Compito di Geometria e Algebra per Ingegneria Meccanica del 16-02-2010

1) Sia

$$W = \{(x+y+z, 3x+4z, 2x-y+3z, x-2y+kz) \; : \; x, y, z \in \mathbf{R}\} \sqsubset \mathbf{R}^4 \quad (k \in \mathbf{R})$$

a) Trovare una base e la dimensione di W.
b) Posto $k=2$, discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (1, 5, 4, \alpha)$ a W.
Risolvere a) e b) con il metodo della riduzione a gradini (scala).

2) Discutere

a) $\begin{cases} 3x + 2z = 1 \\ 2x + y + \alpha z = 1 \\ 5x - 2y + 4z = \beta \end{cases}$ $\qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$

b) Discutere l'intersezione tra la retta r rappresentata dalle prime due equazioni di a) ed il piano π rappresentato dalla terza equazione sempre di a) (in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$).

3) Sia $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.
b) Determinare la decomposizione spettrale del tensore T associato ad A (rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$).
c) Trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che $< T, \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} >$, con $\mathbf{w} = (0, \alpha, 0)$, sia maggiore di -5.

4) Sia $B = \begin{pmatrix} -5 & \alpha & 1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Trovare gli eventuali $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali B è diagonalizzabile.
b) Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali B sia simile alla matrice A dell'esercizio 3 (motivare la risposta).
c) Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali $B \cdot B = (B^2)$ sia una matrice diagonale.

5) Determinare:

a) le equazioni ridotte della retta t passante per $P(-2, -1, 3)$, perpendicolare alla retta $r \equiv \begin{cases} x = 5z + 4 \\ y = 3z + 2 \end{cases}$ e parallela al piano $\pi \equiv 4x + 3y + z - 8 = 0$;
b) l'equazione della sfera S di centro $C(-1, 2, 1)$ e tangente il piano $\pi_1 \equiv 6x + 3y + 2z + 5 = 0$;
c) le equazioni dei piani tangenti S e paralleli a π_1.

6) a) Con il metodo del completamento dei quadrati studiare la conica $\mathcal{C} \equiv 4x^2 + y^2 - 4y = 0$ e tracciarne il grafico.
b) Trovare l'equazione del cono che proietta la conica $\mathcal{C}$ del piano xy dal punto $V(0, 0, 3)$.

Compito di Geometria e Algebra per Ingegneria Meccanica del 26-01-2010

1) Sia

$$W = \{(kx + y + z, 3x + 4z, 2x - y + 3z) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\} \sqsubset \mathbf{R}^3 \quad (k \in \mathbf{R})$$

a) Per ogni valore di k, trovare una base e la dimensione di W.
b) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (\alpha, 5, 4)$ a W.

2) Discutere i seguenti sistemi lineari:

$$\text{a)} \begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ 4x + \beta y + 2z = 3 \\ -y + 2z = \alpha \end{cases} \quad , \quad \text{b)} \begin{cases} 3x + y + z + 2t = 0 \\ 4x + \beta y + 2z + 3t = 0 \\ -y + 2z + \alpha t = 0 \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$$

c) Determinare gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali la retta rappresentata dalle prime due equazioni di a) è parallela al piano rappresentato dalla terza equazione sempre di a) (in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$).

3) Sia $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ \beta & 8 & 3 \end{pmatrix}$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$. Determinare:

a) gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile,
b) il rango di A,
c) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che $\det(A^2) > 18$.

4) Sia T il tensore in $\mathbf{R}^3$ definito da $T((x, y, z)) = (5x - 2z, 4y, -2x + 8z)$.

a) Determinare la decomposizione spettrale del tensore (simmetrico) T.
b) Diagonalizzare la matrice A associata a T (rispetto alla base canonica) con una matrice ortogonale U.
c) Trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che $< T, \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} >= 8$ con $\mathbf{v} = (\alpha, 0, 1)$.

5) Determinare:

a) le equazioni ridotte della retta passante per $P(-5, 1, -3)$, perpendicolare alla retta $\mathrm{r} \equiv \begin{cases} x + y - 5z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ e parallela al piano $\pi \equiv 4x + 3y + z + 4 = 0$;
b) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che la distanza tra la retta $t \equiv \begin{cases} x = 3z + \alpha \\ y = 2z - \beta \end{cases}$ e l'asse x sia minore di $\sqrt{5}$.
c) Le equazioni dei piani paralleli al piano $\pi_1 \equiv 6x + 3y + 2z - 8 = 0$ e tangenti la sfera $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$.

6) a) Determinare l'equazione del cilindro che proietta la conica $\mathcal{C} \equiv x^2 + y^2 - 4 = 0$ del piano xy, parallelamente alla retta $s \equiv \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$

b) Trovare l'equazione polare e le equazioni parametriche di $\mathcal{C}$.

Secondo parziale di Geometria (Ing. Meccanica) 22-12-2009-B

1) Determinare:

a) gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la minima distanza tra le rette

$$r \equiv \begin{cases} x = 3z - 9 \\ y = z + 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 3z + \alpha \\ y = 2z - 1 \end{cases}$$

sia uguale a $\sqrt{10}$;

b) l'equazione del cono che proietta l'ellisse $\mathcal{C} \equiv 4x^2 + 9y^2 - 1 = 0$ del piano xy dal punto $V = (0, 0, 2)$,

c) le coordinate dei vertici di $\mathcal{C}$ (punto b)).

2) Sia T il tensore in $\mathbf{R}^3$ per il quale

$$T((1,0,0)) = (3,0,0), T((0,1,0)) = (\alpha, -1, 0), T((0,0,1)) = (2,8,3).$$

Trovare:

a) $T((x, y, z))$,

b) la matrice A associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$,

c) gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la matrice A di b) è diagonalizzabile.

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Determinare la decomposizione spettrale del tensore T associato ad A rispetto alla base canonica.

c) Trovare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali $< T, \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} >= 18$, con $\mathbf{w} = (1, \alpha, 1)$.

d) [vedi f.q.] Verificare che $Q(x,y,z) = Q_1(x_1,y_1,z_1)$ con $(x,y,z) = (1,1,1)$

Facoltativo. Dimostrare che un tensore T in uno s.e.r V è una funzione iniettiva $\iff$ $\mathbf{0}$ è l'unico elemento di V per il quale $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Secondo parziale di Geometria (Ing. Meccanica) 22-12-2009-B

1) Determinare:

a) gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la minima distanza tra le rette

$$r \equiv \begin{cases} x = 3z - 9 \\ y = z + 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 3z + \alpha \\ y = 2z - 1 \end{cases}$$

sia uguale a $\sqrt{10}$;

b) l'equazione del cono che proietta l'ellisse $\mathcal{C} \equiv 4x^2 + 9y^2 - 1 = 0$ del piano xy dal punto $V = (0, 0, 2)$,

c) le coordinate dei vertici di $\mathcal{C}$ (punto b)).

2) Sia T il tensore in $\mathbf{R}^3$ per il quale

$$T((1,0,0)) = (3,0,0), T((0,1,0)) = (\alpha, -1, 0), T((0,0,1)) = (2,8,3).$$

Trovare:

a) $T((x,y,z))$,

b) la matrice A associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$,

c) gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la matrice A di b) è diagonalizzabile.

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Determinare la decomposizione spettrale del tensore T associato ad A rispetto alla base canonica.

c) Trovare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali $< T, \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} >= 18$, con $\mathbf{w} = (1, \alpha, 1)$.

d) [vedi f.q.] Verificare che $Q(x,y,z) = Q_1(x_1, y_1, z_1)$ con $(x,y,z) = (1,1,1)$

Facoltativo. Dimostrare che un tensore T in uno s.e.r V è una funzione iniettiva $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{0}$ è l'unico elemento di V per il quale $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Compito di Geometria e Algebra per Ingegneria Meccanica del 12-01-2010-A

1) Sia

$$W = \{(x-2y+2z, 2x-y+3z, 3x+4z, x+y+kz) \ : \ x,y,z \in \mathbf{R}\} \sqsubset \mathbf{R}^4 \quad (k \in \mathbf{R})$$

a) Trovare una base e la dimensione di W.
b) Posto $k = 1$, discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (1,3,5,\alpha)$ a W.
Risolvere a) e b) con il metodo della riduzione a gradini (scala).

2) Discutere i seguenti sistemi lineari:

$$\text{a)} \begin{cases} 2x+3y=1 \\ \alpha x+2y+z=1 \\ 4x+5y-2z=\beta \end{cases}, \qquad \text{b)} \begin{cases} 2x+3y+t=0 \\ \alpha x+2y+z+t=0 \\ 4x+5y-2z+\beta t=0 \end{cases} \qquad (\alpha,\beta \in \mathbf{R})$$

c) Discutere l'intersezione tra la retta r rappresentata dalle prime due equazioni di a) ed il piano π rappresentato dalla terza equazione sempre di a) (in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$).

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.
b) Determinare la decomposizione spettrale del tensore T associato ad A (rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$).
c) Trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che $< T, \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} >$, con $\mathbf{w} = (0,0,\alpha)$, sia minore di -3.

4) Sia $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ \alpha & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Trovare gli eventuali $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali B è diagonalizzabile.
b) Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali B sia simile alla matrice A dell'esercizio 3 (motivare la risposta).
c) Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali $B \cdot B = (B^2)$ sia una matrice diagonale.

5) Determinare:

a) le equazioni ridotte della retta t passante per $P(-1,-2,3)$, perpendicolare alla retta $r \equiv \begin{cases} x = 3z+4 \\ y = 5z+2 \end{cases}$ e parallela al piano $\pi \equiv 3x+4y+z-3=0$;
b) l'equazione della sfera S di centro $C(1,2,-1)$ e tangente il piano $\pi_1 \equiv 2x+3y+6z+5=0$;
c) le equazioni dei piani tangenti S e paralleli a π_1.

6)

a) Con il metodo del completamento dei quadrati studiare la conica $\mathcal{C} \equiv x^2+4y^2-4x=0$ e tracciarne il grafico.
b) Determinare l'equazione del cono che proietta la conica $\mathcal{C}$ del piano xy dal punto $V(0,0,-3)$.

Secondo parziale bis di Geometria e Algebra (Ing. Meccanica) 11-01-2010

1) Determinare:

a) le equazioni delle (eventuali) sfere di raggio $R = 19/7$ che hanno il centro sulla retta $r \equiv \begin{cases} x = 2z \\ y = 3z + 1 \end{cases}$ e che sono tangenti il piano $\pi \equiv 2x + 3y + 6z - 3 = 0$;

b) l'equazione del cilindro luogo delle rette che sono parallele alla retta $t \equiv \begin{cases} x = 2z \\ y = 3z \end{cases}$ e che passano per i punti della conica $\mathcal{C} \equiv 4y^2 - 9x^2 = 1$ del piano xy,

c) il grafico (nel piano xy) dell'iperbole $\mathcal{C}$ dopo averne trovato i vertici e gli asintoti.

2) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$.

a) Determinare gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.

b) Posto $\alpha = \beta = 0$, decomporre il tensore T associato ad A nalla somma di un tensore simmetrico S e di uno emisimmetrico E.

c) Trovare il vettore assiale $\mathbf{v}_1$ del tensore emisimmetrico E del punto b).

d) Calcolare $< T, E >$.

3) Sia T il tensore (simmetrico) in $\mathbf{R}^3$ definito da

$$T((x, y, z)) = (4x - 2z, 8y, -2x + 7z).$$

a) Determinare la decomposizione spettrale di T.

b) Diagonalizzare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$, con una matrice ortogonale U.

c) Verificare che la matrice A del punto b) è definita positiva e determinare la traccia e il determinante di $\sqrt{A}$.

Facoltativo. Dimostrare che se T è un tensore in uno s.e.r. V e $S = \{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_m\} \subseteq V$ è linearmente dipendente, anche $S' = \{T(\mathbf{w}_1), ..., T(\mathbf{w}_m)\}$ è linearmente dipendente ($m \geq 1$).