Primo parziale di Geometria e Algebra (Ing. Meccanica) 2-11-2011-C

1) Trovare una base e la dimensione dei seguenti sottospazi:

a) $W_1 = \{(-2x+3y+3z, x-3y, -y+\alpha z) \ : \ x,y,z \in \mathbf{R}\} \sqsubset \mathbf{R}^3$ $(\alpha \in \mathbf{R})$.

b) $W_2 = \{ax^2+bx+c \ : \ \begin{cases} a+kb-5c=0 \\ a+3b-5c=0 \end{cases}\} \sqsubset P_2(x)$ $(k \in \mathbf{R})$.

c) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (-1, 2, \beta)$ a W_1 $(\beta \in \mathbf{R})$.

2) Discutere i seguenti sistemi lineari $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$

i) $\begin{cases} x+\alpha y-2z+t=0 \\ x+y-3z=\beta \\ x-2y-6z-3t=8 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x+\alpha y-2z+t=0 \\ x+y-3z=0 \\ x-2y-6z-3t=0 \end{cases}$

3) Trovare:

a) le equazioni ridotte della retta t passante per $P(1,1,1)$, parallela al piano $\pi \equiv 2x-y+3z+7=0$ e perpendicolare alla retta $r \equiv \begin{cases} x=-2y+6 \\ z=-y+2 \end{cases}$

b) la minima distanza tra le rette

$$r_1 \equiv \begin{cases} x=2z+1 \\ y=3z+4 \end{cases}, \quad r_2 \equiv \begin{cases} x=z+3 \\ y=3z+5 \end{cases};$$

c) le equazioni delle (eventuali) sfere S aventi il centro sulla retta $r \equiv \begin{cases} z=2x-1 \\ y=x+3 \end{cases}$ e tangenti i piani $\pi_1 \equiv 6x-3y-2z+10=0$ e $\pi_2 \equiv 6x-3y-2z+8=0$.

4) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e sia $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \subseteq V$ un insieme linearmente indipendente. Trovare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali anche l'insieme $S' = \{\alpha\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + \alpha\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3, -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$ è linearmente indipendente.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente giustificati.