Primo parziale di Geometria e Algebra (Ing. Informatica) 2-11-2011-A

1) Trovare una base e la dimensione dei seguenti sottospazi:

a) $W_1 = \{(2x+y-z, x-2z, -3x-y+\alpha z, y+3z) \ : \ x,y,z \in \mathbf{R}\} \sqsubset \mathbf{R}^4$ $(\alpha \in \mathbf{R})$

b) $W_2 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ : \ \begin{cases} a-2b+3c=0 \\ 2a-4b+6c+kd=0 \end{cases}\} \sqsubset M_2(\mathbf{R})$ $(k \in \mathbf{R})$.

c) Per i valori di α per i quali $\dim W_1 = 2$, discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (2,-1,-1,\beta)$ a W_1 $(\beta \in \mathbf{R})$.

2) Discutere i seguenti sistemi lineari $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$

i) $\begin{cases} x-3y+2z=-3 \\ 4x+\alpha z=\beta \\ 2x-2y+z=\alpha \end{cases}$ ii) $\begin{cases} x-3y+2z-3t=0 \\ 4x+\alpha z+\beta t=0 \\ 2x-2y+z+\alpha t=0 \end{cases}$

3) Trovare:

a) le equazioni ridotte della retta r_1 passante per $P(2,-1,3)$, perpendicolare alla retta $r \equiv \begin{cases} x=2z+5 \\ y=-2z+3 \end{cases}$ e parallela al piano $\pi \equiv x+y-z+3=0$

b) gli eventuali $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali la minima distanza tra le rette

$$s \equiv \begin{cases} x=4z+20 \\ y=-2z+1 \end{cases} , \quad s_1 \equiv \begin{cases} x=4z+\alpha \\ y=z+\beta \end{cases}$$

sia uguale a $\sqrt{17}$,

c) le equazioni delle (eventuali) sfere S di raggio $R=\sqrt{14}$, aventi il centro sulla retta $t \equiv \begin{cases} x=2z-1 \\ y=3z-1 \end{cases}$ e passanti per $Q(1,2,1)$.

4) Sapendo che $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base dello spazio vettoriale V su $\mathbf{R}$, determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali anche l'insieme $S' = \{\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3, \alpha\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - 4\mathbf{v}_3\}$ è una base di V.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente giustificati.