Primo parziale di Geometria e Algebra
(Ing. Elettronica e dell'Informazione) 29-10-2013-A

1) Sia

$$W = \{(\alpha x - y + 3z, x - 2y + 2z, x + 4y) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\} \sqsubset \mathbf{R}^3 \quad , \ \alpha \in \mathbf{R} \ .$$

a) Trovare una base e la dimensione di W.

b) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (\beta, 0, 4)$ a W.

2) Trovare una base e la dimensione di

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \ : \ \begin{cases} a - \text{[illegible]}\, b + 3c = 0 \\ ka - \text{[illegible]}\, b + 3c = 0 \end{cases} \right\} \sqsubset M_2(\mathbf{R}) \ .$$

3) Discutere i seguenti sistemi lineari $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 2t = \beta \\ \alpha x - 2y + 2z = 1 \\ x + 4y - 4t = -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 2t = 0 \\ \alpha x - 2y + 2z = 0 \\ x + 4y - 4t = 0 \end{cases}$

4) Trovare:

a) le equazioni ridotte della retta t passante per il punto $P(2, 3, 1)$, perpendicolare alla retta $r \equiv \begin{cases} x = 3z - 1 \\ y = 2z + 4 \end{cases}$ e parallela al piano $\pi \equiv 3x - y + z + 5 = 0$,

b) gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che la minima distanza tra le rette

$$s \equiv \begin{cases} x = 2z + 3 \\ y = 4z - 1 \end{cases} \quad , \quad s_1 \equiv \begin{cases} x = 2z + \alpha \\ y = z + \beta \end{cases}$$

sia minore di $2\sqrt{5}$,

c) l'equazione della sfera tangente il piano $\pi_1 \equiv 2x - y + 3z - 4 = 0$ nel punto $P(1, 1, 1)$ ed avente il centro sul piano xz.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente giustificati.