Secondo parziale di Geometria e Algebra (Meccanica) 19-12-2014-A

1) a) Trovare l'equazione del cono che proietta la circonferenza $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ dal vertice $V(0,0,4)$.

b) Trovare poi il centro ed il raggio della circonferenza L intersezione del cono (del punto a)) con il piano di equazione $z = -11$.

2) Sia $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica) e sia T il tensore simmetrico associato ad A rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Determinare la decomposizione spettrale del tensore T.

c) Trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che T sia ortogonale a $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$, con $\mathbf{v} = (1, \alpha, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$.

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 2 & \alpha & 3 \end{pmatrix}$.

a) Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.

b) Indicato con T il tensore associato ad A rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ con $\alpha = 1$, trovare il tensore emisimmetrico E di vettore assiale $\mathbf{v}_1 = T((1, 1, 1)$.

4) a) Trovare il tensore $T((x,y))$ in $\mathbf{R}^2$ sapendo che $T((0,1)) = (-1, \alpha)$ e $T((-1,0)) = (-\alpha, -1)$ $\alpha \in \mathbf{R}$.

b) Determinare gli eventuali $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che T sia un tensore ortogonale e per tali valori descrivere "geometricamente" $T((x,y))$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente giustificati.

Secondo parziale di Geometria e Algebra (Meccanica) 16-12-2013-A

1) a) Trovare l'equazione del cilindro L che proietta la curva $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} x^2 + 2y^2 - 5 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

parallelamente alla retta $r \equiv \begin{cases} x = 3z + 2 \\ y = -2z + 5 \end{cases}$.

b) Classificare il cilindro L.

2) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \beta & -1 & 0 \\ 2 & 8 & \alpha \end{pmatrix}$.

a) Trovare gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.

b) Determinare $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che A sia invertibile e risulti $\det(A^{-1}) = \frac{1}{3}\mathrm{tr}(A)$.

3) Sia T il tensore (simmetrico) in $\mathbf{R}^3$ così definito:

$$T((x, y, z)) = (-14x + 4z, -15y, 4x + z)$$

e sia A la matrice ad esso associata rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Determinare la decomposizione spettrale di T.

c) Trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che T sia ortogonale a $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ con $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ e $\mathbf{w} = (3, 1, \alpha)$.

4) Trovare il tensore T in $\mathbf{R}^2$ sapendo che $T((1, 2)) = (1, -1)$ e che $(1, 3)$ è un autovettore di T associato all'autovalore $\lambda = -2$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente giustificati.