Secondo parziale di Geometria e Algebra (Ing. Informatica) 20-12-2011-B

1) a) Trovare le equazioni dei piani tangenti la sfera $S \equiv x^2+y^2+z^2+2x+4y-2z+5=0$ e paralleli al piano $\pi \equiv 2x+3y+6z+3=0$.
   b) Con il "metodo del completamento dei quadrati" studiare la conica $C \equiv x^2+4y^2+4x-8y+4=0$.

2) Sia $A = \begin{pmatrix} \alpha & 8 & 2 \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   a) Determinare gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.
   b) Posto $\alpha = 0$ esprimere A^3 come combinazione lineare di A^2, A, I.

3) Sia $A = \begin{pmatrix} -14 & 0 & 4 \\ 0 & -15 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica)
   a) Trovare una base ortonormale $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ formata da autovettori di A.
   b) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.
   c) Trovare le proiezioni di $\mathbf{v} = (x, y, z)$ sugli elementi di β.

4) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \ : \ a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$ la funzione lineare così definita

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z & x+2y+3z \\ x+2y+3z & x+3y+kz \end{pmatrix} \quad (\ k \in \mathbf{R})$$

   a) Trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) ed I_f (immagine di f). (Per trovare N_f si richiede l'uso della riduzione a gradini).
   b) Discutere iniettività e suriettività di f.
   c) Determinare k in modo che il rango di $f(1,1,1)$ sia 2.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente giustificati.