Primo parziale di Geometria e Algebra (Ing. Meccanica) 31-10-2013-A

1) Trovare una base e la dimensione di:

$$W = \left\{ ax^2 + bx + c \ : \ \begin{cases} 3b - c = 0 \\ a - 5b + c = 0 \\ a + kb - c = 0 \end{cases} \right\} \sqsubset P_2(x) \quad (k \in \mathbf{R}).$$

2) Sia

$$W = \{(x - 2y - 3z, 3x - 2y, x + \alpha y + 6z) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\} \sqsubset \mathbf{R}^3 \quad , \ \alpha \in \mathbf{R} \ .$$

a) Trovare una base e la dimensione di W.

b) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (\beta, 2, 2)$ a W.

3) Discutere i seguenti sistemi lineari $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$

a) $\begin{cases} \alpha x + y + 2z = 2 \\ 3y - 2z = \beta \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \alpha x + y + 2z + 2t = 0 \\ 3y - 2z + \beta t = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$.

4) Determinare:

a) le equazioni ridotte della retta t passante per $P(1, 2, 3)$ e perpendicolare sia alla retta $r \equiv \begin{cases} x = z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$ che alla retta $s \equiv \begin{cases} y = 2x - 5 \\ z = 3x + 7 \end{cases}$,

b) gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che la minima distanza tra le rette

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 3z + 2 \\ y = z - 5 \end{cases} \quad , \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = 3z + \alpha \\ y = 2z + \beta \end{cases}$$

sia maggiore di $2\sqrt{10}$,

c) le equazioni delle (eventuali) sfere S aventi il centro sulla retta $t \equiv \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$ e tangenti i piani $\pi \equiv 2x - 3y + 6z - 10 = 0$ e $\pi_1 \equiv 2x - 3y + 6z = 0$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente giustificati.