DIMOSTRAZIONE DEI SEGUENTI TEOREMI
(INGEGNERIA MECCANICA)
2015-2016

Le seguenti dimostrazioni sono fondamentali ma non rappresentano la totalita' di quelle svolte a lezione.

- (Teorema di caratterizzazione del sottospazio generato)
  Sia V uno s.v. su R e sia $S=\{v_1,v_2,...,v_n\}\subseteq V(n\geq 1)$. Allora:
  a) $[S]$ é un sottospazio di V;
  b) $[S]\supseteq S$;
  c) se W é un sottospazio di V e $W\supseteq S$ allora $W\supseteq [S]$.
- (Teorema di caratterizzazione dei sottoinsiemi linearmente dipendenti)
  Sia V uno s.v. su R e sia $S=\{v_1,v_2,...,v_n\}\subseteq V(n\geq 1)$. Allora:
  a) $S=\{v_1\}$ é linearmente dipendente $\Leftrightarrow v_1=0$;
  b) Se $n>1, S$ é linearmente dipendente $\Leftrightarrow$ esiste un elemento di S che è combinazione lineare degli altri elementi di S.
- (Teorema che porta al concetto di coordinate di un vettore rispetto ad una base)
  Se $\beta=(v_1,v_2,...,v_n)$ é una base dello s.v. V, allora ogni elemento $v\in V$ si può rappresentare in un unico modo come combinazione lineare degli elementi di β. (Segue definizione di $M_\beta(v)$).
- Se $A\in M_n(R)$ é invertibile, allora $|A|\neq 0$ e $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$.
- Teorema di Cramer. Se il sistema lineare $AX=B$ ha n equazioni in n incognite e $|A|\neq 0$, allora $AX=B$ ha una ed una sola soluzione (non vale il viceversa). Calcolo della soluzione col "metodo della matrice inversa".
- Teorema di Rouché-Capelli. Il sistema lineare $AX=B$ ha soluzione $\Leftrightarrow r(A)=r(A:B)$.
- Se V é uno s.e.r. allora presi $v,v_1,....,v_m\in V, a_1,....,a_m\in R$,
  a) $<0,v>=0$;
  b) $<v,a_1v_1+...+a_mv_m>=a_1<v,v_1>+...+a_m<v,v_m>$.
- Se V é uno s.e.r. allora
  a) $\|\alpha v\|=|\alpha|\ \|v\|$,
  b) Se $v\neq 0$, allora $\dfrac{v}{\|v\|}$ é un versore,
  c) $v-cw\perp w(w\neq 0, v,w\in V, c$ coefficiente di Fourier di v rispetto a w).
- Se $\beta=(v_1,...,v_n)$ é una base ortonormale di V e $v\in V$ allora $M_\beta(v)=\begin{pmatrix}<v,v_1>\\<v,v_2>\\...\\<v,v_n>\end{pmatrix}$.

- Costruzione di una base ortogonale . Procedimento di Gram-Schmidt e dimostrazione che $v_1^{'} \perp v_2^{'}$. Passaggio da una base ortogonale ad una ortonormale.
- Proprieta' caratteristica delle matrici ortogonali ($AA_{-1} = I$).
- Se $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ é una matrice ortogonale, allora
  a) le righe (colonne) di A formano una base ortonormale di R^n e viceversa (per n=2),
  b) $|A| = \pm 1$ (non vale il viceversa),
  c) $A_{ij} = \pm a_{ij}$ (non vale il viceversa).
- Se $A, B \in M_n(R)$ sono matrici ortogonali, allora AB é ortogonale.
- Geometria analitica e s.e.r. Dimostrazioni delle condizioni di perpendicolarità e di parallelismo "rette-piani" (tutti i casi possibili).
- Parallelismo piano-retta mediante la discussione del sistema formato dalle loro equazioni.
- Equazioni della sfera e della circonferenza. Determinazione di centro e raggio.
- Se λ é un autovalore di $A \in M_n(R)$ allora V_λ é un sottospazio di R^n.
- Se $A \in M_2(R)$ allora $\Delta_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + |A|$.
- Teorema fondamentale per il calcolo degli autovalori e degli autospazi.
- m.g. di $\lambda = n - r(\lambda I - A)$.
- Se $A \in M_n(R)$ é diagonalizzabile con U ortogonale, allora A é simmetrica.
- a) $\lambda = 0$ é autovalore di $A \Leftrightarrow |A| = 0$.
  b) Se x_1, x_2 sono autovettori di A associati agli autovalori λ_1, λ_2 con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora x_1, x_2 sono linearmente indipendenti.
  c) $A \approx B \rightarrow |A| = |B|$ e $A \approx B \rightarrow \Delta_A(\lambda) = \Delta_B(\lambda)$.
  d) Se λ é autovalore di A e x é un relativo autovettore, allora λ^2 é autovalore di A^2 e x é un autovettore di A^2.
- Se G é una matrice a scala, allora $r(G) =$ numero di righe non nulle di G.
- Teorema sulla riduzione a forma diagonale di una forma quadratica.
- Teorema sulle forme quadratiche definite (semi-definite) positive.
- Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ e' definita positiva $\Leftrightarrow |A| > 0$ e $a > 0$.
- Se $A \in M_n(R)$ é simmetrica e (semi-) definita positiva, allora esiste una (unica) matrice B simmetrica e (semi-) definita positiva tale che $B^2 = A.$ Segue definizione di $\sqrt{A}$.
- Lo s.v. $R[x]$ (polinomi nell'indeterminata x e a coefficienti reali) non ha dimensione finita.

- Proprieta' caratteristica di un tensore [a) e b) $\Leftrightarrow$ a')]
  a) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
  b) $T(\alpha v) = \alpha T(v)$
  a') $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)$
- Teorema sulla rappresentazione diagonale di un tensore simmetrico.
- Tutte le diadi sono tensori ($v \otimes w$ e' un tensore). Esistono tensori che non sono diadi.
- Se $\|v\| = 1$ allora $v \otimes v(w)$ é la proiezione di w su v.

- Se $v_1 = (x_1, x_2, x_3)$ allora la matrice del tensore emisimmetrico di vettore assiale v_1 è $A_{v_1} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Dal teorema generale su diadi e tensori alla dimostrazione del teorema di decomposizione spettrale di un tensore simmetrico.
- Se S é un tensore simmetrico ed E un tensore emisimmetrico, allora $< S, E >= 0$.
- Autovettori di un tensore simmetrico associati ad autovalori distinti sono ortogonali.
- Se $\lambda \in R$ é un autovalore di un tensore ortogonale allora $\lambda = \pm 1$.
- $\|v \otimes w\| = \|v\| \ \|w\|$.
- Se $\beta = (v_1, ..., v_n)$ é una base ortonormale dello s.e.r. V allora

  a) $\|v_i \otimes v_j\| = 1$,

  b) $v_i \otimes v_j \perp v_h \otimes v_k$ se $i \neq h$ oppure $j \neq k$.