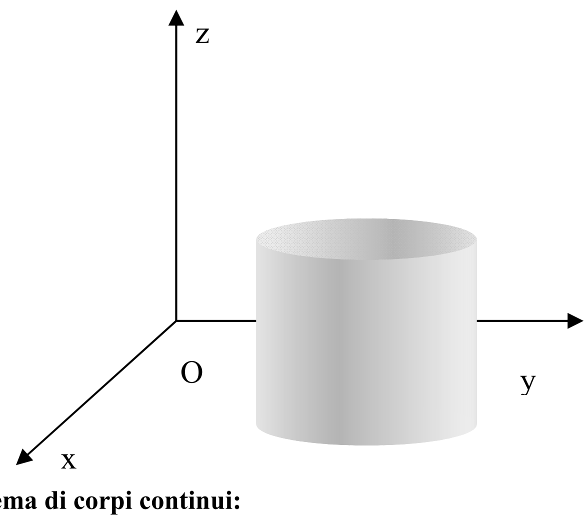
Inizialmente saranno esaminati i sistemi discreti e poi quelli continui.



Sistema di corpi discreti: Tridimensionale (Spaziale)



Bidimensionale (Piano)



Sistema di corpi continui:
Corpo materiale tridimensionale (spaziale)

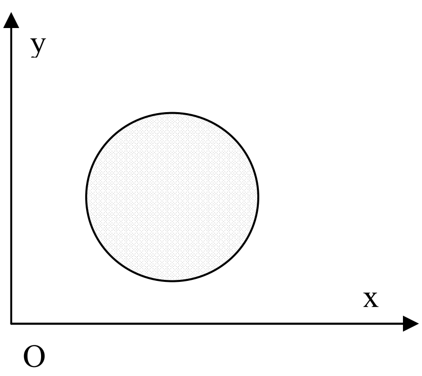
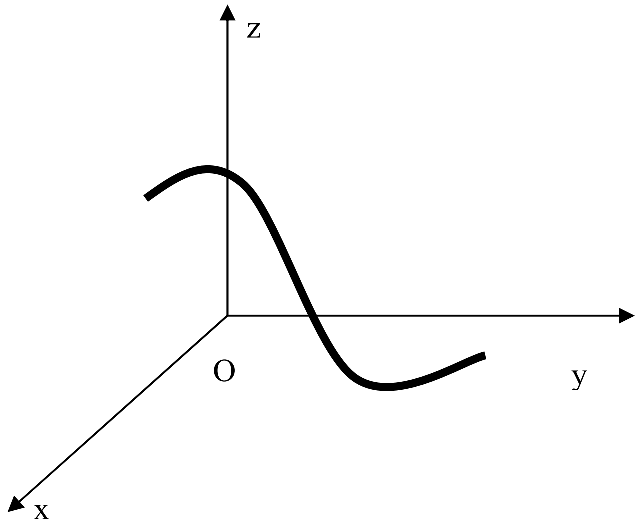
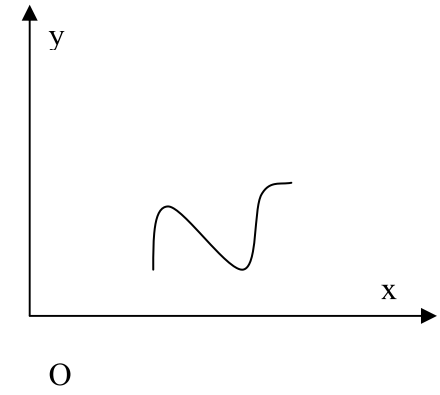


figura bidimensionale (piana)



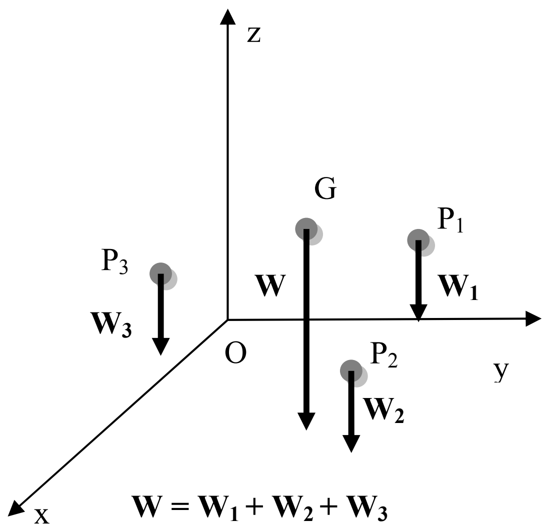
Linea tridimensionale



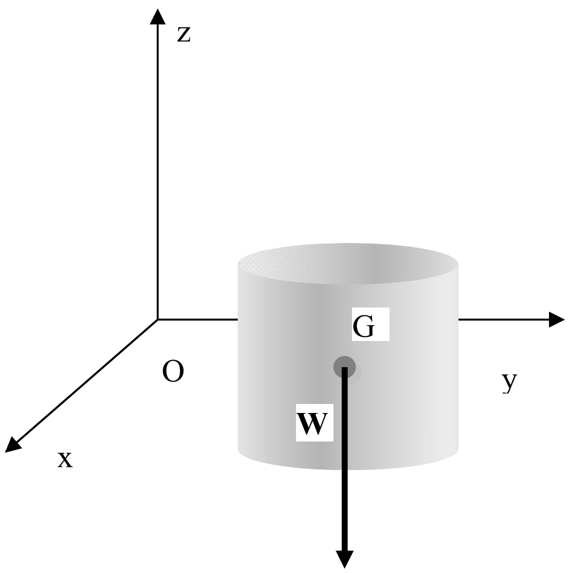
Linea contenuta in un piano

1.2. Centro di gravità

In molti problemi usuali della Meccanica le forze gravitazionali, che agiscono su punti materiali o su corpi estesi, possono essere considerate come un sistema di forze parallele, $\mathbf{W_i}$, dirette verticalmente verso il basso. Si dimostra che tale sistema di forze gravitazionali ha un risultante applicato in un punto, G, denominato centro di gravità in cui si può pensare concentrato il peso complessivo, **W**, di un sistema o del corpo. Il centro di gravità può essere visto come il "centro di un sistema di vettori applicati paralleli"; in esso si considera applicato il risultante del sistema.
Il centro di gravità, anche detto baricentro, coincide con il centro di massa se il campo gravitazionale è uniforme, vale a dire se l'accelerazione di gravità *g* è uguale in tutti i punti dello spazio considerato. Nel seguito si assumerà che *g* sia costante e quindi si parlerà indifferentemente di centro di massa o baricentro.



Sistema discreto di punti materiali



Corpo materiale. Si può considerare il peso **W** concentrato in G

1.3. Centro di un sistema di vettori applicati paralleli

Sia dato un sistema di punti materiali, P_i, nei quali si suppongono concentrate delle masse, m_i. Se immaginiamo di applicare in tali punti un sistema di forze parallele misurate da numeri proporzionali alle masse, facendo ruotare le masse intorno ai rispettivi punti di applicazione, mantenendole fra loro parallele, pure il risultante ruota attorno al punto G, denominato centro delle forze parallele. In altre parole, attorno al punto G ruota l'asse centrale quando i vettori forze ruotano di uno stesso angolo intorno ai punti di applicazione.

Nel seguito si dimostra l'esistenza del punto G e si ricavano le corrispondenti coordinate x_G, y_G, z_G. Si consideri un sistema di *n* forze parallele $\mathbf{F_i}$, applicate nei punti P_i (x_i, y_i, z_i). Indicando con **v** il versore di una generica direzione, la forza $\mathbf{F_i}$ può esprimersi come:

$$\mathbf{F_i} = F_i \cdot \mathbf{v}$$

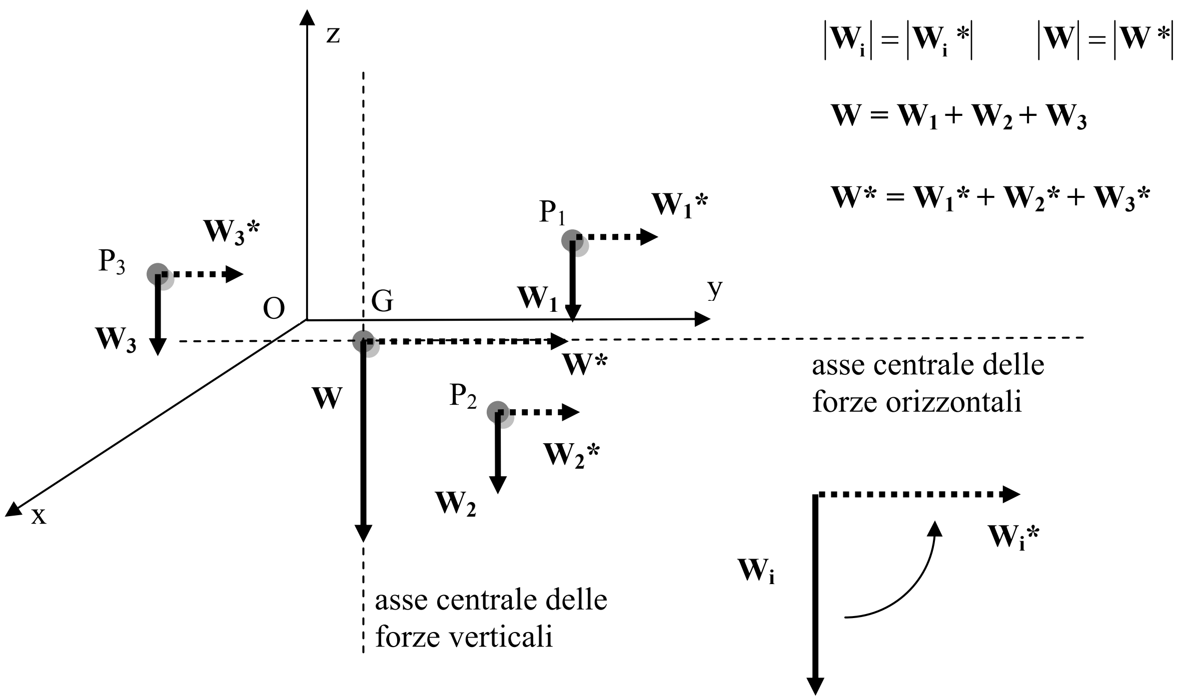
con F_i modulo della forza *i*-esima.

Se si riduce il sistema di *n* forze $\mathbf{F_i}$ a una sola forza risultante **R** applicata in G (x_G, y_G, z_G), i due sistemi saranno equivalenti se hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante rispetto a un qualunque punto dello spazio. La condizione di uguaglianza dei risultanti è soddisfatta per ipotesi:

$$\sum_1^n \mathbf{F_i} = \mathbf{R}$$

La seconda condizione di uguaglianza dei risultanti riguardante l'uguaglianza dei momenti si può esprimere nel seguente modo:

$$\sum_1^n (P_i - O) \wedge F_i \mathbf{v} = (G - O) \wedge \mathbf{R}$$



$\mathbf{W_i}^*$: forza ottenuta facendo ruotare le forze verticali $\mathbf{W_i}$ di uno stesso angolo intorno al proprio punto di applicazione P_i

essendo:

$$\mathbf{R} = \sum_{1}^{n} F_i \mathbf{v}$$

si ha:

$$\sum_{1}^{n} (P_i - O) \wedge F_i \mathbf{v} = (G - O) \wedge \sum_{1}^{n} F_i \mathbf{v}$$

Senza alterare i valori dei prodotti vettoriali, si può scrivere:

$$\sum_{1}^{n} (P_i - O) F_i \wedge \mathbf{v} = (G - O) \sum_{1}^{n} F_i \wedge \mathbf{v}$$

per cui semplificando:

$$\sum_{1}^{n} (P_i - O) F_i = (G - O) \sum_{1}^{n} F_i$$

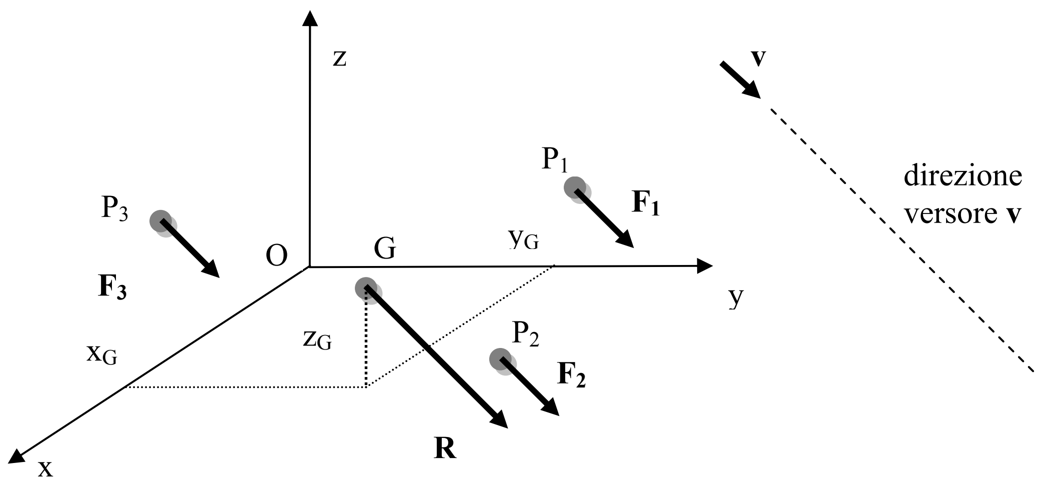
Pertanto la seconda condizione (uguaglianza dei momenti) è soddisfatta indipendentemente dalla direzione del versore **v**, purché tutte le forze si mantengano parallele. Dalla precedente espressione si ricava l'equazione vettoriale del centro di forze parallele:

$$(G - O) = \frac{\sum_{1}^{n} (P_i - O) F_i}{\sum_{1}^{n} F_i}$$

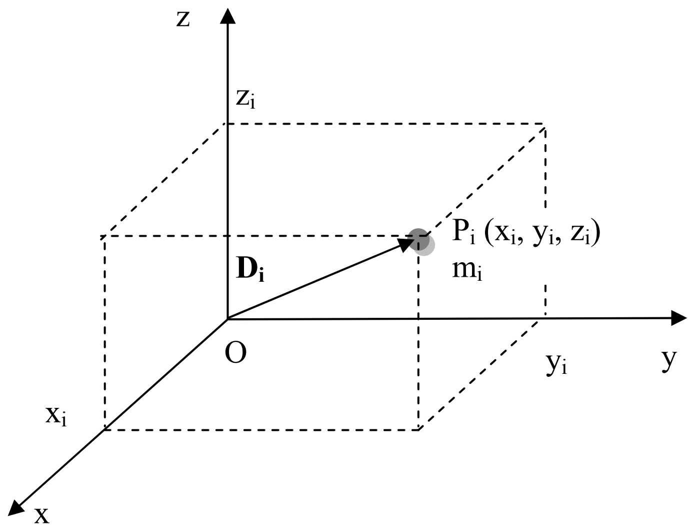
Il vettore posizione del centro di forze parallele risulta univocamente definito perciò è dimostrata l'esistenza di G. Le componenti di (G-O) rispetto al sistema di assi cartesiani forniscono le coordinate x_G, y_G, z_G.

$$x_G = \frac{\sum_{1}^{n} x_i F_i}{\sum_{1}^{n} F_i} \qquad y_G = \frac{\sum_{1}^{n} y_i F_i}{\sum_{1}^{n} F_i} \qquad z_G = \frac{\sum_{1}^{n} z_i F_i}{\sum_{1}^{n} F_i}$$

Se le forze $\mathbf{F_i}$ hanno direzione verticale rappresentano i pesi $\mathbf{W_i}$ e perciò il centro delle forze parallele prende il nome di centro di gravità del sistema.



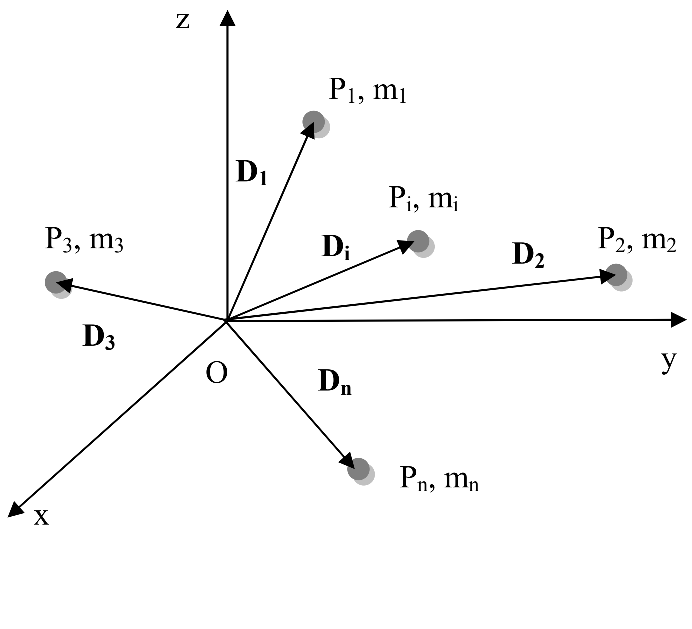
1.4. *Momento statico di una massa rispetto a un punto*



Sia dato nello spazio un punto P_i (x_i, y_i, z_i) nel quale si considera concentrata la massa m_i, il vettore:

$$\overline{S}_{Oi} = m_i (P_i - O)$$

si definisce Momento Statico (o del primo ordine) della massa m_i rispetto al punto O. Si osservi che il momento statico corrisponde al prodotto dello scalare m_i per il vettore posizione $(P_i - O) = \overline{D}_i$.



1.5. *Centro delle masse o baricentro*

Considerando un sistema di *n* punti materiali (P_i; m_i) con P_i (x_i; y_i; z_i) e i = 1, 2, 3, … k, … n, la massa totale del sistema è la somma delle masse elementari:

$$Massa\ \ Totale \quad \Rightarrow \quad m_1 + m_2 + \ldots + m_k + \ldots + m_n = \sum_1^n m_i$$

(si ricordi che la massa è una grandezza scalare)

Il momento statico risultante rispetto al polo O è il vettore:

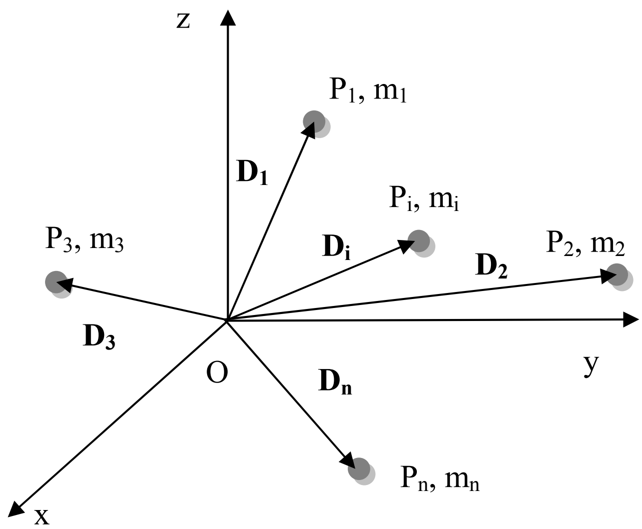
$$\overline{S}_{OR} = m_1(P_1 - O) + m_2(P_2 - O) + \ldots + m_k(P_k - O) + \ldots + m_n(P_n - O)$$

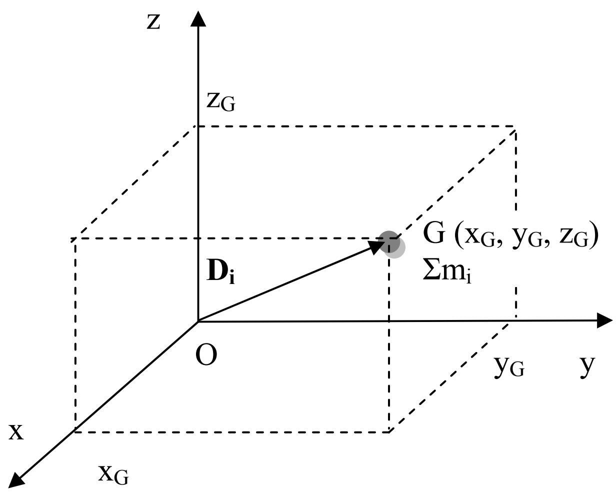
che può anche scriversi

$$\overline{S}_{OR} = m_1\overline{D}_i + m_2\overline{D}_2 + \ldots + m_k\overline{D}_k + \ldots + m_n\overline{D}_n = \sum_1^n m_i(P_i - O)$$

Se immaginiamo la massa totale Σm_i concentrata nel punto G detto **centro delle masse**, il momento statico rispetto ad O risulta:

$$\overline{S}_{OG} = \sum_1^n m_i(G - O)$$





$$\sum_1^n m_i \qquad \overline{S}_{OR} = \sum_1^n m_i(P_i - O) \qquad\qquad \sum_1^n m_i \qquad \overline{S}_{OG} = \sum_1^n m_i(G - O)$$

Se entrambi i sistemi sono equivalenti, il momento statico della massa totale rispetto ad O deve essere uguale alla somma dei momenti statici delle masse componenti rispetto allo stesso punto O:

$$\overline{S}_{OG} = \overline{S}_{OR}$$

Quindi:

$$\sum_1^n m_i(G - O) = \sum_1^n m_i(P_i - O) \qquad \textit{Equazione Vettoriale del Centro di Massa}$$

$$(G-O)=\frac{\sum_{1}^{n} m_i (P_i - O)}{\sum_{1}^{n} m_i}$$

In altre parole:

Il **centro di massa** è un punto materiale la cui massa è uguale alla massa totale del sistema (Σm_i) e il cui momento statico rispetto a un punto O è uguale alla somma dei momenti statici delle singole masse rispetto al medesimo punto O. L'enunciato precedente prende anche il nome di teorema di Varignon (vedi Dispesa1: Vettori e Forze, paragrafo 1.7.7). Per le ipotesi fatte nel paragrafo 1.2, il centro di massa coincide con il **baricentro**.

Il vettore (G – O) ha componenti $\begin{Bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{Bmatrix}$; considerando la terna di assi cartesiani, l'equazione vettoriale precedente può essere proiettata sugli assi e tenendo conto che le componenti del vettore (P_i – O) sono $\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix}$, si ricavano le tre equazioni scalari seguenti che forniscono le coordinate del **baricentro**:

$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \qquad z_G = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

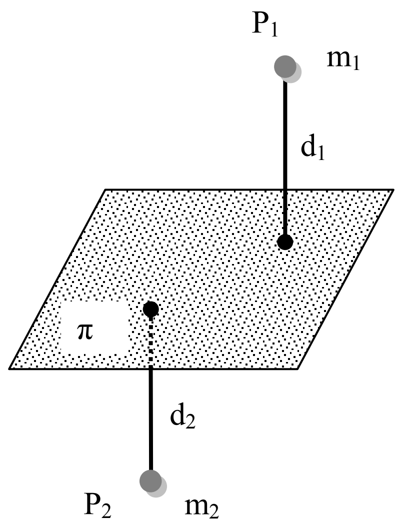
Momento statico rispetto a un piano

Nella deduzione dell'equazione vettoriale del Baricentro di un sistema discreto di masse è stato introdotto il concetto di Momento Statico di una massa concentrata rispetto a un punto dello spazio.

Tuttavia, nelle formulazioni con coordinate cartesiane viene utilizzato il seguente momento di primo ordine:

momento statico rispetto a un piano

Il momento statico di una massa m_i concentrata nel punto P_i è uguale al prodotto della massa per la distanza *d* di P_i da π, presa rispettivamente con segno + o – a seconda che P_i si trovi nel semispazio che arbitrariamente definiamo positivo o in quello negativo.



$$S_{\pi 1} = m_1 d_1$$

d_1 : distanza normale della massa m_1 dal piano π

$$S_{\pi 2} = -m_2 d_2$$

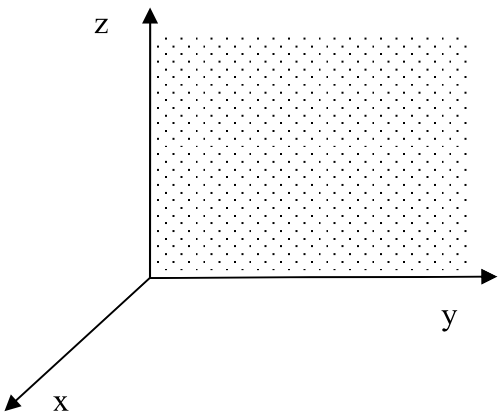
d_2 : distanza normale della massa m_2 dal piano π

Essendo le coordinate del baricentro:

$$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \qquad z_G = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

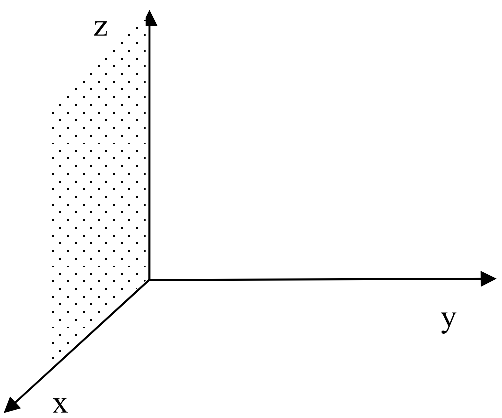
Le sommatorie che compaiono nei numeratori rappresentano i Momenti Statici delle masse rispetto ai piani coordinati.

Momento statico rispetto al piano yz



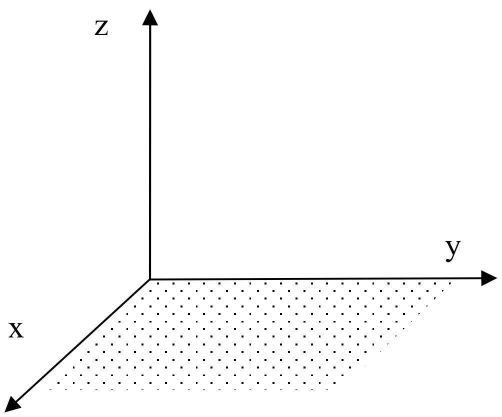
$$S_{yz} = \sum_{1}^{n} m_i x_i$$

Momento statico rispetto al piano xz



$$S_{xz} = \sum_{1}^{n} m_i y_i$$

Momento statico rispetto al piano xy

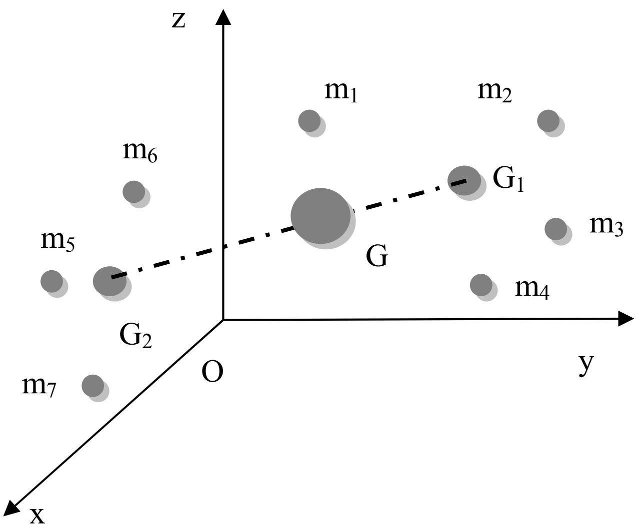


$$S_{xy} = \sum_{1}^{n} m_i z_i$$

Le equazioni cartesiane del baricentro indicano che il momento statico di un sistema di masse rispetto a un piano risulta uguale al momento statico che si ottiene concentrando la massa totale nel baricentro. Ne segue che: il momento statico di un sistema di masse è nullo rispetto a qualsiasi piano passante per il baricentro.

Osservazioni sul baricentro

- La posizione del baricentro G è indipendente dal polo scelto per la sua determinazione.
- Se tutte le masse sono contenute in un piano che può essere fatto coincidere con il piano x-y risulta $z_G = 0$.
- **Proprietà Distributiva** (Decomposizione di un sistema di masse in sistemi parziali).
  Se si considera il sistema di *n* masse decomposto in due sistemi parziali e se G_1 e G_2 sono i baricentri dei subsistemi, il baricentro G dell'intero sistema coincide con il baricentro del sistema dei due punti G_1 e G_2 in cui sono state concentrate le rispettive masse.



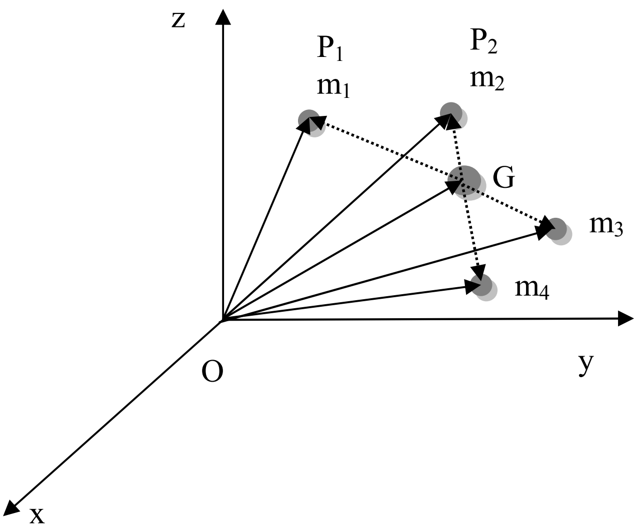
Subsistema 1: masse m_1, m_2, m_3, m_4 $\rightarrow$ G_1

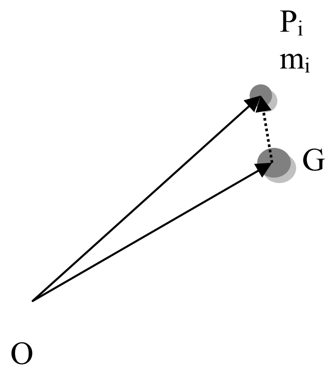
Subsistema 2: masse m_5, m_6, m_7 $\rightarrow$ G_2

Sistema complessivo: masse m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7 $\rightarrow$ G

La decomposizione può essere vantaggiosa qualora i baricentri parziali siano di facile determinazione.

La somma dei momenti statici delle singole masse di un sistema rispetto al Baricentro G è **nulla**.





Si considera un sistema di punti materiali le cui masse sono m_1, m_2, m_3 ed m_4 come mostra la figura. La posizione di ciascuna massa risulta determinata dal vettore $(P_i - O)$. I vettori definiti tra le masse e il baricentro possono essere visti come la differenza vettoriale:

$$(P_i - G) = (P_i - O) - (G - O)$$

Nel caso della figura:

$(P_1 - G) = (P_1 - O) - (G - O)$
$(P_2 - G) = (P_2 - O) - (G - O)$
$(P_3 - G) = (P_3 - O) - (G - O)$
$(P_4 - G) = (P_4 - O) - (G - O)$

Il momento statico della massa m_i rispetto a G risulta:

$$S_{Gi} = (P_i - G)\, m_i = (P_i - O)\, m_i - (G - O)\, m_i$$

$S_{G1} = (P_1 - G)\, m_1 = (P_1 - O)\, m_1 - (G - O)\, m_1$
$S_{G2} = (P_2 - G)\, m_2 = (P_2 - O)\, m_2 - (G - O)\, m_2$
$S_{G3} = (P_3 - G)\, m_3 = (P_3 - O)\, m_3 - (G - O)\, m_3$
$S_{G4} = (P_4 - G)\, m_4 = (P_4 - O)\, m_4 - (G - O)\, m_4$

La somma dei momenti statici rispetto a G vale:

$$\Sigma S_{Gi} = (P_1 - O)\, m_1 - (G - O)\, m_1 + (P_2 - O)\, m_2 - (G - O)\, m_2 +$$
$$(P_3 - O)\, m_3 - (G - O)\, m_3 + (P_4 - O)\, m_4 - (G - O)\, m_4$$

Riordinando

$$\Sigma S_{Gi} = [(P_1 - O)\, m_1 + (P_2 - O)\, m_2 + (P_3 - O)\, m_3 + (P_4 - O)\, m_4] -$$
$$[(G - O)\, m_1 + (G - O)\, m_2 + (G - O)\, m_3 + (G - O)\, m_4]$$

$$\Sigma S_{Gi} = [(P_1 - O)\, m_1 + (P_2 - O)\, m_2 + (P_3 - O)\, m_3 + (P_4 - O)\, m_4] - (G - O)\, (m_1 + m_2 + m_3\, m_4)$$

Generalizzando:

$$\Sigma S_{Gi} = \Sigma m_i\, (P_i - O) - (G - O)\, \Sigma m_i$$

ma entrambi i termini del secondo membro sono uguali, perciò:

$\Sigma S_{Gi} = 0$	La somma dei momenti statici delle singole masse rispetto a G è nulla

Infatti, per la definizione di baricentro:

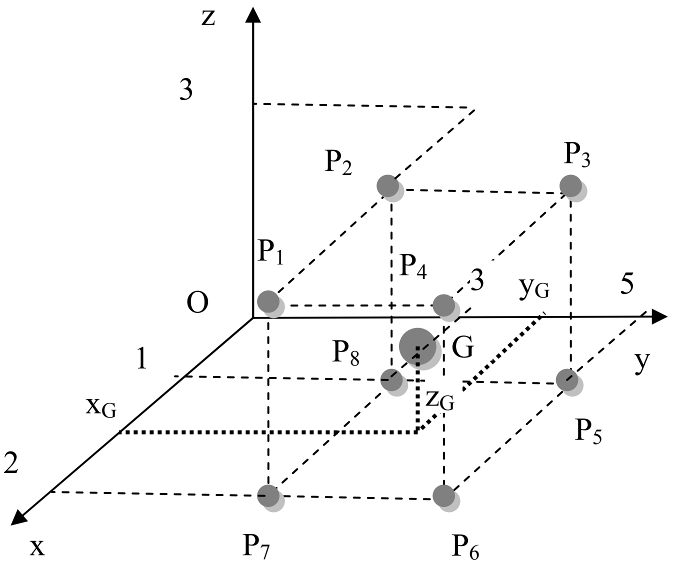
$$\Sigma m_i\, (P_i - O) = (G - O)\, \Sigma m_i$$

- Se il sistema delle masse presenta simmetria rispetto a un asse, il baricentro del sistema si trova sull'asse di simmetria. Infatti il momento statico rispetto a un asse di simmetria è nullo, poiché a una massa con distanza positiva dall'asse ne corrisponde sempre una negativa. Uno dei punti che costituiscono l'asse sarà allora il baricentro.
- Se il sistema delle masse è dotato di due assi di simmetria, il baricentro è definito dall'intersezione di tali assi.
- Il baricentro determinato mediante l'equazione vettoriale coincide con il centro di un sistema di vettori paralleli, se si assume ogni vettore applicato nel corrispondente punto P_i e di intensità proporzionale alla massa m_i.

- Dato che, per le ipotesi fatte al paragrafo 1.2, la forza gravitazionale che agisce su ciascun punto materiale risulta proporzionale alla massa dello stesso, il baricentro coincide con il centro di massa qualora si possa assumere che le forze gravitazionali costituiscono un sistema di forze parallele.

Applicazione

Determinazione del Baricentro di un sistema discreto spaziale di masse.



$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = m$

P_1 (2; 3; 3)	P_2 (1; 3; 3)
P_3 (1; 5; 3)	P_4 (2; 5; 3)
P_5 (1; 5; 0)	P_6 (2; 5; 0)
P_7 (2; 3; 0)	P_8 (1; 3; 0)

$$\sum_{1}^{8} m_i = 8\, m$$

$x_G = 1.5 \quad y_G = 4 \quad z_G = 1.5$

- $$x_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{(2+1+1+2+1+2+2+1)\,m}{8\,m} = \frac{12\,m}{8\,m} = 1.5$$
- $$y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{(3+3+5+5+5+5+3+3)\,m}{8\,m} = \frac{32\,m}{8\,m} = 4$$
- $$z_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{(3+3+3+3+0+0+0+0)\,m}{8\,m} = \frac{12\,m}{8\,m} = 1.5$$
- $$S_{zy} = \sum_{1}^{4} m_i x_i = 12\,m$$
- $$S_{zx} = \sum_{1}^{4} m_i y_i = 32\,m$$
- $$S_{xy} = \sum_{1}^{4} m_i z_i = 12\,m$$

1.6. Sistemi continui

Le definizioni di Baricentro e Momento Statico precedentemente esaminate per i sistemi discreti, possono essere estese a corpi materiali di dimensioni finite se questi ultimi vengono considerati come insiemi continui di masse. Il sistema continuo si immagina costituito da infinite masse elementari *dm*, cioè la suddivisione del corpo viene portata al limite facendo tendere a zero le dimensioni degli elementi.

Se *c* è la regione o campo (volume, area o linea) in cui è diffusa la massa, l'elemento infinitesimale di massa può essere espresso nella forma:

$$\boxed{dm = \mu\, dc}$$

dove μ è la densità di massa

$dm = \mu\, dV \quad \rightarrow \quad$ Volume

$dm = \mu\, dA \quad \rightarrow \quad$ Area

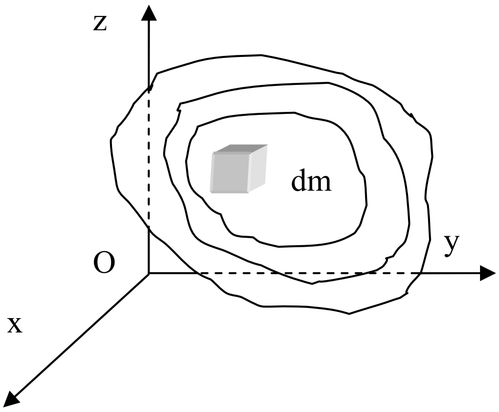
$dm = \mu\, dL \quad \rightarrow \quad$ Linea

La massa totale risulta: $$\boxed{M = \int_C dm = \int_C \mu\, dc}$$

$M = \int_V \mu\, dV \quad \rightarrow \quad$ Volume

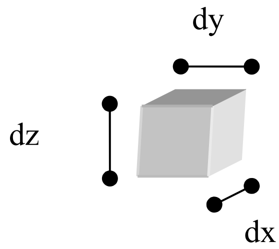
$M = \int_A \mu\, dA \quad \rightarrow \quad$ Area

$M = \int_L \mu\, dL \quad \rightarrow \quad$ Linea

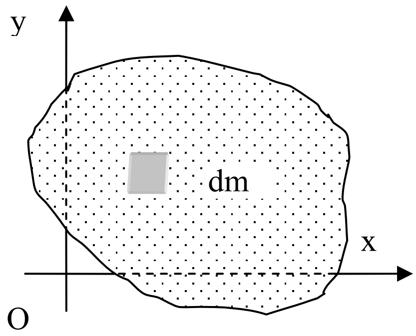


$$M = \int_V dm = \int_V \mu \, dV$$

- **Volume**

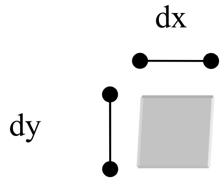


dV = dx dy dz

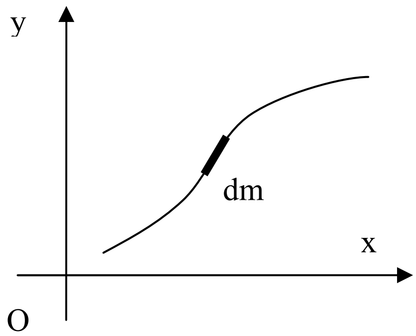


$$M = \int_A dm = \int_A \mu \, dA$$

- **Area**



dA = dx dy



- **Linea**

$$M = \int_L dm = \int_L \mu \, dL$$

La densità di massa μ può essere costante o variabile:

μ costante → **sistema omogeneo**
μ variabile → **sistema non omogeneo**

Baricentro e Momenti statici di sistemi continui

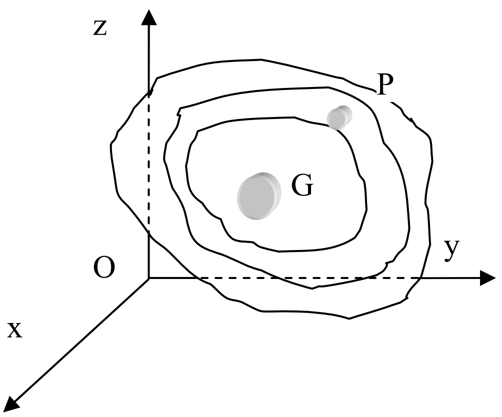
L'estensione dei concetti di Baricentro e Momento Statico ai sistemi continui ha particolare importanza nella Meccanica. Considerando un sistema continuo, l'equazione vettoriale del Baricentro risulta:

$$\boxed{M(G-O)=\int_C (P-O)\,dm} \qquad \text{con} \qquad M=\int_C dm=\int_C \mu\,dc$$

Essendo:

C regione o campo in cui è diffusa la massa — Volume V / Area A / Linea L

M massa totale del sistema continuo
G baricentro del sistema continuo
P punto generico del sistema continuo
O origine del sistema di riferimento



G (x_G; y_G; z_G)
P (x; y; z)

Proiettando l'equazione vettoriale sugli assi di riferimento si ricavano tre equazioni scalari:

$$M\,x_G=\int_C x\,\mu\,dC \qquad M\,y_G=\int_C y\,\mu\,dC \qquad M\,z_G=\int_C z\,\mu\,dC$$

Quindi le coordinate del baricentro G del sistema continuo sono:

$$x_G=\frac{\int_C x\,\mu\,dC}{M} \qquad y_G=\frac{\int_C y\,\mu\,dC}{M} \qquad z_G=\frac{\int_C z\,\mu\,dC}{M}$$

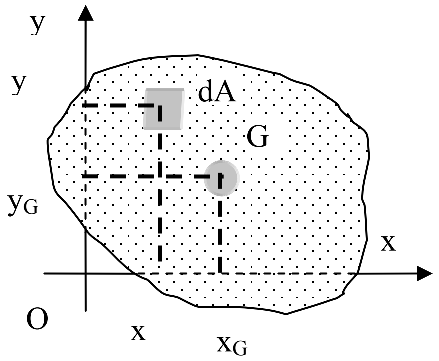
Nel caso di sistemi omogenei, essendo μ costante, le equazioni risultano:

$$x_G=\frac{1}{C}\int_C x\,dC \qquad y_G=\frac{1}{C}\int_C y\,dC \qquad z_G=\frac{1}{C}\int_C z\,dC$$

Gli integrali che compaiono nelle precedenti equazioni rappresentano i "momenti statici rispetto ai piani coordinati".

Baricentro e Momenti statici di sistemi continui piani

Nel caso in cui il campo o regione è una superficie A contenuta nel piano xy, le coordinate del baricentro della figura piana (lamina) sono:



$$x_G = \frac{\int_A x \, dA}{A}$$

$$y_G = \frac{\int_A y \, dA}{A}$$

Essendo $A = \int_A dA$ area totale

$\int_A x \, dA$ Momento Statico rispetto all'asse y: S_y

$\int_A y \, dA$ Momento Statico rispetto all'asse x: S_x

Quindi si può scrivere

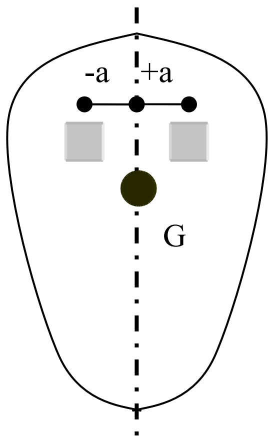
$$\left.\begin{aligned} S_y &= A \, x_G = \int_A x \, dA \\ S_x &= A \, y_G = \int_A y \, dA \end{aligned}\right\}$$ Momenti statici o di primo ordine rispetto agli assi coordinati

Queste espressioni consentono di determinare la posizione del baricentro delle figure piane omogenee.

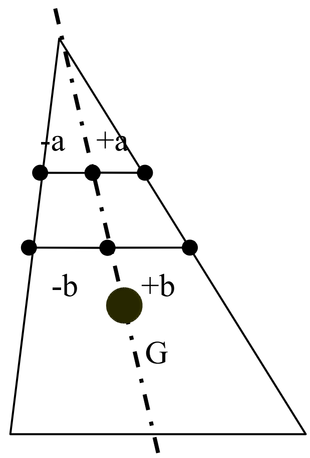
L'unità di misura dei momenti statici delle figure piane sono:

$[L^3]$, $[cm^3]$, $[m^3]$

- Dalle precedenti espressioni si desume che il **momento statico è nullo rispetto a qualsiasi retta passante per il baricentro**.
- Gli **assi di simmetria** sono rette che contengono il baricentro. Infatti se si determina il momento statico rispetto all'asse di simmetria ad ogni area elementare che si trovi con distanza positiva ne corrisponde una uguale con distanza negativa. La somma dei prodotti delle aree elementari per le distanze (momento statico) risulta uguale a zero e perciò l'asse di simmetria passa per il baricentro.



Simmetria retta



Simmetria obliqua

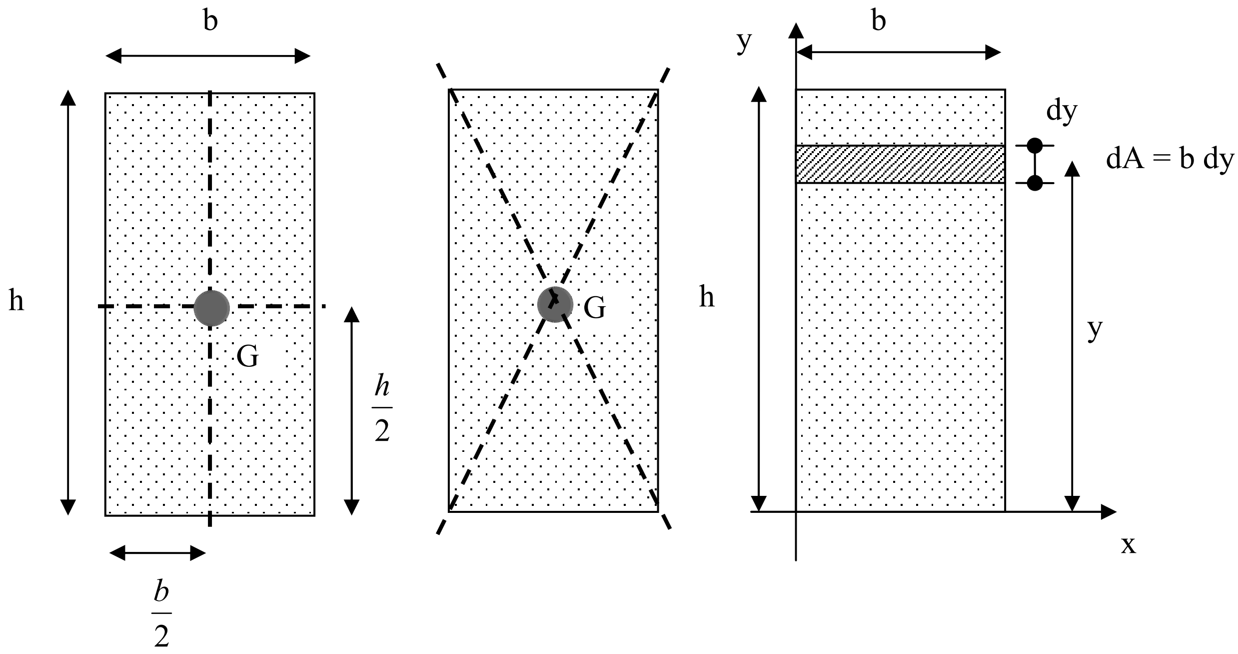
Se un'area ha un asse obliquo di simmetria, cioè se presenta una retta che bisechi tutte le corde aventi una stessa direzione, il baricentro si trova su quest'asse. Un esempio ne sono le mediane di un triangolo.

Il baricentro spesso si può determinare sulla base di considerazioni di simmetria.

Baricentro e Momenti statici di alcune figure piane

Rettangolo

Il baricentro di un rettangolo si può determinare mediante semplici considerazioni geometriche, come intersezione di due assi di simmetria normale (mediane) oppure come intersezioni delle diagonali che rappresentano due assi di simmetria obliqua l'uno coniugato alla direzione dell'altro.



Analiticamente si possono ricavare x_G e y_G determinando precedentemente i momenti statici S_x ed S_y:

$$S_x = \int_o^h y \, dA = \int_o^h b \; y \; dy = b \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h = \frac{b\,h^2}{2}$$

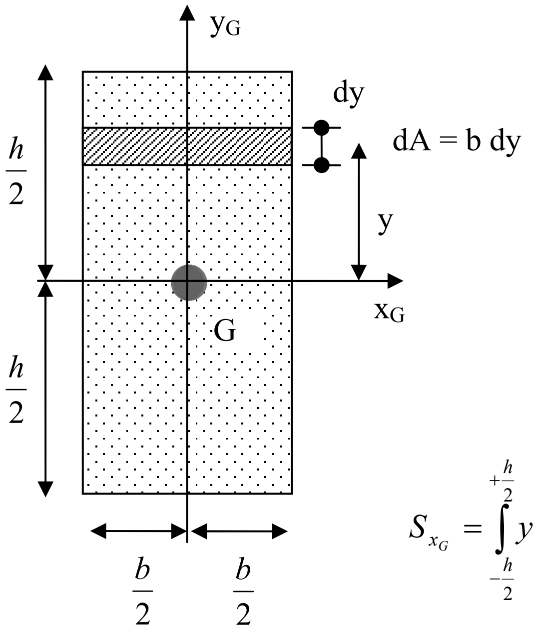
$$S_y = \int_o^b x \, dA = \int_o^b h \; x \; dx = h \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b = \frac{h\,b^2}{2}$$

Essendo A = b h risulta:

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{b\,h^2}{2}}{b\,h} = \frac{h}{2}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{h\,b^2}{2}}{b\,h} = \frac{b}{2}$$

Considerando un sistema di riferimento con entrambi gli assi passanti per il baricentro, applicando la procedura analitica si può verificare che i momenti statici rispetto agli assi baricentrici sono nulli.



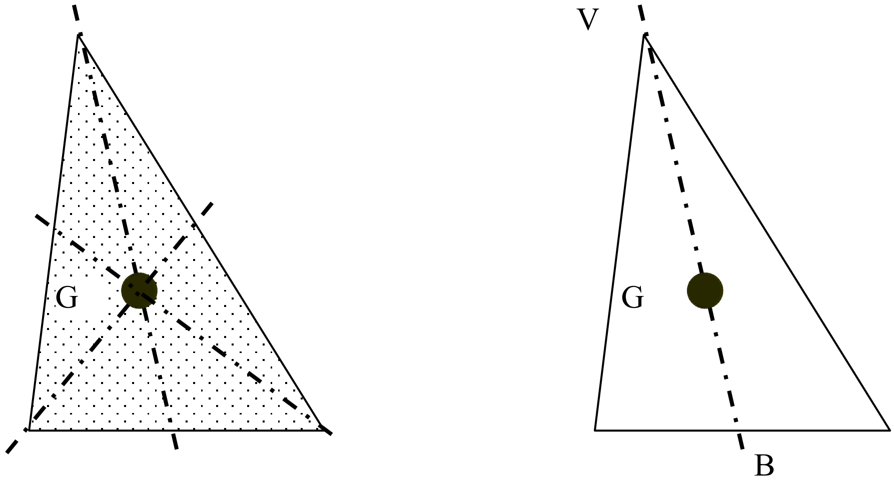
$$S_{x_G} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y\, dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} b\, y\, dy = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y\, dy = b \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b\, h^2}{8} - \frac{b\, h^2}{8} = 0$$

Analogamente si perviene a:

$$S_{y_G} = 0$$

Triangolo

Ogni mediana costituisce un asse di simmetria obliqua coniugato alla direzione della rispettiva base. Quindi il baricentro si trova nell'incrocio delle tre mediane. Il baricentro divide ciascuna mediana in due segmenti tali che il baricentro si trova a 2/3 dal rispettivo vertice.

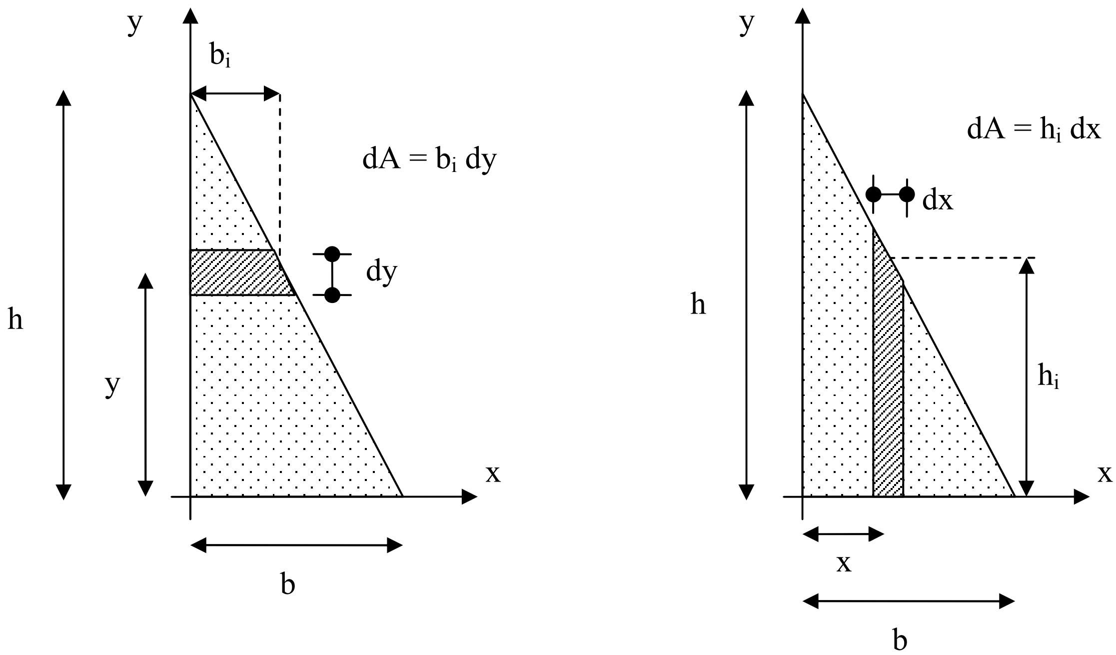


$$\overline{VG} = \tfrac{2}{3}\,\overline{VB}$$

$$\overline{GB} = \tfrac{1}{3}\,\overline{VB}$$

Triangolo rettangolo

Determinazione analitica dei momenti statici e delle coordinate del baricentro.



- Momento statico rispetto a x → S_x coordinata y_G

$$b_i = \frac{b}{h}(h-y) \qquad \Rightarrow \qquad dA = \frac{b}{h}(h-y)dy$$

$$S_x = \int_o^h y\ dA = \int_o^h \frac{b}{h}(h-y)\ y\ dy = b\int_o^h y\ dy - \frac{b}{h}\int_o^h y^2\ dy = b\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h - \frac{b}{h}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{b\,h^2}{6}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{b\,h^2}{6}}{\frac{b\,h}{2}} = \frac{h}{3}$$

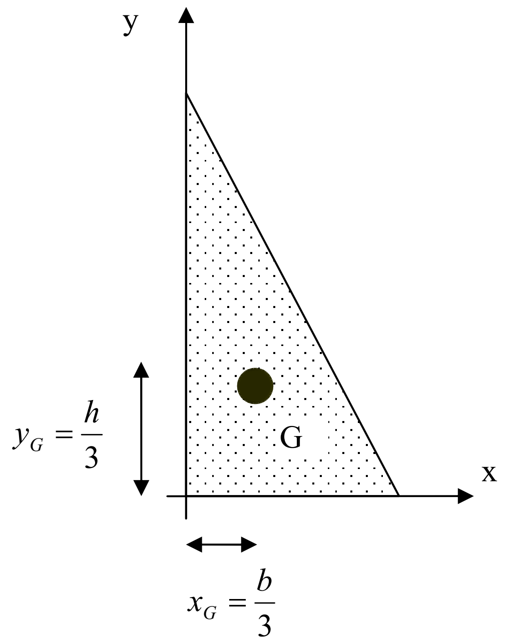
- Momento statico rispetto a y → S_y coordinata x_G

$$h_i = \frac{h}{b}(b-x) \qquad \Rightarrow \qquad dA = \frac{h}{b}(b-x)dx$$

$$S_y = \int_o^b x\ dA = \int_o^b \frac{h}{b}(b-x)\ x\ dx = h\int_o^b x\ dx - \frac{h}{b}\int_o^b x^2\ dx = h\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b - \frac{h}{b}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{h\,b^2}{6}$$

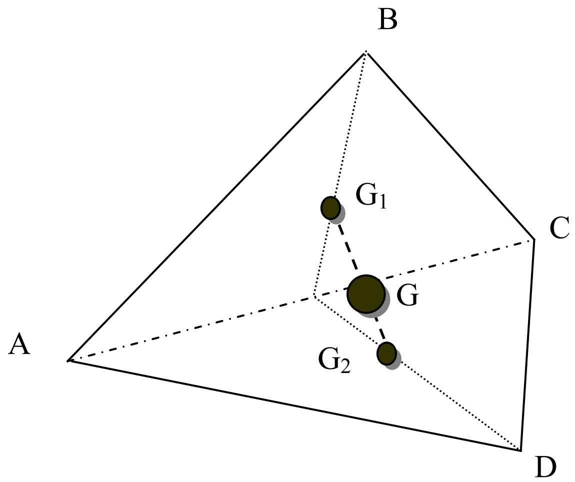
$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{h\,b^2}{6}}{\frac{b\,h}{2}} = \frac{b}{3}$$

Il baricentro dista da ogni base un terzo della relativa altezza.



Quadrilatero

Spesso il baricentro si può determinare decomponendo la figura in parti aventi baricentri noti nei quali si suppongono concentrate le aree delle parti stesse, determinando successivamente il baricentro di questi punti.



Triangolo ABC → Area A_1 Baricentro G_1

Triangolo ACD → Area A_2 Baricentro G_2

$$\frac{\overline{G_1G}}{\overline{G_2G}} = \frac{A_2}{A_1}$$

Il baricentro di un quadrilatero si può determinare considerando i baricentri G_1 e G_2 dei due triangoli in cui il quadrilatero risulta decomposto da una retta $\left(\overline{AC}\right)$ che congiunge i due vertici opposti. Il baricentro G del quadrilatero si trova sulla congiungente i baricentri (G_1 e G_2) dei due triangoli. Il baricentro G divide $\overline{G_1\, G_2}$ in parti inversamente proporzionali alle aree dei triangoli concentrate nei rispettivi baricentri.

Considerando infatti il baricentro come centro di vettori paralleli di direzione ortogonale alla congiungente $\overline{G_1\, G_2}$, per il teorema di Varignon (vedi dispensa 1) il momento rispetto a G_1 del sistema di masse elementari dovrà essere uguale al momento dell'intera massa concetrata nel baricentro. Si dovrà perciò avere:

$$\overline{G_1G_2} \cdot A_2 = \overline{G_1G} \cdot \left(A_1 + A_2\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\overline{G_1G_2}}{A_1 + A_2} = \frac{\overline{G_1G}}{A_2}$$

Analogamente rispetto a G_2:

$$\overline{G_1G_2} \cdot A_1 = \overline{G_2G} \cdot \left(A_1 + A_2\right) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\overline{G_1G_2}}{A_1 + A_2} = \frac{\overline{G_2G}}{A_1}$$

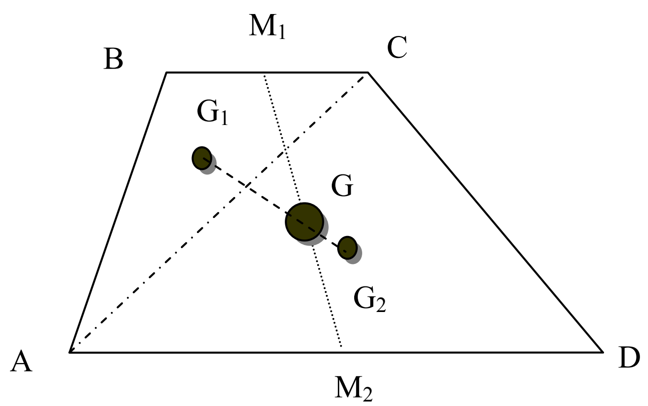
e quindi:

$$\frac{\overline{G_1G}}{A_2} = \frac{\overline{G_2G}}{A_1}$$

da cui la relazione prima riportata.

Trapezio

Se due lati del quadrilatero sono paralleli si configura un trapezio: il baricentro G si troverà allora all'intersezione fra la congiungente i baricentri, G_1 e G_2, dei due triangoli ABC e ADC, e la mediana $\overline{M_1 M_2}$. $\overline{M_1 M_2}$ costituisce un asse obliquo di simmetria.



1.7. *Momenti di secondo ordine*

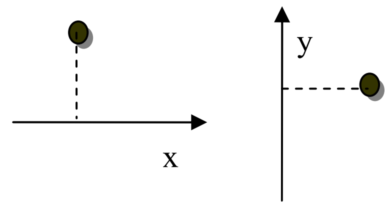
Introduzione

Lo studio dei momenti di secondo ordine, e più in generale delle caratteristiche inerziali delle figure piane, ha notevole importanza nell'analisi strutturale, in particolare per il calcolo delle deformazioni e la verifica di resistenza degli elementi prevalentemente inflessi.

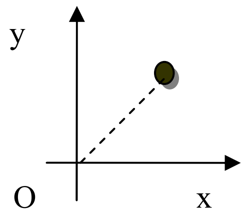
I sistemi piani di masse sono quelli che risultano di maggiore applicazione, perciò d'ora innanzi saranno gli unici esaminati. Prima si esamineranno i sistemi discreti e poi quelli continui. Nei momenti di secondo ordine i moltiplicatori delle masse, o delle aree, sono distanze elevate al quadrato o prodotti fra due distanze, quindi le lunghezze compaiono come potenze di ordine due.

I momenti di secondo ordine, considerando un sistema piano, sono:

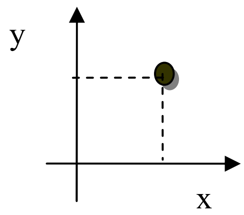
- Momento d'Inerzia **Assiale** I_x, I_y



- Momento d'Inerzia **Polare** I_O

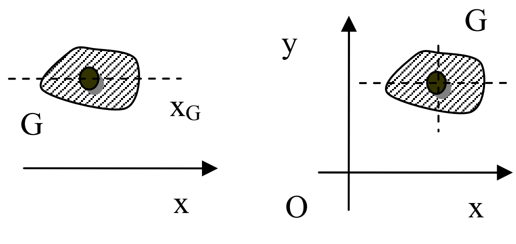


- Momento **Centrifugo** I_{xy}

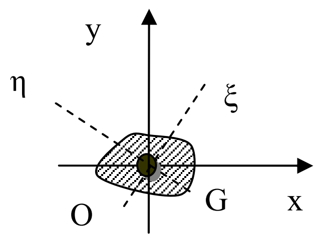


Inoltre vanno considerati i seguenti argomenti:

- Teoremi di T**rasposizione** (Assi paralleli)
  Momenti d'Inerzia e Centrifugo



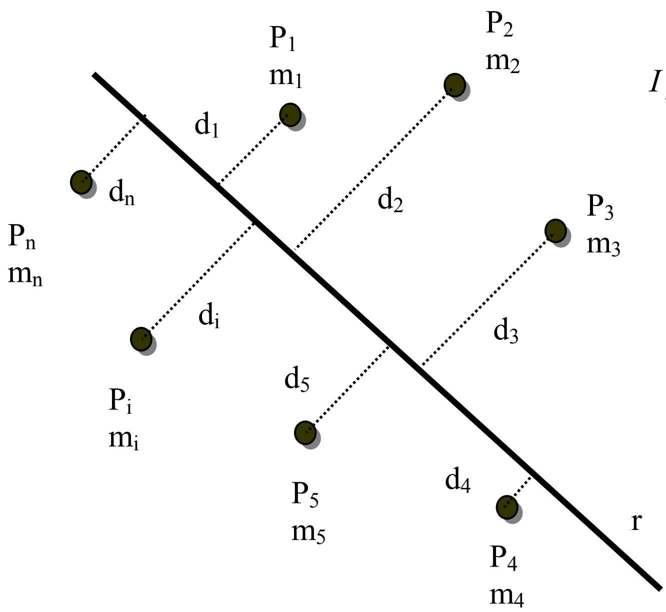
- Rotazione degli assi
  Assi centrali d'Inerzia
  Momenti centrali d'Inerzia I_η, I_ξ



1.8. Momenti di secondo ordine di sistemi discreti piani

Momento d'Inerzia Assiale

Sia dato un sistema di n punti materiali P_i in cui si considerano concentrate le masse m_i e siano d_i le distanze (misurate normalmente) dei punti da una retta r. Si definisce Momento d'Inerzia del sistema rispetto alla retta r la somma dei prodotti delle masse per i quadrati delle rispettive distanze.



$$I_r = m_1\, d_1^2 + m_2\, d_2^2 + \ldots + m_i\, d_i^2 + \ldots + m_n\, d_{ni}^2$$

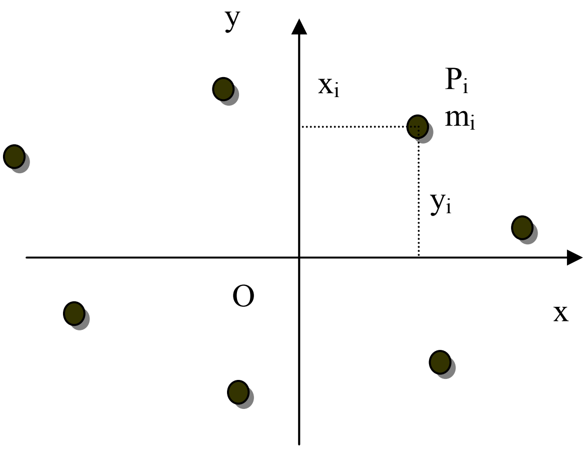
$$I_r = \sum_1^n m_i\, d_i^2$$

Considerando gli assi di riferimento x e y, il Momento d'Inerzia rispetto all'asse x risulta:

$$I_x = \sum_1^n m_i\, y_i^2$$

mentre rispetto all'asse y sarà:

$$I_y = \sum_1^n m_i\, x_i^2$$



Scrivendo

$$I_x = \sum_1^n \left(m_i \, y_i\right) y_i = \sum_1^n S_{x_i} \, y_i$$

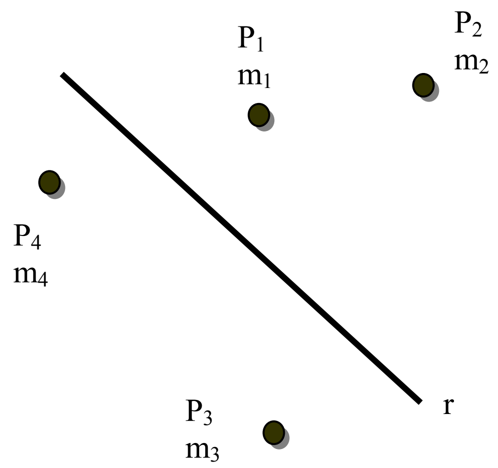
$$I_y = \sum_1^n \left(m_i \, x_i\right) x_i = \sum_1^n S_{y_i} \, x_i$$

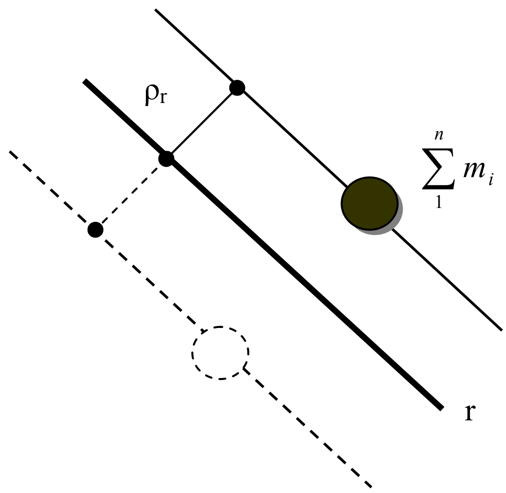
Si riconosce che il momento d'inerzia rispetto a un asse può essere visto come il momento statico dei momenti statici pensati come nuove *masse* al posto delle masse m_i.

Raggio d’Inerzia o Giratore

Si definisce *raggio d’inerzia* o *giratore* di un sistema rispetto a un generico asse *r* del piano, la **distanza** ρ_r a cui bisogna concentrare la massa totale del sistema per ottenere lo stesso momento d’inerzia del sistema dato:

$$\rho_r = \sqrt{\frac{I_r}{\sum m_i}} \qquad \Rightarrow \qquad I_r = \rho_r^2 \sum m_i$$





$$I_r = m_1\, d_1^2 + m_2\, d_2^2 + m_3\, d_{3i}^2 + m_4\, d_4^2 \qquad\qquad I_r = \rho_r^2 \sum_1^n m_i$$

- Si osservi che il raggio di inerzia ρ_r viene definito per i momenti di secondo ordine in analogia con la distanza del baricentro da una retta quando si considerano i momenti statici (o del primo ordine).
- Nella determinazione del momento d’inerzia **non è corretto** supporre l’intera massa del sistema concentrata nel baricentro, come si desume dalla definizione del raggio d’inerzia (vedi inoltre teorema del trasporto o di Huygens)
- Considerando i momenti d’inerzia rispetto agli assi di riferimento x e y, si hanno le seguenti espressioni del raggio di inerzia:

$$I_x = \sum m_i\, y_i^2 = \rho_x^2 \sum m_i \qquad \Rightarrow \qquad \rho_x = \sqrt{\frac{\sum m_i\, y_i^2}{\sum m_i}}$$

$$I_y = \sum m_i\, x_i^2 = \rho_y^2 \sum m_i \qquad \Rightarrow \qquad \rho_y = \sqrt{\frac{\sum m_i\, x_i^2}{\sum m_i}}$$

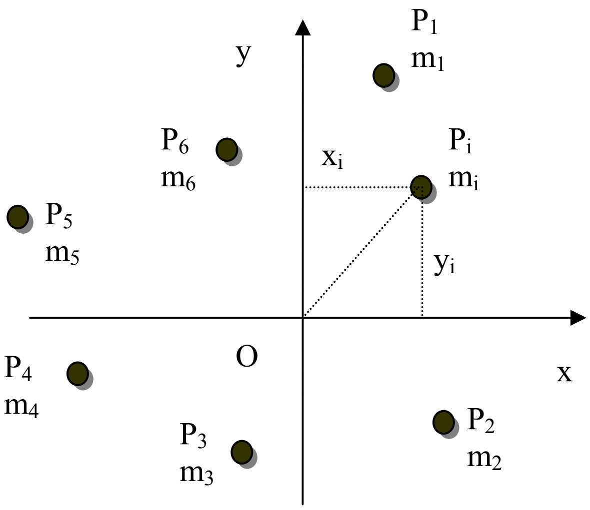
  - ρ_x rappresenta la distanza dall’asse x alla quale occorre concentrare la massa totale per ottenere lo stesso momento d’inerzia I_x del sistema di masse dato
  - ρ_y rappresenta la distanza dall’asse y alla quale occorre concentrare la massa totale per ottenere lo stesso momento d’inerzia I_y del sistema di masse dato
- Il raggio d’inerzia dipende dalla retta considerata, quindi **non è** un’invariante del sistema.

Momento d'Inerzia Polare

Si definisce Momento d'Inerzia Polare rispetto a un punto O del piano, la somma dei prodotti delle masse per i quadrati delle rispettive distanze:

$$I_O = \sum_1^n m_i\, r_i^2$$

Considerando il polo coincidente con l'origine di un sistema di riferimento xy, risulta:



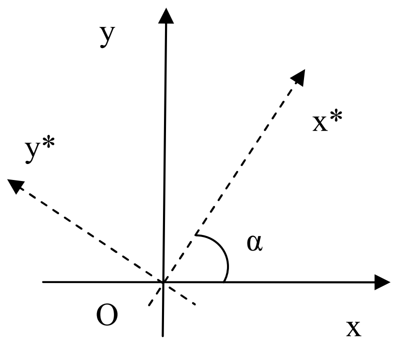
$$I_O = \sum_1^n m_i\, r_i^2 = \sum_1^n m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

che è equivalente a:

$$I_O = \sum_1^n m_i\, x_i^2 + \sum_1^n m_i\, y_i^2 = I_x + I_y$$

Il momento d'inerzia polare rispetto a un punto O è uguale alla somma dei momenti d'inerzia assiali valutati rispetto agli assi x e y passanti per O.

Più in generale si può affermare che il momento d'inerzia rispetto a un punto risulta uguale alla somma dei momenti d'inerzia rispetto a due rette ortogonali qualsiasi passanti per il polo. Questa proprietà permette di determinare I_O quando sono noti I_x e I_y, o i momenti d'inerzia riferiti ad altri assi ortogonali passanti per il polo.

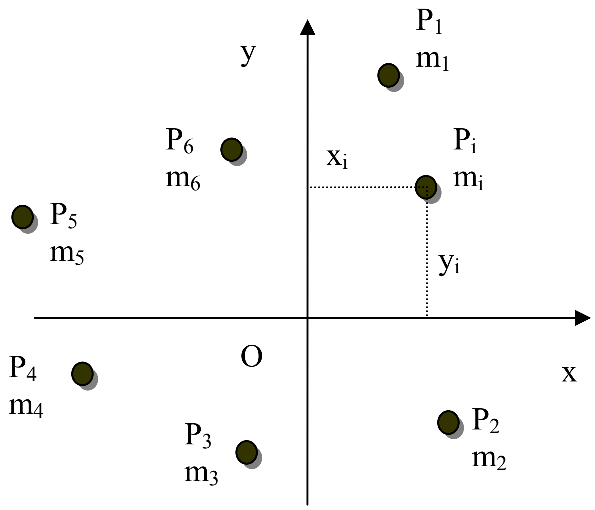


$$I_O = I_x + I_y = I_{x*} + I_{y*}$$

I_O è un invariante per qualsiasi angolo α, purché si consideri sempre lo stesso punto O.

Momento Centrifugo o Prodotto d'Inerzia

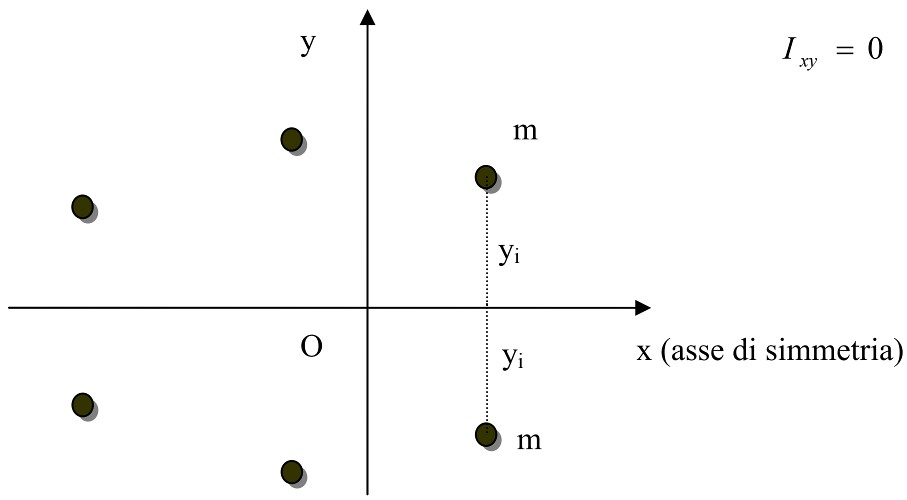
Si definisce Momento Centrifugo di un sistema di masse rispetto a due rette x e y del piano, la somma dei prodotti delle masse per le rispettive distanze dalle due rette:



$$I_{xy} = \sum_{1}^{n} m_i \, x_i \, y_i$$

Il momento centrifugo o prodotto d'inerzia può risultare positivo, negativo o nullo, dato che i segni di ciascun termine della sommatoria dipendono dai segni delle due distanze.

Se la distribuzione delle masse risulta simmetrica rispetto a un asse il momento centrifugo è nullo e, come si vedrà più avanti (p.38), tale asse di simmetria è asse principale d'inerzia.



$$I_{xy} = 0$$

Sussistendo la simmetria assiale, di masse uguali, la sommatoria avrà un termine negativo, - m x_i y_i, per ciascun termine positivo, m x_i y_i.

1.9. Teoremi di trasposizione. Assi paralleli

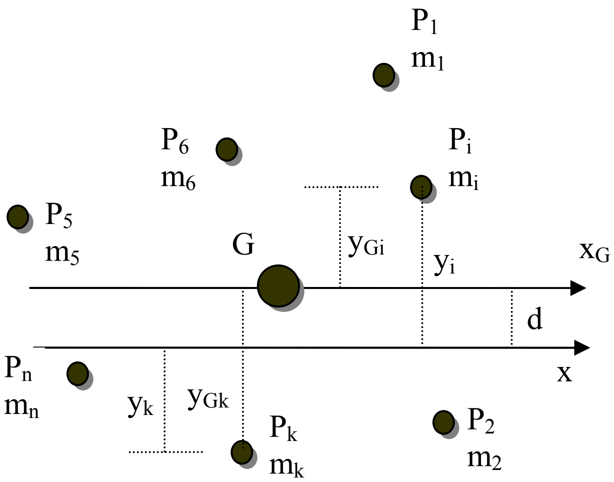
Questi teoremi stabiliscono le relazioni esistenti tra i momenti di secondo ordine rispetto ad assi baricentrici e i momenti di secondo ordine rispetto ad assi paralleli a quelli passanti per il baricentro del sistema.

I teoremi di trasposizione o trasporto sono tre: uno riferito ai Momenti d'Inerzia Assiali, il secondo al Momento d'Inerzia Polare e l'altro ai Momenti Centrifughi.

Trasposizione dei Momenti d'Inerzia

Siano dati un asse x_G baricentrico e una retta parallela x, e sia *d* la distanza fra le due rette. Per una massa generica m_i la distanza dall'asse baricentrico sia y_{oi} perciò la distanza dalla retta x sarà $y_i = y_{Gi} + d$.

I momenti d'inerzia rispetto a x_G e x sono:



$$I_{G_x} = \sum_1^n m_i \, y_{G_i}^2$$

$$I_x = \sum_1^n m_i \, y_i^2$$

Sostituendo y_i con $y_{Gi} + d$, risulta:

$$I_x = \sum_1^n m_i \left(y_{G_i} + d\right)^2$$

che può essere scritta:

$$I_x = \sum_1^n m_i \, y_{G_i}^2 + 2\,d \sum_1^n m_i \, y_{G_i} + d^2 \sum_1^n m_i = I_{G_x} + 2\,d\,S_{G_x} + d^2 \sum_1^n m_i$$

notando che $\sum_1^n m_i \, y_{G_i} = S_{G_x}$, momento statico del sistema rispetto a un asse baricentrico **è nullo** si può scrivere

$$I_x = I_{G_x} + d^2 \sum_1^n m_i$$

Il momento d'inerzia rispetto a un asse è uguale al momento d'inerzia rispetto a un asse baricentrico e parallelo più la massa totale moltiplicata per il quadrato della distanza fra i due assi.

Si può anche dire che il Momento d'Inerzia rispetto a un asse qualsiasi si ottiene aggiungendo al Momento d'Inerzia rispetto a un asse parallelo passante per il baricentro il momento $d^2\ \Sigma m_i$, che avrebbe la massa totale se fosse concentrata nel baricentro. Dal teorema di trasposizione del Momento d'Inerzia si desumono le seguenti osservazioni:

- Tra tutti gli assi paralleli a una direzione data, il momento d'inerzia è minimo per quello baricentrico. Il momento d'inerzia cresce col quadrato della distanza della retta dal baricentro.
- Per la determinazione del Momento d'Inerzia **non è corretto** supporre semplicemente l'intera massa del sistema concentrata nel baricentro. Quindi per i momenti d'inerzia **non sussiste** un teorema similare a quello di Varignon per i momenti statici (cfr. p.7).
- Noto il Momento d'Inerzia rispetto a un asse, è possibile determinare quello baricentrico parallelo, infatti:

$$I_{G_x} = I_x - d^2 \sum_1^n m_i$$

Per i raggi d'inerzia ρ_x e ρ_{Gx} si ricava la seguente espressione:

$$\rho_x^2 = \rho_{G_x}^2 + d^2$$

ρ_{Gx}: raggio d'inerzia rispetto all'asse baricentrico parallelo

Infatti il teorema di trasposizione si può scrivere:

$$\rho_x^2 \sum m_i = \rho_{G_x}^2 \sum m_i + d^2 \sum m_i$$

dalla quale si ottiene la relazione precedente fra ρ_x e ρ_{Gx}.

Trasposizione del Momento d'Inerzia Polare

Poiché si è visto che (cfr. p.28)

$$I_O = I_x + I_y$$

e si è detto poc'anzi che

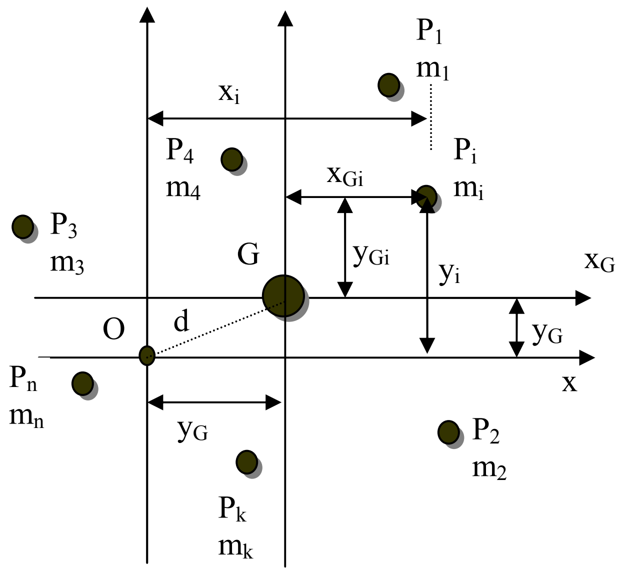
$$I_x = I_{x_G} + y_G^2 \sum_1^n m_i \qquad \text{e} \qquad I_y = I_{y_G} + x_G^2 \sum_1^n m_i$$

Si può scrivere

$$I_O = I_x + I_y = I_{x_G} + y_G^2 \sum_1^n m_i + I_{y_G} + x_G^2 \sum_1^n m_i = I_G + \left(x_G^2 + y_G^2\right)\sum_1^n m_i$$

$$I_O = I_G + d^2 \sum_1^n m_i$$

Il momento d'inerzia polare rispetto a un punto qualunque è uguale al momento d'inerzia polare rispetto al baricentro più la massa totale moltiplicata per il quadrato della distanza fra i due punti.



$$x_i = x_{G_i} + x_G$$

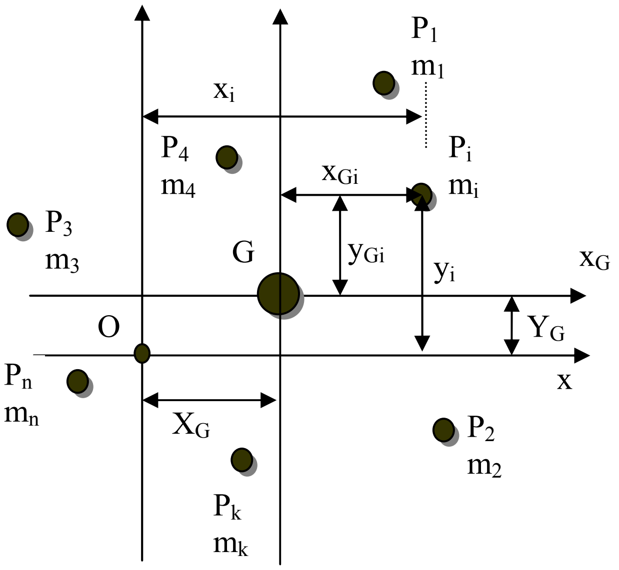
$$y_i = y_{G_i} + y_G$$

$$d^2 = x_G^2 + y_G^2$$

x_G e y_G, coordinate del baricentro rispetto agli assi x e y, rappresentano le distanze fra gli assi. d rappresenta la distanza fra i punti G ed O.

Trasposizione dei Momenti Centrifughi

Siano date due coppie di assi, x_G e y_G baricentrici e x e y a quelli paralleli. Per una massa generica m_i le distanze risultano:



$$x_i = x_{G_i} + X_G$$
$$y_i = y_{G_i} + Y_G$$

X_G e Y_G, coordinate del baricentro rispetto agli assi x e y, rappresentano le distanze fra gli assi.

Il momento centrifugo rispetto agli assi x e y risulta:

$$I_{xy} = \sum_1^n m_i\, x_i\, y_i = \sum_1^n m_i \left(x_{G_i} + X_G\right)\left(y_{G_i} + Y_G\right)$$

$$I_{xy} = \sum_1^n m_i\, x_{G_i}\, y_{G_i} + Y_G \sum_1^n m_i\, x_{G_i} + X_G \sum_1^n m_i\, y_{G_i} + X_G\, Y_G \sum_1^n m_i$$

$$I_{xy} = \sum_1^n m_i\, x_{G_i}\, y_{G_i} + Y_G S_{G_y} + X_G S_{G_x} + X_G\, Y_G \sum_1^n m_i$$

Poiché però i momenti statici rispetto ad assi baricentrici, S_{Gx} e S_{Gy}, sono nulli si ha

$$I_{xy} = I_{x_G y_G} + X_G\, Y_G \sum_1^n m_i$$

Il momento centrifugo rispetto a due assi x e y è uguale a quello rispetto agli assi x_G e y_G, baricentrici e paralleli, più la massa totale moltiplicata per il prodotto delle distanze tra gli assi.

Caso particolare

Se X_G e Y_G sono tali da comportare

$I_{x_G y_G} = 0$ si ottiene $I_{xy} = x_G\, y_G \sum_1^n m_i$

Si osservi che X_G e Y_G possono essere quantità positive, nulle o negative, perciò il loro prodotto può essere positivo nullo o negativo. Se:

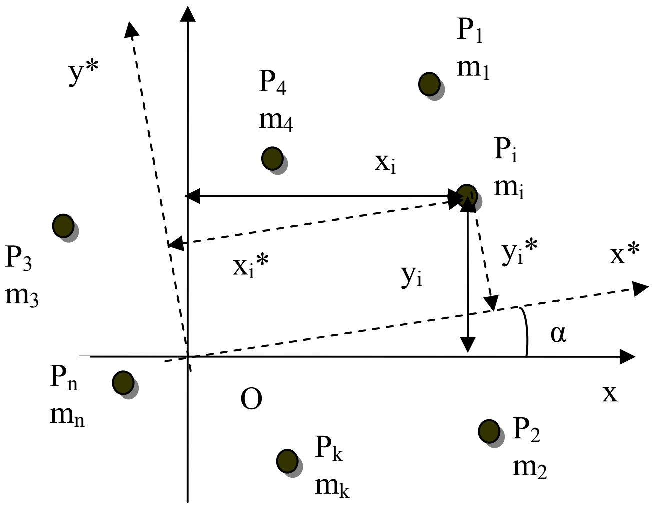
$X_G = 0$ o $Y_G = 0$ $\Rightarrow$ $I_{xy} = I_{x_G y_G}$

1.10. Rotazioni degli assi di riferimento

Variazione dei Momenti di Secondo Ordine

La conoscenza della variazione dei momenti del secondo ordine al ruotare degli assi di riferimento, risulta necessaria per lo studio degli **Assi Principali d'Inerzia** e dei corrispondenti **Momenti Principali d'Inerzia**.

Si considerino due assi ortogonali x e y fissi e due assi x* e y* ortogonali e girevoli intorno all'origine, essendo α l'angolo che x* forma con x; per una generica massa m_i concentrata nel punto P_i, le coordinate rispetto al sistema x*y* risultano:



$$x_i^* = y_i \sin\alpha + x_i \cos\alpha$$

$$y_i^* = y_i \cos\alpha - x_i \sin\alpha$$

formule di trasformazione delle coordinate.

Applicando le definizioni dei Momenti del Secondo Ordine, ricordando le formule trigonometriche di duplicazione:

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ e $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

e riordinando si perviene alle seguenti espressioni:

$$I_{x^*} = \sum_1^n m_i\, y^{*2}_i = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - 2 I_{xy} \sin\alpha\, \cos\alpha$$

$$I_{y^*} = \sum_1^n m_i\, x^{*2}_i = I_x \sin^2\alpha + I_y \cos^2\alpha + 2 I_{xy} \sin\alpha\, \cos\alpha$$

$$I_{x^*y^*} = \sum_1^n m_i\, x^*_i\, y^*_i = I_{xy} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right)\sin 2\alpha$$

Le espressioni precedenti forniscono la variazione dei momenti d'inerzia e del momento centrifugo al ruotare il sistema di riferimento intorno all'origine in funzione dell'angolo α. Esse sono state desunte per un sistema discreto di masse però sono **valide anche per i sistemi continui**.

Si noti che O è un punto generico del piano.

Si può inoltre notare che sommando le espressioni di I_{x*} e I_{y*} si ottiene

$$I_O = I_{x*} + I_{y*} = I_x + I_y$$

per cui si ha conferma di quanto già visto e cioè che il momento d'inerzia polare è costante alla rotazione α degli assi (cfr. p.28).

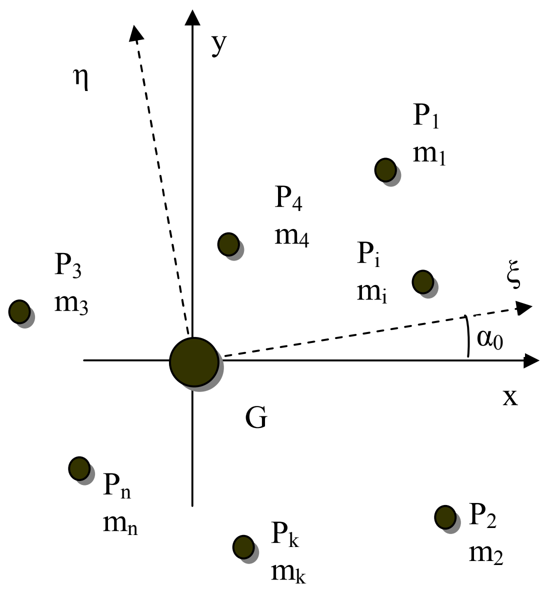
In altre parole, la somma dei momenti d'inerzia rispetto a due assi ortogonali è invariante rispetto a una rotazione degli assi attorno all'origine. Inoltre la somma risulta uguale al Momento d'Inerzia Polare rispetto al punto d'intersezione degli assi. In ogni caso il valore di questa costante dipende dal punto considerato.

1.11. Assi principali d'Inerzia – Momenti Principali

Assi Baricentrici

La determinazione della posizione degli assi baricentrici, rispetto ai quali i valori del momento d'inerzia risultano massimo e minimo, è di notevole importanza nelle verifiche di deformazione e resistenza delle travi.

Gli assi baricentrici per i quali il Momento d'Inerzia risulta massimo o minimo, si chiamano **assi centrali d'inerzia**, e i momenti d'inerzia rispetto a tali assi si chiamano **momenti centrali d'inerzia**.



ξ, η   Assi Principali d'Inerzia Baricentrici
I_ξ, I_η Momenti Principali d'Inerzia Baricentrici
$I_{\xi\eta} = 0$

$$\tan\ 2\alpha_0 = \frac{2\, I_{x_G y_G}}{I_{y_G} - I_{x_G}}$$

ξ, η sono gli assi principali d'inerzia baricentrici.

Assi Principali d'Inerzia per il punto O

Considerando due assi ortogonali x e y passanti per un generico punto O del piano, come abbiamo visto (vedi p.34), se si fanno ruotare gli assi intorno a O i momenti di secondo ordine variano secondo le relazioni:

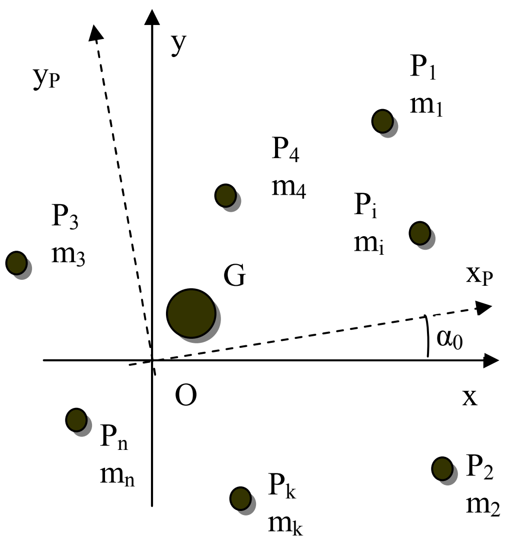
$$I_{x^*} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2 I_{xy} \sin \alpha \, \cos \alpha$$

$$I_{y^*} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + 2 I_{xy} \sin \alpha \, \cos \alpha$$

$$I_{x^* y^*} = I_{xy} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right) \sin 2\alpha$$

Si dicono **assi principali d'inerzia per il punto O** la coppia di assi ortogonali (O, x_P e y_P) rispetto ai quali il valore del momento d'inerzia risulta massimo o minimo e si annulla il centrifugo.

I momenti d'inerzia relativi agli assi principali d'inerzia, prendono il nome di **momenti principali d'inerzia** e rappresentano i valori estremi della funzione momento d'inerzia del sistema rispetto a una retta passante per in punto O.



x_P, y_P Assi Principali d'Inerzia per il punto O
I_{xp}, I_{yp} Momenti Principali d'Inerzia per il punto O
$I_{xp\,yp} = 0$

$$\tan \, 2\alpha_P = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}$$

si noti O ≠ G

La posizione degli assi principali d'inerzia dipende dal punto O considerato.

Abbiamo visto che:

$$I_{x*} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2\, I_{xy} \sin \alpha \, \cos \alpha$$

$$cioè \quad I_{x*} = f(\alpha)$$

Quindi è interessante determinare i valori di α per i quali si annulla la derivata di I_{x*} (condizione di massimo o minimo). Ricordando le formule trigonometriche di duplicazione, già riportate al paragrafo 1.10, e le regole di derivazione:

$$D[f(x)]^n = n\, f(x)^{n-1} f'(x)$$
$$Df(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$D \cos^2 \alpha = -2 \sin \alpha \cos \alpha$$
$$D \sin^2 \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$
$$D \sin \alpha \cos \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Operando risulta:

$$\frac{dI_{x*}}{d\alpha} = (I_y - I_x) \sin 2\alpha - 2\, I_{xy} \cos 2\alpha$$

$$per \quad \frac{dI_{x*}}{d\alpha} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (I_y - I_x) \sin 2\alpha - 2\, I_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

dalla quale segue:

$$\tan\ 2\alpha_P = \frac{2\, I_{xy}}{I_y - I_x}$$

Questa espressione viene soddisfatta da due valori dell'angolo $2\alpha_P$ che differiscono di 180°, e perciò da due valori di α_P che differiscono di 90°. Gli assi corrispondenti a questi due valori di α_P per i quali I_{x*} è massimo o minimo sono ortogonali e vengono denominati **assi principali d'inerzia**.

Allo stesso risultato si perviene uguagliando a zero la derivata $\dfrac{dI_{y*}}{d\alpha}$.

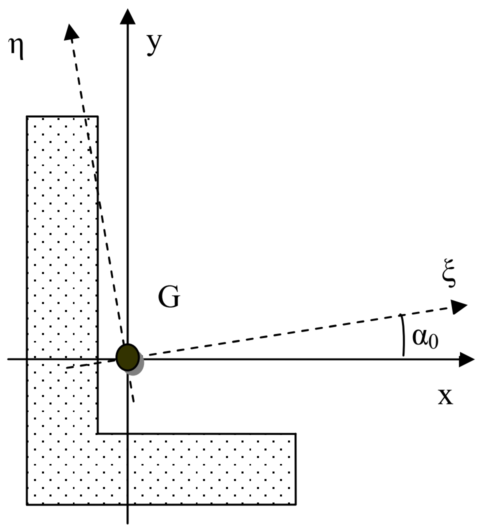
I due assi principali d'inerzia vengono indicati con $\mathbf{x_P}$ e $\mathbf{y_P}$, mentre i relativi momenti principali sono $\mathbf{I_{xp}}$ e $\mathbf{I_{yp}}$ risultando uno **massimo** e l'altro **minimo**.

Inoltre si verifica che per $\tan 2\alpha_P = \dfrac{2\, I_{xy}}{I_y - I_x}$ risulta nullo il momento centrifugo $\mathbf{I_{xp\ yp}}$. Si può quindi dire che il **momento centrifugo** rispetto a due assi principali d'inerzia è **nullo**.

1.12. Assi Principali Centrali d'Inerzia

Quando il punto O coincide con il baricentro G del sistema, gli assi principali vengono chiamati **assi principali d'inerzia baricentrici** o **assi principali centrali d'inerzia**. Questi assi hanno particolare rilevanza per le loro applicazioni. I relativi momenti d'inerzia si dicono **momenti principali d'inerzia baricentrici** oppure **momenti principali centrali d'inerzia.**

Come detto, queste considerazioni sviluppate per un sistema discreto di masse, sono **valide per i sistemi continui**.



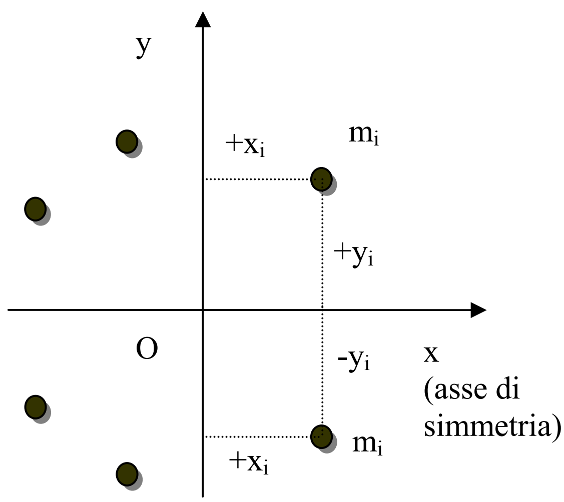
ξ, η	Assi Centrali d'Inerzia
I_ξ	Momenti Centrale d'Inerzia (Massimo)
I_η	Momenti Centrale d'Inerzia (Minimo)
$I_{\xi\eta} = 0$	

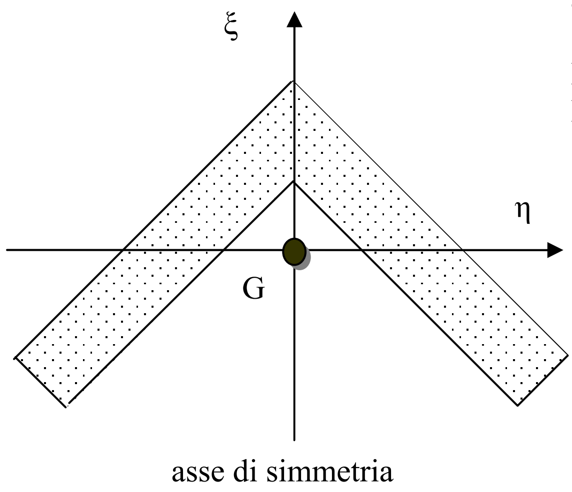
$$\tan\ 2\alpha_0 = \frac{2\,I_{x_G y_G}}{I_{y_G} - I_{x_G}}$$

Simmetria

La determinazione degli assi principali d'inerzia baricentrici è agevolata quando il sistema possiede un asse di simmetria ortogonale, poiché il momento centrifugo con rispetto a questo asse e ad altro qualsiasi ortogonale è nullo. Pertanto un **asse di simmetria è asse principale centrale**.

Per ogni massa di coordinate (x; y) esiste un'altra massa uguale di coordinate (x; -y), oppure per ciascuna massa di coordinate (x; y) ne esiste un'altra uguale di coordinate (-x; y). Il momento centrifugo di ciascuna coppia di masse simmetriche è nullo e anche nullo è quello dell'intero sistema.





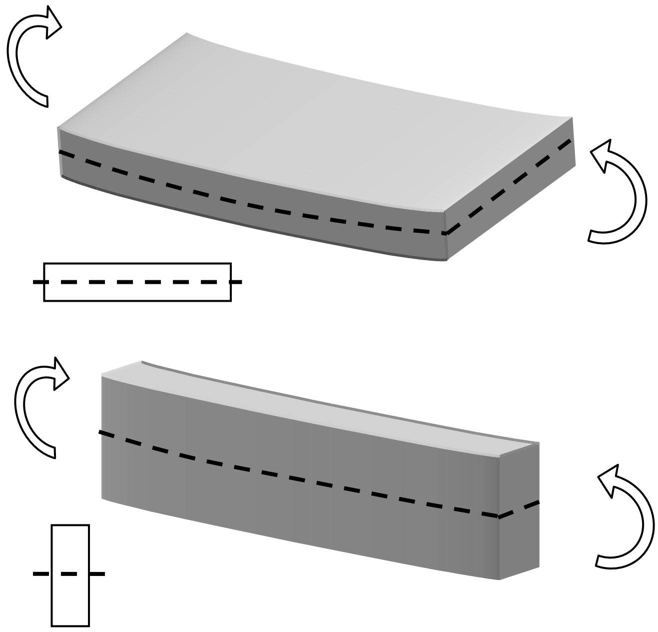
ξ	Bisettrice, Asse di Simmetria, Asse Centrale d'Inerzia
I_{ξ}	Momenti Centrale d'Inerzia (Massimo)
I_{η}	Momenti Centrale d'Inerzia (Minimo)

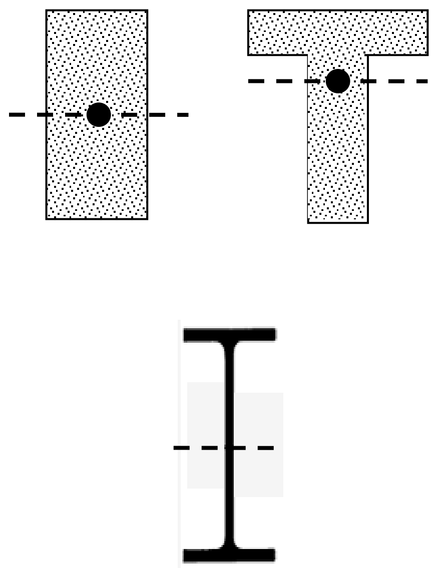
1.13. Sistemi continui piani – Momenti di Secondo Ordine

Introduzione

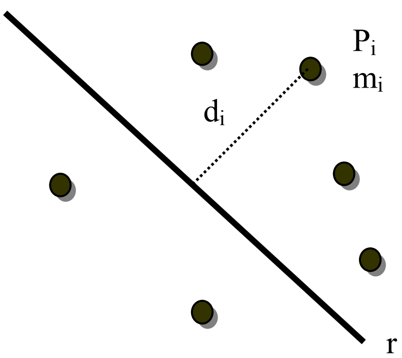
Per le sezioni trasversali delle travi (figure piane) la determinazione delle caratteristiche inerziali risulta fondamentale. Esse intervengono in diversi problemi (deformazioni, resistenze, ecc.) e possono guidare la scelta della forma della sezione e l'ottimizzazione della distribuzione dei materiali.

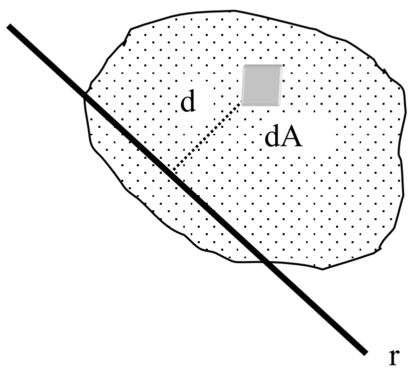
Per le sezioni delle travi in acciaio la posizione del baricentro, così come i valori dei momenti di secondo ordine vengono date dai manuali.





Un sistema continuo può essere visto come un insieme di infinite masse elementari dm concentrate negli infiniti punti P (x; y) della regione in cui la massa è diffusa. Quindi nel limite si può passare dalle espressioni corrispondenti ai sistemi discreti a quelle relative ai sistemi continui sostituendo alle sommatorie gli integrali.



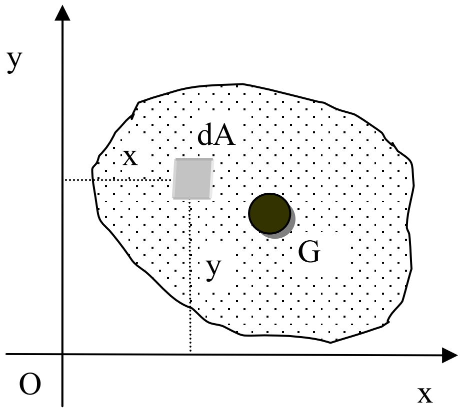


Massa Totale $\quad \sum m_i \quad \Rightarrow \quad$ *Area* $\quad A = \int_A dA$

Momento d'Inerzia $\quad I_r = \sum m_i \, d_i^2 \quad \Rightarrow \quad I_r = \int_A d^2 \, dA$

Momenti d'Inerzia Assiali dei Sistemi Continui

Si considerino sistemi continui di masse distribuite su delle aree, con densità superficiale costante. Se la massa è data dal prodotto di un volume di profondità unitaria per una densità unitaria, il sistema si riduce ad un'**area**. I momenti d'inerzia assiali risultano così definiti:



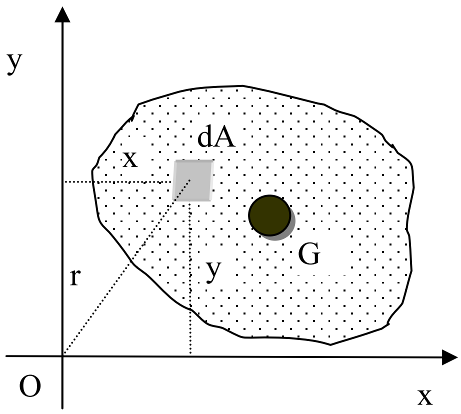
$$I_x = \int_A y^2 \, dA$$

$$I_y = \int_A x^2 \, dA$$

L'unità di misura dei momenti d'Inerzia delle figure piane è: [L^4], [m^4], [cm^4]

Momento d'Inerzia Polare dei Sistemi Continui

Il Momento d'Inerzia Polare di una figura piana rispetto a un punto O è l'integrale dei prodotti delle aree infinitesimali per il quadrato della distanza dal punto O.



$$I_O = \int_A r^2 \, dA$$

poiché $r^2 = x^2 + y^2$

sostituend o risulta :

$$I_O = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA$$

cioé

$$I_O = I_y + I_x$$

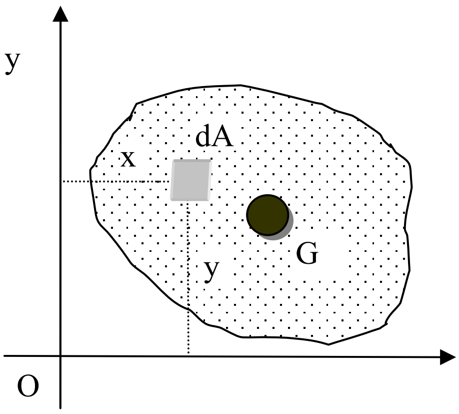
Il momento d'inerzia polare rispetto a un punto O risulta uguale alla somma dei momenti d'inerzia rispetto a due rette ortogonali qualunque passanti per il punto O.

Quindi il momento inerzia polare risulta invariante al ruotare gli assi di riferimento intorno al punto O.

Questa proprietà consente di determinare I_O quando si conoscono i momenti assiali I_x e I_y o i momenti assiali d'inerzia riferiti a qualsiasi coppia di rette ortogonali passanti per O. Ovviamente I_O è sempre positivo e la sua dimensione è L^4 e si misura in m^4 o in cm^4, come tutti i momenti di secondo ordine riguardanti figure piane.

Momento d'Inerzia Centrifugo o Prodotto d'Inerzia dei Sistemi Continui

Si consideri una figura piana e un sistema di riferimento x y. Si definisce Momento Centrifugo o Prodotto d'Inerzia rispetto agli assi x e y l'integrale:

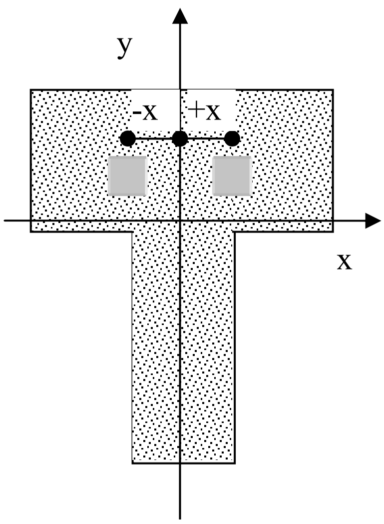


$$I_{xy} = \int_A x\, y\, dA$$

L'unità di misura dei Momenti d'Inerzia Centrifughi delle figure piane è: $[L^4]$, $[m^4]$, $[cm^4]$

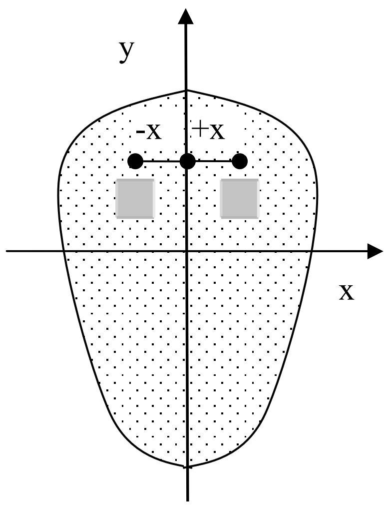
Per alcune figure semplici è possibile determinare il momento centrifugo mediante integrazione diretta. Nel caso di figure composte è, talvolta, possibile la decomposizione in parti semplici i cui momenti centrifughi siano noti per ricavare successivamente il momento centrifugo d'assieme. A questo scopo risulta utile conoscere la legge di trasposizione del momento centrifugo nel caso di assi di riferimento paralleli.

Se una figura ha un **asse di simmetria** che corrisponde a uno degli assi rispetto ai quali si determina il momento centrifugo, quest'ultimo risulta nullo. Per ogni area elementare dA la cui distanza dall'asse di simmetria è positiva, esiste un'altra area elementare dA la cui distanza da detto asse è negativa. I prodotti elementari corrispondenti x y dA si annullano mutuamente perciò risulta nullo l'integrale.



Asse di simmetria

$$I_{xy} = 0$$



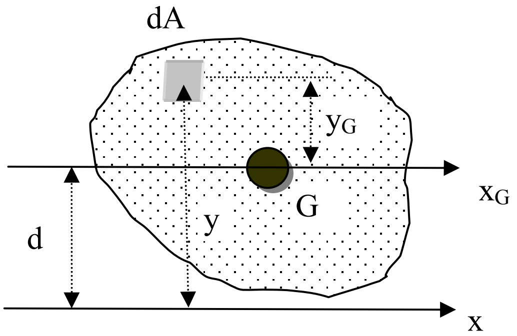
Asse di simmetria

1.14. Teoremi di Trasposizione – Assi Paralleli (Teoremi di Christian Huygens [1629-1697])

Teorema di trasposizione dei Momenti d'Inerzia (assiale e polare) dei Sistemi Continui

Si consideri un asse x_G baricentrico e un asse parallelo x. Per l'area elementare dA, la distanza dall'asse baricentrico sia y_G, perciò la distanza dall'asse x sarà: $y = y_G + d$, essendo d la distanza tra i due assi.

I momenti d'inerzia rispetto a x_G e x sono:



$$I_{x_G} = \int_A y_G^2 \, dA$$

$$I_x = \int_A y^2 \, dA$$

Sostituendo y con $y_G + d$ si ottiene:

$$I_x = \int_A y^2 \, dA = \int_A \left(y_G + d\right)^2 dA = \int_A \left(y_G^2 + 2\, y_G\, d + d^2\right) dA$$

$$I_x = \int_A y_G^2 \, dA + 2\, d \int_A y_G \, dA + d^2 \int_A dA$$

Tenendo conto che $S_{x_G} = \int_A y_G dA = 0$, momento statico rispetto a un asse baricentrico, e che $\int_A dA = A$, si ha:

$$\boxed{I_x = I_{x_G} + d^2 A}$$

Il momento d'inerzia rispetto a un asse è uguale al momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico e parallelo, più l'area della figura moltiplicata per il quadrato della distanza fra i due assi.

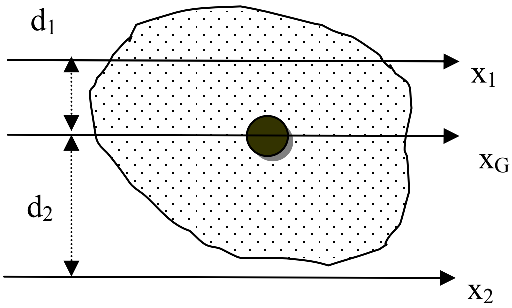
Analogamente a quanto già visto per i sistemi discreti (vedi p.32), anche per quelli continui si può dimostrare il teorema di trasposizione del momento d'inerzia polare:

$$\boxed{I_O = I_G + d^2 A}$$

Il momento d'inerzia polare di una figura piana rispetto a un punto O è uguale al momento d'inerzia polare rispetto al baricentro G, più l'area A della figura moltiplicata per il quadrato della distanza d fra i due punti.

Assi paralleli

Se si considerano due assi paralleli x_1 e x_2 distanti d_1 e d_2 dall'asse baricentrico parallelo x_G, si ha:



$$I_{x_1} = I_{x_G} + d_1^2 A$$

$$I_{x_2} = I_{x_G} + d_2^2 A$$

e sostituendo nella seconda il valore di I_{xG} ottenuto dalla prima si ha:

$$\boxed{I_{x_2} = I_{x_1} + \left(d_2^2 - d_1^2\right)A}$$

Questa espressione consente di calcolare il momento d'inerzia rispetto a un asse x_2, noto quello rispetto a un asse parallelo qualunque x_1 e la posizione del baricentro.

Raggi d'inerzia

Dal teorema di trasposizione si ha che

$$I_x = I_{x_G} + d^2 A$$

dividendo primo e secondo membro per l'area A si ottiene:

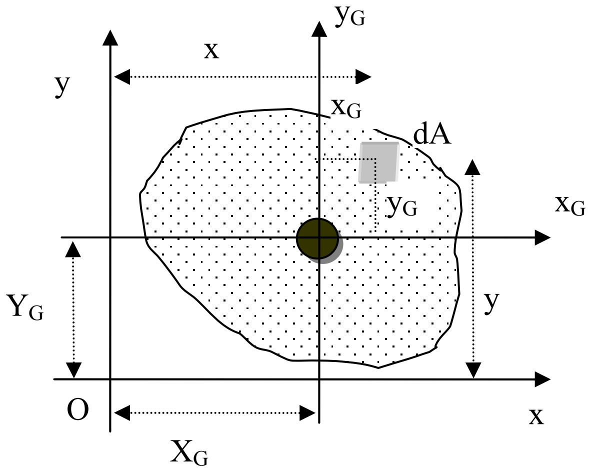
$$\frac{I_x}{A} = \frac{I_{x_G}}{A} + d^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\rho_x^2 = \rho_{x_G}^2 + d^2}$$

Questa relazione ci consente di determinare il raggio d'inerzia $\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$ di una figura rispetto a un asse x, in funzione del raggio d'inerzia $\rho_{x_G} = \sqrt{\frac{I_{x_G}}{A}}$ rispetto a un asse x_G, baricentrico e distante d dall'asse parallelo a x.

Teorema di trasposizione dei Momenti d'Inerzia Centrifughi dei Sistemi Continui (Assi Paralleli)

Si considerino due coppie di assi, x_G e y_G baricentrici e x e y a quelli paralleli.

Per l'area elementare dA, le distanze degli assi x e y dagli assi baricentrici siano rispettivamente Y_G e X_G, che sono pertanto le coordinate di G rispetto a O, per cui le distanze assolute dagli assi x e y saranno:



$$y = y_G + Y_G$$

$$x = x_G + X_G$$

I momenti centrifughi sono:

$$I_{x_G y_G} = \int_A y_G \ x_G \ dA$$

$$I_{xy} = \int_A y \ x \ dA$$

Sostituendo le distanze nella espressione di I_{xy} si ha:

$$I_{xy} = \int_A (y_G + Y_G)(x_G + X_G)dA = \int_A (y_G x_G + Y_G x_G + y_G X_G + Y_G X_G)dA$$

$$I_{xy} = \int_A y_G x_G \ dA + Y_G \int_A x_G \ dA + X_G \int_A y_G \ dA + Y_G X_G \int_A dA$$

Il secondo e il terzo termine della somma sono nulli poiché i momenti statici rispetto ad assi baricentrici sono uguali a zero:

$$S_{y_G} = \int_A x_G \ dA = 0 \qquad S_{x_G} = \int_A y_G \ dA = 0$$

Il primo termine rappresenta invece il momento centrifugo rispetto agli assi baricentrici e quindi

$$\boxed{I_{xy} = I_{x_G y_G} + Y_G X_G \ A}$$

Il momento centrifugo rispetto a due assi x e y è uguale a quello rispetto agli assi x_G e y_G, baricentrici e paralleli, più l'area della figura moltiplicata per il prodotto delle distanze tra gli assi.

- Se il momento centrifugo rispetto agli assi baricentrici è nullo, il momento centrifugo rispetto agli assi x e y paralleli ai baricentrici risulta

$$\boxed{I_{xy} = Y_G X_G \ A}$$

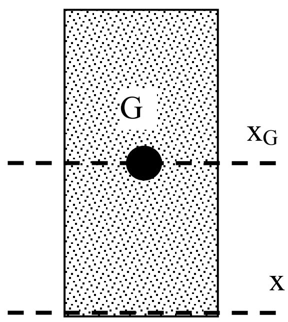
- Il teorema della trasposizione può essere impiegato per determinare il momento centrifugo rispetto a una coppia di assi baricentrici quando è noto quello rispetto a una coppia di assi paralleli:

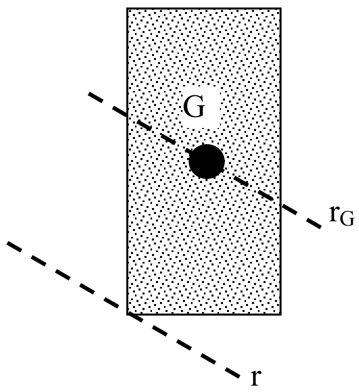
$$\boxed{I_{x_G y_G} = I_{xy} - Y_G X_G \ A}$$

1.15. Rotazioni degli assi di riferimento per i Sistemi Continui. Variazione dei momenti del secondo ordine

In generale la determinazione dei momenti del secondo ordine mediante integrazione diretta può essere agevole per alcune posizioni degli assi, mentre in altre situazioni la forma della sezione (figura piana) può porre delle difficoltà.

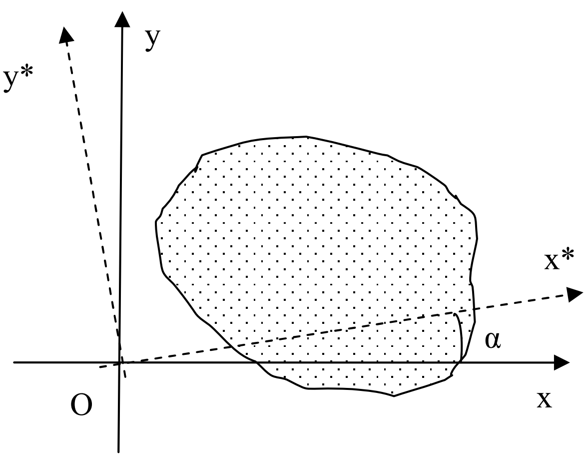
Ad esempio, il momento d'inerzia di un rettangolo può essere facilmente ricavato mediante integrazione diretta per qualsiasi asse parallelo a uno dei lati. Invece l'integrazione diretta risulta più complessa se l'asse considerato è inclinato rispetto ai lati.





$\left.\begin{array}{l} I_{x_G} \\ I_x \end{array}\right\}$ *Integrazione agevole* $\qquad$ $\left.\begin{array}{l} I_{r_G} \\ I_r \end{array}\right\}$ *Integrazione complicata*

Pertanto risultano molto utili le **espressioni analitiche che consentono di ottenere i momenti di secondo ordine rispetto ad assi inclinati** in funzione di quelli corrispondenti a opportune coppie di assi di riferimento. Inoltre esse permettono l'**individuazione degli assi principali**. Come già visto, le espressioni derivate per i sistemi discreti **sono valide anche per i sistemi continui**.

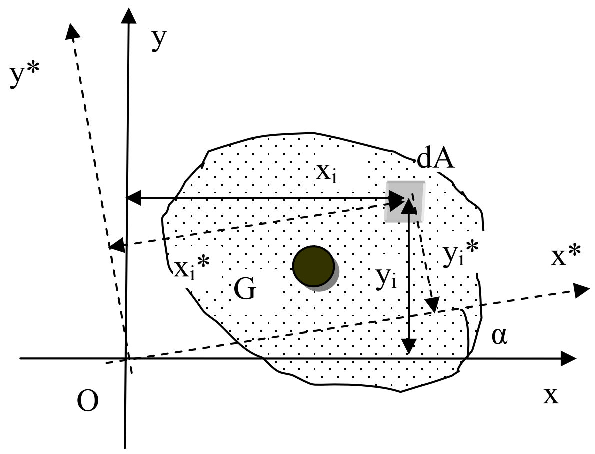


$$\left.\begin{array}{l} I_{x^*} \\ I_{y^*} \end{array}\right\} f\left(\alpha\,;\, I_x\,;\, I_y\,;\, I_{xy}\right)$$

$$y_i^* = y_i \cos\alpha - x_i \sin\alpha$$

Noti i momenti di secondo ordine rispetto alla coppia di assi ortogonali di riferimento x e y con origine O, punto generico del piano, si possono determinare i momenti I_{x*}; e I_{y*} e I_{x*y*} rispetto a due assi ortogonali x* e y* passanti per O e definiti dall'angolo α che x* fa con x. Cioè la nuova coppia di assi di riferimento x* e y* risulta definita dalla rotazione α intorno ad O.

Le coordinate di un'area elementare dA nel sistema x^* e y* possono esprimersi in funzione delle coordinate nel sistema xy:



$$x^* = y \sin \alpha + x \cos \alpha$$

$$y^* = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse x* è:

$$I_{x*} = \int_A y^{*2} \, dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 \, dA$$

$$I_{x*} = \int_A y^2 \cos^2 \alpha \, dA - \int_A 2\, x\, y \sin \alpha \cos \alpha \, dA + \int_A x^2 \sin^2 \alpha \, dA$$

$$I_{x*} = \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A x\, y\, dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 \, dA$$

quindi si ha:

$$\boxed{I_{x*} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2\, I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha}$$

In modo analogo si perviene alle seguenti relazioni:

$$\boxed{I_{y*} = I_x \sin^2 \alpha + I_x \cos^2 \alpha + 2\, I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\boxed{I_{x*y*} = I_{xy} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}\left(I_x - I_y\right) \sin 2\alpha}$$

$$\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}}$$

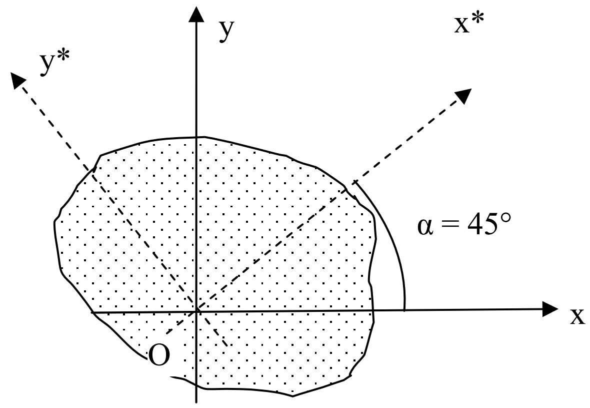
- Sommando $I_{x*} + I_{y*}$ risulta:
  $I_{x*} + I_{y*} = I_x (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + I_y (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$
  essendo $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ si ottiene:
  $I_{x*} + I_{y*} = I_x + I_y = \text{costante} = I_O$
  Vale a dire che rispetto a una rotazione degli assi attorno all'origine O rimangono **inva-**

riati:
- la somma dei momenti d'inerzia rispetto a due assi ortogonali
- il momento d'inerzia polare rispetto a O

- Per il **caso particolare α = 45°**, applicando le relazioni che forniscono I_{x*}, I_{y*} e I_{x*y*}, si ottiene:

$$I_{x^*} = \frac{I_x + I_y}{2} - I_{xy} \qquad I_{y^*} = \frac{I_x + I_y}{2} + I_{xy}$$

$$I_{x^*y^*} = \frac{I_x - I_y}{2}$$

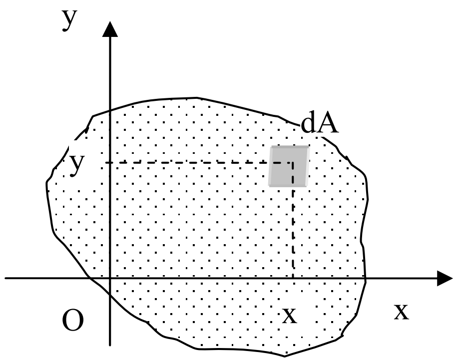


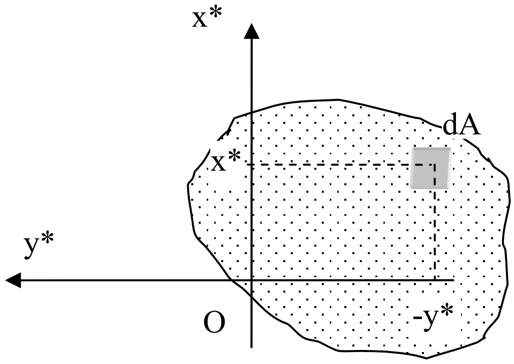
- Le espressioni di I_{x*}, I_{y*} e I_{x*y*} si possono applicare in qualsiasi punto del piano.

1.16. Assi principali. Sistemi continui piani

Data una figura piana, è sempre possibile trovare due assi ortogonali rispetto ai quali il momento centrifugo si annulli.

Infatti, si considerino gli assi x e y passanti per il punto O di una figura piana, se si ruotano di 90°, la nuova posizione degli assi x* e y*.





Le relazioni fra le nuove coordinate e quelle originarie sono:

$x^* = y$	
$y^* = -x$	$-y^* = x$

- Il prodotto d'inerzia rispetto agli assi originali è: $I_{xy} = \int_A y\,x\,dA$
- Mentre rispetto ai nuovi assi x* e y*, il momento centrifugo risulta: $I_{x^*y^*} = \int_A y^*\,x^*\,dA$,

  sostituendo x* e y* si perviene a:

  $$I_{x^*y^*} = \int_A y^*\,x^*\,dA = \int_A (-x)\,y\,dA = -\int_A x\,y\,dA = -I_{xy}$$

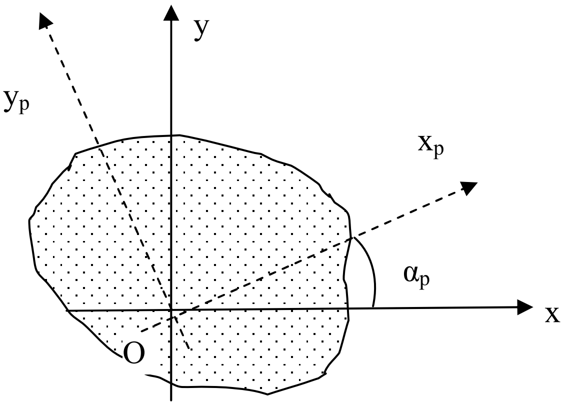
  $$\boxed{I_{x^*y^*} = -I_{xy}}$$

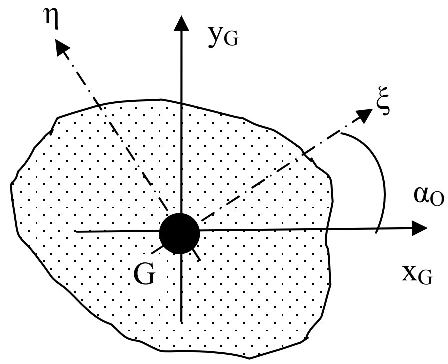
  A causa della rotazione pari a 90°, il momento centrifugo mantiene il suo valore assoluto ma **cambia di segno**.

  Dato che il momento centrifugo varia in modo continuo con l'angolo di rotazione, deve esistere una certa posizione degli assi, compresa tra quelle precedentemente esaminate, nella quale **il momento centrifugo si annulla**.

  Gli assi x_p e y_p per i quali **si annulla il momento centrifugo sono assi principali d'inerzia**.

  Quando il punto O coincide con il baricentro G della figura, la coppia di assi per i quali risulta nullo il momento centrifugo si dice coppia degli **assi principali centrali d'inerzia** e tali assi si dicono anche assi principali d'inerzia baricentrici.





(O; x_p; y_p) **Assi Principali**
I_{Xp}, I_{Yp} Momenti Principali

$$\tan 2\alpha_p = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

$I_{XpYp} = 0$

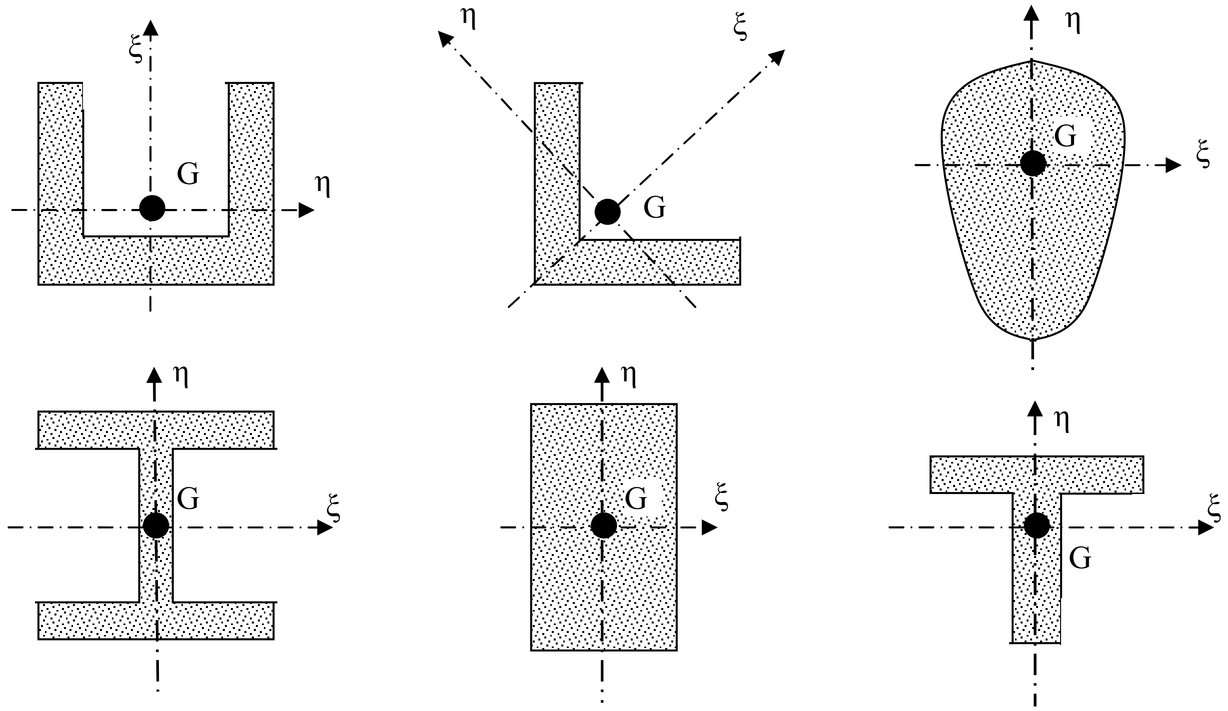
(G; ξ; η) **Assi Principali Centrali**
I_ξ I_η Momenti Centrali

$$\tan 2\alpha_O = \frac{2I_{x_G y_G}}{I_{Gy} - I_{Gx}}$$

$I_{\xi\eta} = 0$

Come già segnalato precedentemente per i sistemi discreti, anche nel caso di sistemi continui si può osservare che:

- Agli assi principali per il punto generico O corrispondono momenti d'inerzia che rappresentano valori estremi (massimo o minimo) della funzione momento d'inerzia della figura rispetto a una retta passante per O. Tali momenti si chiamano Momenti Principali d'Inerzia per il punto O. → I_{Xp} e I_{Yp}.
- Gli assi principali d'inerzia passanti per il baricentro G si dicono **assi principali centrali d'inerzia ξ ed η**. Ad essi corrispondono momenti d'inerzia I_ξ e I_η che rappresentano valori estremi (massimo o minimo) della funzione momento d'inerzia della figura rispetto a una retta passante per il baricentro G. Tali momenti si chiamano Momenti Centrali d'Inerzia e sono grandezze di notevole importanza per le applicazioni. La determinazione degli assi principali centrali d'inerzia è facilitata quando la figura possiede un **asse di simmetria**, in tal caso l'asse di simmetria è un asse principale centrale d'inerzia, l'altro asse principale centrale è la retta ortogonale passante per il baricentro G.



$I_{\xi} \rightarrow$ Massimo $\quad$ $I_{\eta} \rightarrow$ Minimo $\quad$ $I_{\xi\eta} = 0$

Espressioni dei momenti centrali d'inerzia

Per determinare i Momenti Centrali d'Inerzia I_ξ e I_η in funzione dei momenti di secondo ordine baricentrici I_{Gx}, I_{Gy} e I_{XgYg} e dell'angolo α_O che gli assi principali centrali ξ ed η formano con gli assi di riferimento x_g e y_g, si utilizzano le seguenti relazioni:

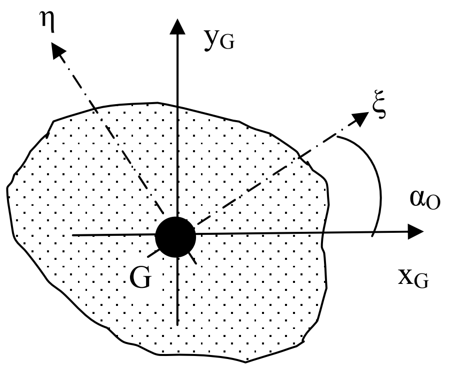
$I_{x*} = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - 2\, I_{xy} \sin\alpha \cos\alpha$

$I_{y*} = I_x \sin^2\alpha + I_y \cos^2\alpha + 2\, I_{xy} \sin\alpha \cos\alpha$

che sono valide per qualsiasi punto del piano.

Considerando il baricentro G e usando l'equazione $\tan 2\alpha_O = \dfrac{2I_{XgYg}}{I_{Gy} - I_{Gx}}$ per precisare l'angolo α_O, mediante opportuni passaggi si ottengono le seguenti espressioni di I_ξ e I_η:

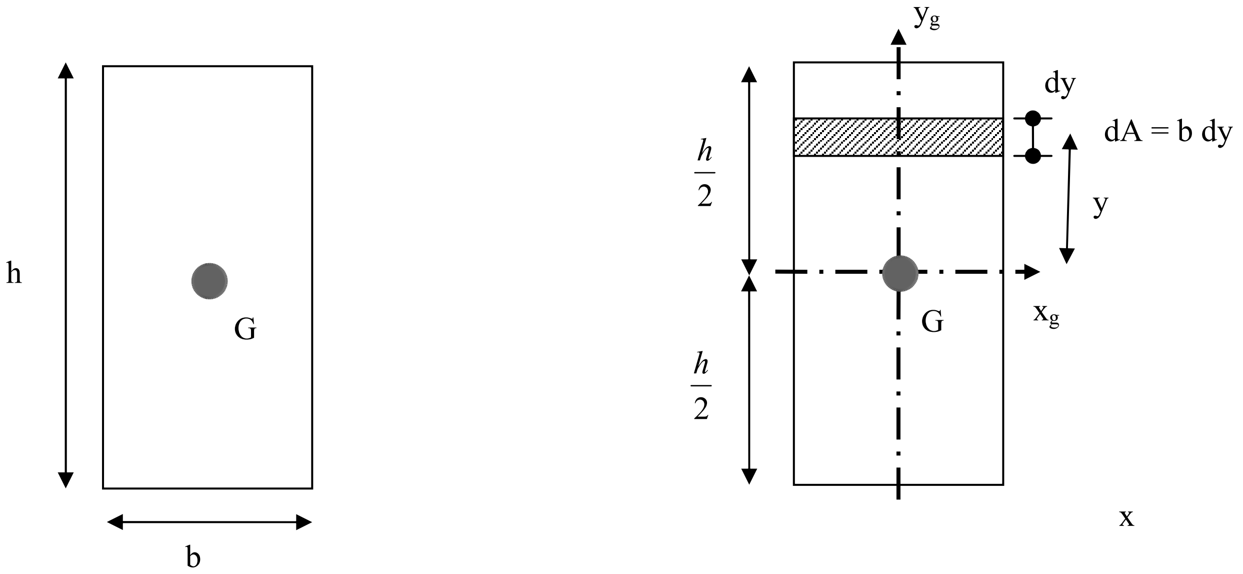
$$\boxed{\begin{aligned} I_\xi &= \frac{I_{Gx}+I_{Gy}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{Gx}-I_{Gy}\right)^2 + 4\,I_{XgYg}^2} \\ I_\eta &= \frac{I_{Gx}+I_{Gy}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{Gx}-I_{Gy}\right)^2 + 4\,I_{XgYg}^2} \end{aligned}}$$



Caratteristiche inerziali di alcune figure piane

Rettangolo

Dato un rettangolo di lati b e h, poiché la figura è doppiamente simmetrica, gli assi baricentrici paralleli ai lati sono assi principali centrali d'inerzia.



Per determinare il momento d'inerzia I_{Gx} rispetto all'asse baricentrico x_G si considera come elemento d'area una fascia infinitesima, dA = b dy, parallela a x_g. (Non è necessario che gli elementi di area siano infinitesimi in ogni direzione, ma possono essere strisce parallele agli assi purché la distanza sia in ogni punto la stessa).

Essendo in generale $I_x = \int_A y^2 \, dA$, in questo caso si ha:

$$I_{Gx} = \int_{-h/2}^{h/2} b\, y^2 \, dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{b\, h^3}{12}$$

In modo analogo si ottiene $I_{Gy} = \dfrac{h\, b^3}{12}$

$$\boxed{I_{Gx} = \frac{b\, h^3}{12} \qquad\qquad I_{Gy} = \frac{h\, b^3}{12}}$$

Il momento d'inerzia polare rispetto a G vale

$$I_{Gx} = I_{Gx} + I_{Gy} = \frac{b\, h}{12}\left(b^2 + h^2\right)$$

I raggi d'inerzia o giratori si determinano nel seguente modo:

$$I_{Gx} = \int_A y^2\, dA = \rho_{Gx}^2 \int_A dA \qquad \Rightarrow \qquad \rho_{Gx} = \sqrt{\frac{I_{Gx}}{A}}$$

$$I_{Gy} = \int_A x^2\, dA = \rho_{Gy}^2 \int_A dA \qquad \Rightarrow \qquad \rho_{Gy} = \sqrt{\frac{I_{Gy}}{A}}$$

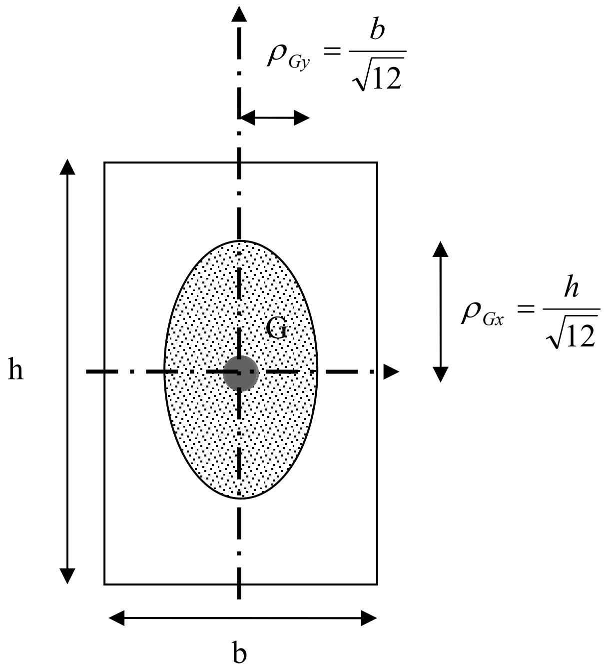
Essendo

$$I_{Gx} = \frac{b\,h^3}{12} \qquad\qquad I_{Gy} = \frac{h\,b^3}{12} \qquad\qquad A = b\,h$$

sostituendo si ottiene:

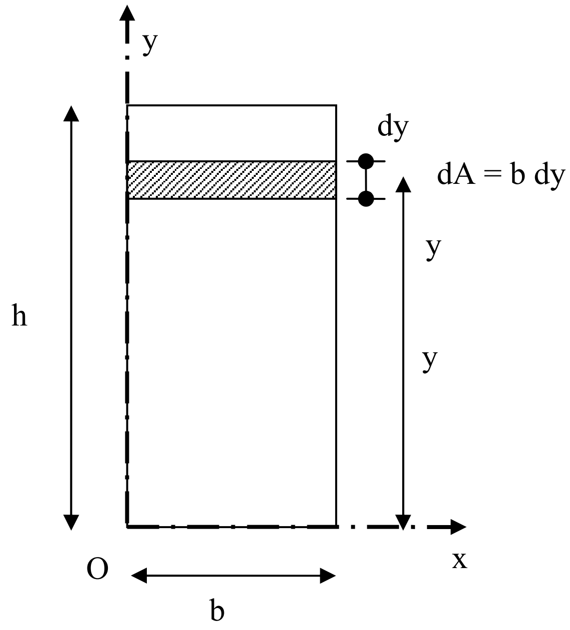
$$\rho_{Gx} = \sqrt{\frac{b\,h^3}{12\,b\,h}} = \frac{h}{\sqrt{12}} \cong 0.289\,h$$

$$\rho_{Gy} = \sqrt{\frac{b^3\,h}{12\,b\,h}} = \frac{b}{\sqrt{12}} \cong 0.289\,b$$



ρ_{Gx} e ρ_{Gy} sono **raggi centrali d'inerzia**. L'**ellisse centrale d'inerzia** è quella rappresentata in figura.

Il momento d'inerzia I_x rispetto all'asse x coincidente con la base risulta:



$$I_x = \int_A y^2\, dA = \int_0^h b\, y^2\, dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{b\, h^3}{3}$$

I_x si può anche dedurre da I_{Gx} mediante il teorema di trasposizione:

$$I_x = I_{Gx} + d^2\, A$$

essendo $d = \dfrac{h}{2}$

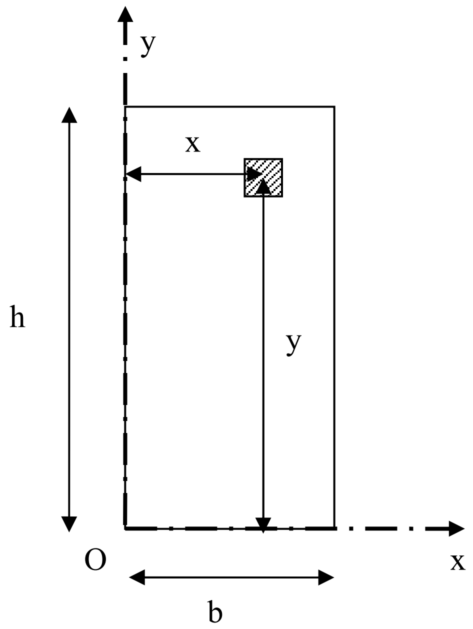
$$I_x = \frac{b\, h^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 b\, h = \frac{b\, h^3}{12} + \frac{b\, h^2}{4} = \frac{b\, h^3}{3}$$

$$\boxed{I_x = \frac{b\, h^3}{3}}$$

Analogamente si ha $I_y = \dfrac{b^3\, h}{3}$

Il momento d'inerzia polare rispetto a O vale $I_O = I_x + I_y = \dfrac{bh}{3}\left(b^2 + h^2\right)$

Momento centrifugo rispetto agli assi coincidenti con i lati di un rettangolo.
L'espressione del momento centrifugo rispetto agli assi xy è:



$$I_{xy} = \int_A y\, x\, dA = \int_A y\, x\, dy\, dx \qquad dA = dx\, dy$$

$$I_{xy} = \int_0^h \int_0^b y\, x\, dy\, dx = \int_0^h y \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b dy$$

$$I_{xy} = \frac{b^2}{2} \int_0^b y\, dy = \frac{b^2}{2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h = \frac{b^2\, h^2}{4}$$

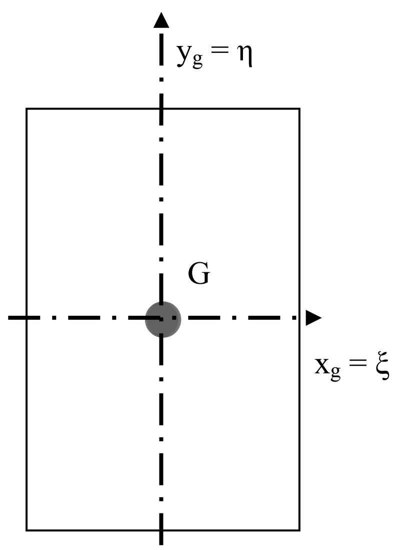
$$\boxed{I_{xy} = \frac{b^2\, h^2}{4}}$$

Applicando il teorema di trasposizione si può verificare che il momento centrifugo rispetto ad aggi baricentrici x_g e y_g è nullo, dal momento che le mediane che definiscono G sono assi di simmetria.

$$I_{X_g Y_g} = I_{xy} - x_G\, y_G\, A$$

Essendo $x_G = \frac{b}{2}$, $y_G = \frac{h}{2}$, $A = b\, h$ e $I_{xy} = \frac{b^2 h^2}{4}$ si ha:

$$I_{X_g Y_g} = \frac{b^2 h^2}{4} - \frac{b}{2} \frac{h}{2} b\, h = 0$$



Essendo $I_{X_g Y_g} = 0, \quad I_{Gy} = \dfrac{b\,h^3}{12}, \quad I_{Gx} = \dfrac{b^3\,h}{12}$, si ha

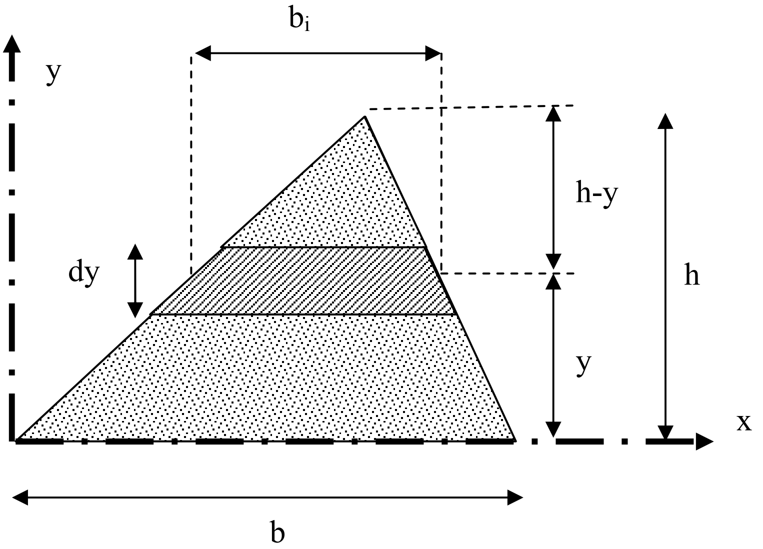
$$\tan(2\,\alpha_0) = \frac{0}{\dfrac{b\,h^3}{12} - \dfrac{b^3\,h}{12}} = 0$$

$$\left\langle \begin{array}{l} 2\,\alpha_0 = 0° \;\; \rightarrow \;\; \alpha_0 = 0° \rightarrow \xi \\ 2\,\alpha_0 = 180° \rightarrow \alpha_0 = 90° \rightarrow \eta \end{array} \right\rangle \quad \textit{assi centrali}$$

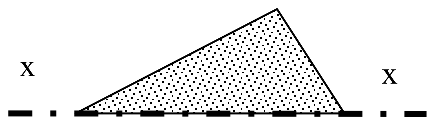
Minimo $\quad I_\eta = \dfrac{b^3\,h}{12} = I_{Gx}$ $\qquad\qquad$ Massimo $\quad I_\xi = \dfrac{b\,h^3}{12} = I_{Gy}$

Triangolo

Calcolare il momento d'inerzia di un triangolo rispetto agli assi x e x_g.



$$\frac{b_i}{h-y}=\frac{b}{h} \rightarrow b_i=\frac{b}{h}(h-y)$$



Si considera una striscia infinitesima parallela alla base b, di area $dA=b_i\ dy=\frac{b}{h}(h-y)dy$

Il momento rispetto all'asse x è dato da:

$$I_x=\int_A y^2 dA=\int_0^h y^2\ b_i\ dy=\frac{b}{h}\int_0^h (h-y)y^2 dy$$

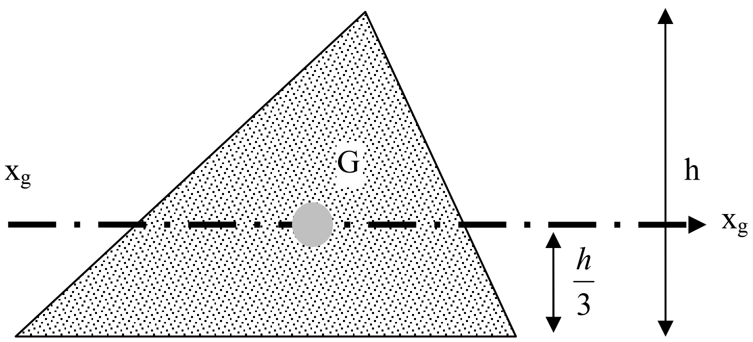
$$I_x=b\int_0^h y^2 dy-\frac{b}{h}\int_0^h y^3 dy=b\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h-\frac{b}{h}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^h=\frac{b\,h^3}{3}-\frac{b\,h^3}{4}=\frac{4-3}{12}b\,h^3$$

$$I_x=\frac{1}{12}b\,h^3$$

Essendo l'area del triangolo $\frac{b\,h}{2}$ per il teorema della trasposizione risulta:

$$I_{G_x}=I_x-d^2\ A=\frac{bh^3}{12}-\frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2=\frac{bh^3}{12}-\frac{bh^3}{18}=\frac{bh^3}{36}$$

$$\boxed{I_{G_x}=\frac{bh^3}{36}}$$



Cerchio

Determinare il momento d'inerzia di un cerchio rispetto a un diametro e a una tangente.

Si può innanzitutto notare che il cerchio presenta infiniti assi di simmetria, tutti passanti per il centro.

Si potrebbe considerare come area infinitesima una striscia parallela al diametro, che però risulterebbe di lunghezza variabile. È invece più semplice determinare il momento d'inerzia polare e poi desumere quelli assiali.

Considerando come area elementare dA una corona circolare di area 2 π r dr essendo r il raggio medio generico della corona, il momento d'inerzia polare I_G rispetto al baricentro risulta:

$$I_G = \int_A r^2 dA = \int_0^R 2\pi r^3 \, dr = 2\pi \int_0^R r^3 \, dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2} \qquad \boxed{I_G = \frac{\pi R^4}{2}}$$

Essendo inoltre $I_G = I_{Gx} + I_{Gy}$, e poiché per la simmetria polare del cerchio deve essere $I_{Gx} = I_{Gy}$, si ricava che il momento d'inerzia rispetto a un diametro vale:

$$I_{Gx} = I_{Gx} = \frac{I_G}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

Il momento d'inerzia rispetto a una tangente si ricava applicando il teorema della trasposizione per assi paralleli:

$$I_x = I_{Gx} + R^2 A = \frac{\pi R^4}{4} + R^2 \pi R^2 = \frac{5}{4} \pi R^4$$

I raggi d'inerzia risultano uguali a:

$$\rho_x = \rho_y = \sqrt{\frac{I_{Gx}}{A}} = \sqrt{\frac{I_{Gy}}{A}} = \sqrt{\frac{\pi R^4}{4\pi R^2}} = \frac{R}{2}$$

L'ellisse d'inerzia si trasforma quindi in una circonferenza il cui raggio è pari a metà del raggio del cerchio dato.