Compito di Geometria e Algebra.
Ingegneria Meccanica (9 C.F.U.) del 17-01-2012

1) Sia

$$W = \{(x + 2y - z, x + 5z, 2x + 3y + kz) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\} \sqsubset \mathbf{R}^3 \ (k \in \mathbf{R}) .$$

Al variare di $k \in \mathbf{R}$

a) trovare una base e la dimensione di W,

b) discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (3, \alpha, 3)$ a W ($\alpha \in \mathbf{R}$).

2) Discutere i seguenti sistemi lineari ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$):

$$\text{a)} \begin{cases} 2x - 3z = \alpha \\ 3x + 2y - 2z = 2 \\ -x + \alpha y + 4z = \beta \end{cases} , \quad \text{b)} \begin{cases} 2x - 3z + \alpha t = 0 \\ 3x + 2y - 2z + 2t = 0 \\ -x + \alpha y + 4z + \beta t = 0 \end{cases}$$

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica) e sia T il tensore simmetrico associato ad A rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Determinare la decomposizione spettrale del tensore T.

c) Trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che $< T, \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} >$, con $\mathbf{w} = (\alpha, 1, 0)$, sia minore della traccia di A.

d) Verificare che A è definita positiva e trovare $\det(\sqrt{A})$.

4) Sia $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & -2 & 5 \end{pmatrix}$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$). Trovare:

a) gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali B è diagonalizzabile,

b) gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali B è simile alla matrice A dell'esercizio 3) (motivare la risposta),

c) esprimere B^3 come combinazione lineare di B^2, B e I_3.

5) Trovare:

a) le equazioni ridotte della retta passante t passante per $P(1, 2, 3)$, parallela al piano $\pi \equiv x + 3y - 2z + 5 = 0$ e perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = (-1, 1, 2)$,

b) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che la minima distanza tra le rette $r \equiv \begin{cases} x = 3z + 2 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$ e $s \equiv \begin{cases} x = 3z + \alpha \\ y = 4z + \beta \end{cases}$ sia minore di $\sqrt{10}$.

6) Determinare:

a) l'equazione della sfera S di centro $C(0, 0, 5)$ e raggio 3,

b) l'equazione del cono C che proietta la sfera S dall'origine,

c) il raggio della circonferenza L intersezione del cono C e della sfera S.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente motivati.