Secondo parziale di Geometria e Algebra (Meccanica) 16-12-2013-A

1) a) Trovare l'equazione del cilindro L che proietta la curva $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} x^2 + 2y^2 - 5 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

parallelamente alla retta $r \equiv \begin{cases} x = 3z + 2 \\ y = -2z + 5 \end{cases}$.

b) Classificare il cilindro L.

2) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \beta & -1 & 0 \\ 2 & 8 & \alpha \end{pmatrix}$.

a) Trovare gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.

b) Determinare $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che A sia invertibile e risulti $\det(A^{-1}) = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(A)$.

3) Sia T il tensore (simmetrico) in $\mathbf{R}^3$ così definito:

$$T((x, y, z)) = (-14x + 4z, -15y, 4x + z)$$

e sia A la matrice ad esso associata rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Determinare la decomposizione spettrale di T.

c) Trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che T sia ortogonale a $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ con $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ e $\mathbf{w} = (3, 1, \alpha)$.

4) Trovare il tensore T in $\mathbf{R}^2$ sapendo che $T((1, 2)) = (1, -1)$ e che $(1, 3)$ è un autovettore di T associato all'autovalore $\lambda = -2$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente giustificati.

Secondo parziale di Geometria e Algebra (Informatica) 18-12-2013-A

1) Sia $f : \mathbf{P}_2(x) \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare così definita

$$f(ax^2 + bx + c) = (a + b - c, 2a - b, ka + b - 2c) \quad (k \in \mathbf{R}) .$$

a) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) ed I_f (immagine di f).
b) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.
c) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (\alpha, 1, 3)$ ad I_f $(\alpha \in \mathbf{R})$.

2) Determinare:
a) gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile,
b) per tali valori diagonalizzarla.

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ (A è simmetrica) .
a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.
b) Detto f_A l'operatore associato ad A (rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$), trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che $f_A((1, 1, 1))$ sia ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (\alpha, 2, -4)$.

4) Determinare l'equazione del cono che proietta la curva $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ dal vertice $V(0, 0, -2)$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente giustificati.

Secondo parziale di Geometria e Algebra (Meccanica) 19-12-2014-A

1) a) Trovare l'equazione del cono che proietta la circonferenza $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ dal vertice $V(0, 0, 4)$.

b) Trovare poi il centro ed il raggio della circonferenza L intersezione del cono (del punto a)) con il piano di equazione $z = -11$.

2) Sia $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica) e sia T il tensore simmetrico associato ad A rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Determinare la decomposizione spettrale del tensore T.

c) Trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che T sia ortogonale a $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$, con $\mathbf{v} = (1, \alpha, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$.

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 2 & \alpha & 3 \end{pmatrix}$.

a) Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.

b) Indicato con T il tensore associato ad A rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ con $\alpha = 1$, trovare il tensore emisimmetrico E di vettore assiale $\mathbf{v}_1 = T((1, 1, 1)$.

4) a) Trovare il tensore $T((x, y))$ in $\mathbf{R}^2$ sapendo che $T((0, 1)) = (-1, \alpha)$ e $T((-1, 0)) = (-\alpha, -1)$ $\alpha \in \mathbf{R}$.

b) Determinare gli eventuali $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che T sia un tensore ortogonale e per tali valori descrivere "geometricamente" $T((x, y))$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente giustificati.

Secondo parziale di Geometria e Algebra (Informatica) 19-12-2014-A

1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare così definita

$$f((x,y,z)) = (-3x + y + kz, -x + y, 2x - z) \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, k \in \mathbf{R} .$$

a) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) ed I_f (immagine di f).
b) Discutere, al variare di k, iniettività e suriettività di f.
c) Stabilire se $\mathbf{w} = (-2, 1, \alpha)$ appartiene ad I_f $(\alpha \in \mathbf{R})$.

2) Sia $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica) .
a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.
b) (Vedi forme quadratiche) Verificare l'uguaglianza $Q((x,y,z)) = Q_1((x_1,y_1,z_1))$ con $(x,y,z) = (1,1,1)$.
c) Stabilire se A è definita positiva, negativa o indefinita.

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ -2 & 10 & 9 \end{pmatrix}$.
a) Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.
b) Detti f_A l'operatore in $\mathbf{R}^3$ associato ad A e $\mathbf{v} = (1,1,1)$, trovare gli eventuali $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali $< f_A(\mathbf{v}), \mathbf{v} >$ è minore dell'opposto della traccia di A.

4) a) Con il metodo del completamento dei quadrati studiare la parabola $\mathcal{P} \equiv 2x^2 + 4x + y = 0$ e tracciarne il grafico.
b) Trovare l'equazione del cono che proietta la curva $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} 2x^2 + 4x + y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$
dal vertice $V(0, -1, 0)$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente giustificati.

Compito di Geometria e Algebra per Ing. Informatica ed Elettronica 18-12-2015-A

1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f((x,y,z)) = (x + ky - z, x - 5y + z, x - 2y) \ \ \forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \ \ k \in \mathbf{R} \, .$$

a) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) ed I_f (immagine di f).
b) Stabilire, al variare di k, se f è iniettiva o suriettiva.
c) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (3, 5, \alpha)$ ad I_f, $\alpha \in \mathbf{R}$.

2) Discutere i seguenti sistemi lineari

$$a) \ \begin{cases} 2x - 2y + z = -1 \\ 4x - z = \beta \\ x + \alpha y + 2z = \alpha \end{cases} \qquad b) \ \begin{cases} 2x - 2y + z - t = 0 \\ 4x - z + \beta t = 0 \\ x + \alpha y + 2z + \alpha t = 0 \end{cases} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$$

3) Sia $\ A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 10 & \alpha & 0 \\ -2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

a) Trovare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.
b) Indicato con f_A l'operatore lineare in $\mathbf{R}^3$ associato ad A, trovare la dimensione di I_{f_A} (immagine di f_A).

4) Sia $\ A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.
b) Detto f_A l'operatore in $\mathbf{R}^3$ associato ad A, trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che $f_A((1,1,1))$ sia ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (-1, -2, \alpha)$.

5) Siano date le rette $r \equiv \begin{cases} x = 3z + 5 \\ y = 2z + 2 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = 4z + 4 \\ y = 2z + 5 \end{cases}$. Trovare:

a) le equazioni ridotte della retta t passante per $P(1, 2, 3)$, e perpendicolare sia ad r che ad s,
b) le equazioni ridotte delle rette parallele ad r e tali che la loro distanza da s sia maggiore di $\sqrt{5}$,
c) l'equazione del cono L che proietta la curva $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} 2x^2 - 6y^2 - 1 = 0 \\ z = -1 \end{cases}$ dal punto $V(0, 0, 1)$.

6) Trovare l'operatore lineare f in $\mathbf{R}^2$ sapendo che $f((1,0)) = (1,-1)$ e che $(0,1)$ è un autovettore di f associato all'autovalore $\lambda = 2$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente motivati.

Compito di Geometria e Algebra per Ingegneria Meccanica del 18-12-2015-A

1) Siano $W = \left\{ax^2 + bx + c \ : \ \begin{cases} a - b + kc = 0 \\ a + b - 5c = 0 \\ b - 3c = 0 \end{cases} \right\} \sqsubseteq P_3(x) \quad , \quad k \in \mathbf{R} \quad$ e

$W_1 = \{(\alpha x + y + 2z, 3y - 2z, 3x - y + 2z) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\} \sqsubseteq \mathbf{R}^3 \ , \ \alpha \in \mathbf{R}$.

a) Trovare, al variare di $k \in \mathbf{R}$, una base e la dimensione di W.

b) Trovare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ una base e la dimensione di W_1.

c) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{w} = (2, \beta, 0)$ a W_1 $\ (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$.

2) Discutere i seguenti sistemi lineari ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$):

$$\text{a)} \quad \begin{cases} 6x + 2y + z = \beta \\ -2y + 3z = 2 \\ 3x + \alpha y - z = 0 \end{cases} \qquad \text{b)} \quad \begin{cases} 6x + 2y + z + \beta t = 0 \\ -2y + 3z + 2t = 0 \\ 3x + \alpha y - z = 0 \end{cases} .$$

3) Sia $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 2 \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Trovare gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.

b) Determinare $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che A sia invertibile e risulti $\det(A^{-1}) = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(A)$.

4) Sia T il tensore (simmetrico) in $\mathbf{R}^3$ così definito: $T((x, y, z)) = (2x, y + 4z, 4y - 14z)$ e sia A la matrice ad esso associata rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Trovare la decomposizione spettrale di T.

c) Trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che T sia ortogonale a $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ con $\mathbf{v} = (1, \alpha, 0), \mathbf{w} = (1, 1, 0)$.

5) Determinare:

a) le equazioni ridotte della retta passante t passante per $P(1, 2, 3)$ perpendicolare alla retta $r \equiv \begin{cases} y = 2x + 4 \\ z = 3x + 7 \end{cases}$ e parallela al piano $\pi \equiv x - y + 3z + 8 = 0$.

b) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che la minima distanza tra le rette

$$r_1 \equiv \begin{cases} y = x + 5 \\ z = -5x + 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 \equiv \begin{cases} y = 4x + \alpha \\ z = -5x + \beta \end{cases}$$

sia minore di $2\sqrt{26}$.

c) Trovare l'equazione e classificare il cilindro L che proietta la curva $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} 3x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ z = -1 \end{cases}$ parallelamente alla retta $r_3 \equiv \begin{cases} x = 2z + 5 \\ y = -3z + 7 \end{cases}$.

6) Trovare il tensore T in $\mathbf{R}^2$ sapendo che $T((1, 4)) = (1, 1)$ e che $(1, 3)$ è un autovettore di T associato all'autovalore $\lambda = -2$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente motivati.