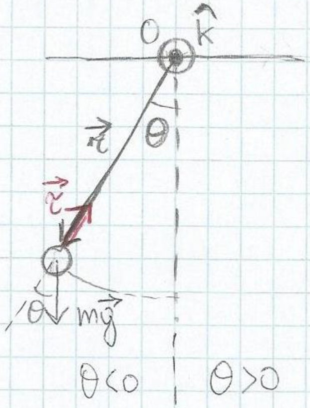
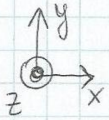
Problema 45

(a) Determinare il momento delle forze agenti su di un pendolo semplice e il momento angolare dello stesso.
(b) Scrivere l'equazione del moto.
(c) Calcolare la potenza prodotta dalla forza peso ed esprimerla in funzione di $\mathbf{M}$.

a) $\vec{M}_O, \vec{L}_O$?



$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge (\vec{\tau} + m\vec{g})$



oss:

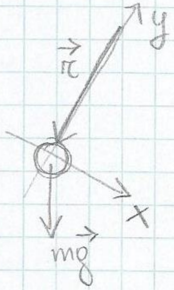
- Moto su un piano $\rightarrow$ $\vec{M}_O$ ha direzione costante lungo z
- $\vec{\tau} \parallel \vec{r}$ $\Rightarrow$ $\vec{\tau}$ ha momento nullo

$\Downarrow$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge m\vec{g}$$

- Momento forza peso in modulo

$\underbrace{mg}_{|m\vec{g}|} |\sin\theta| \underbrace{\ell}_{|\vec{r}|} = |\vec{M}_O|$



(REGOLA MANO DESTRA)

$\vec{M}_O = -\ell mg \sin\theta \hat{k}$

$M_{Oz} = -\ell mg \sin\theta$

⊙ vettore uscente

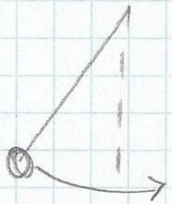
$\theta<0 \Rightarrow M_{Oz}>0$

$\theta>0 \Rightarrow M_{Oz}<0$

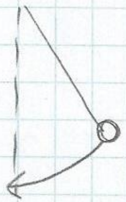
⊗ vettore entrante

$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ dato che $\vec{v} \perp \vec{r}$ $\Rightarrow L_{Oz} = \ell m v$

$\vec{L}_O$ è diretto lungo z e $\perp$ al piano di $\vec{r}$ e $\vec{v}$



$\vec{L}_O$ ⊙



$\vec{L}_O$ ⊗

b) $M_{oz} = -lmg\sin\theta$

$L_{oz} = mlv$

2^a eq. cardinale $\Rightarrow M_o = \frac{dL_o}{dt}$

$-\cancel{l}mg\sin\theta = ml\frac{dv}{dt} = ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$

in un moto circolare

$v = \omega r$

$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega r}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} r$

$-g\sin\theta = l\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$

c) $W = \frac{d\mathcal{L}}{dt}$ $\quad d\mathcal{L} = \vec{F}\cdot d\vec{s} \Rightarrow \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$

$\vec{F}$ è costante nel t

$\frac{d\vec{s}}{dt} \to \vec{v}$

$\vec{v} = \vec{\omega}\wedge\vec{r} \longrightarrow W = \vec{F}\cdot(\vec{\omega}\wedge\vec{r})$

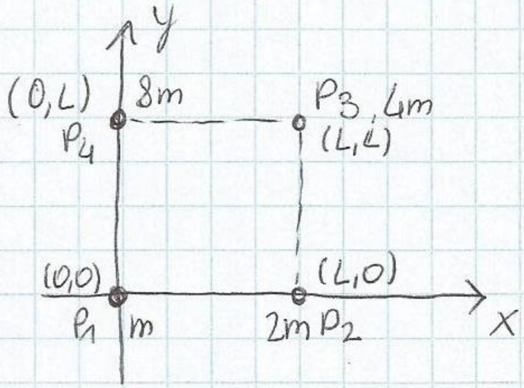
$(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{c}\wedge\vec{a})\cdot\vec{b} = (\vec{b}\wedge\vec{c})\cdot\vec{a}$

$\vec{F}\cdot(\vec{\omega}\wedge\vec{r}) = \vec{\omega}\cdot(\vec{r}\wedge\vec{F}) = \vec{\omega}\cdot\vec{M_o}$

Problema 47

Quattro punti materiali di masse m, $2m$, $4m$ e $8m$ sono disposte sui vertici di un quadrato, giacente nel piano xy, rispettivamente nelle posizioni $P_1 \equiv (0,0)$, $P_2 \equiv (L,0)$, $P_3 \equiv (L,L)$, $P_4 \equiv (0,L)$. Determinare le coordinate del centro di massa.

m, 2m, 4m e 8m



? trova le coordinate del centro di masse

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = (x_{cm}, y_{cm})$$

$$x_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{0 \cdot m + L \cdot 2m + L \cdot 4m + 0 \cdot 8m}{m + 2m + 4m + 8m}$$

$$= \frac{L \cdot 6\cancel{m}}{15\cancel{m}} = \frac{2}{5} L$$

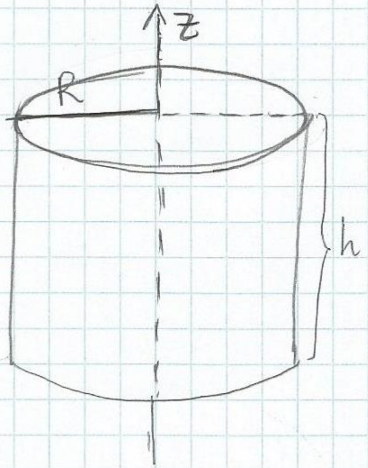
$$y_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{0 \cdot m + 0 \cdot 2m + L \cdot 4m + L \cdot 8m}{15m}$$

$$= \frac{L \cdot 12m}{15m} = \frac{4}{5} L$$

$$\vec{r}_{cm} = (x_{cm}, y_{cm}) = \left(\frac{2}{5} L ; \frac{4}{5} L\right)$$

Problema 48

(a) Determinare il momento d'inerzia baricentrico di un cilindro di rame (ρ=8.89 g/cm^3), avente raggio R=1.00 cm e altezza h=10.0 cm, rispetto ad un'asse parallelo alle generatrici del cilindro.
(b) Ricavare la stessa quantità rispetto ad un'asse passante per una generatrice.

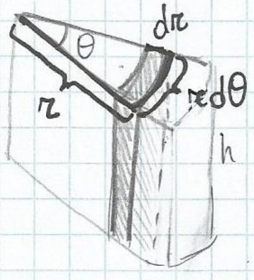


CORPO RIGIDO (cilindro pieno omogeneo)

$$m = \rho \cdot V = \rho \pi R^2 h$$

costituito da un insieme continuo di punti materiali, che sono elementi infinitesimi di massa dm, che si trovano a una distanza r dall'asse

$$dm = \rho\, dV = \rho\, dr \cdot r d\theta \cdot h$$



$$I_z = \int_V dI_z = \int_V r^2 \cdot dm = \int_V r^3 \cdot h \cdot \rho\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R h\rho r^3\, dr\, d\theta$$

dI_z non dipende da θ, per cui posso integrare su tutte le corone circolari di raggio r e spessore dr

$$= \int_0^R h\rho 2\pi r^3\, dr$$

$$= h\rho 2\pi \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = h\rho 2\pi \frac{R^4}{4} = 140\, g\, cm^2 = 1{,}4 \cdot 10^5\, kg \cdot m^2$$

ricordo che $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h} \rightarrow I_z = \frac{1}{2} \frac{\pi h m R^4}{\pi R^2 h} = \frac{1}{2} m R^2$

b) Teorema di Steiner

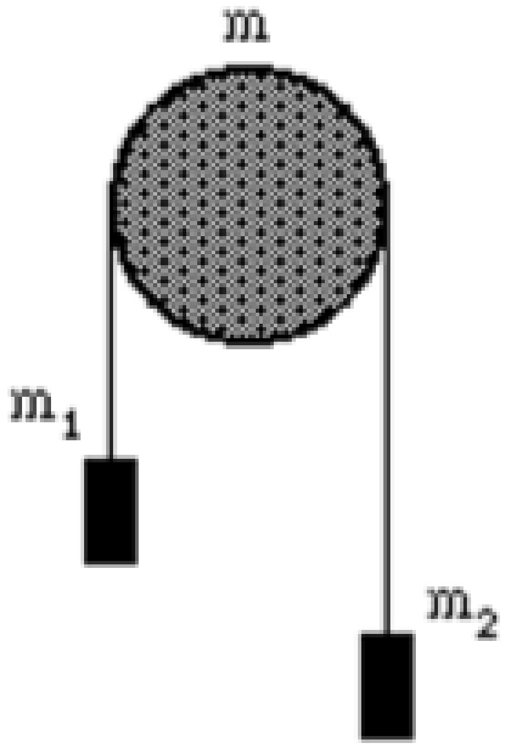
$$I_a = I_z + mR^2 = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2 = 3 I_z = 420\, g\, cm^2$$

Problema 49 *(macchina di Atwood)*

Le masse m_1=1.00 kg, m_2=2.00 kg sono connesse attraverso una fune inestensibile, perfettamente flessibile e di massa trascurabile. La carrucola rappresentata in figura ha massa m=8.00 kg e raggio R=10.0 cm. Si assuma che la fune scorra sulla carrucola senza scivolare.

(*a*) Ricavare la legge oraria con cui si muovono i due gravi.

(*b*) Determinare il valore della tensione della fune nei due tratti verticali.



Prob. 49

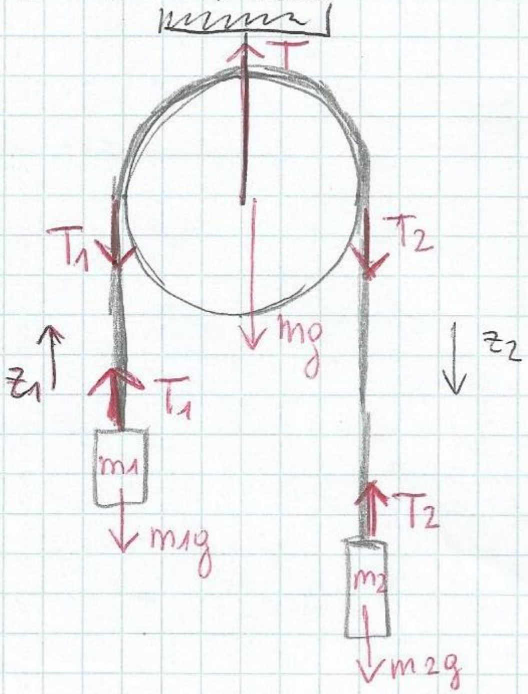
MACCHINA DI ATWOOD

$m_1 = 1{,}00$ kg

$m_2 = 2{,}00$ kg

$m = 8{,}00$ kg

$R = 10{,}0$ cm



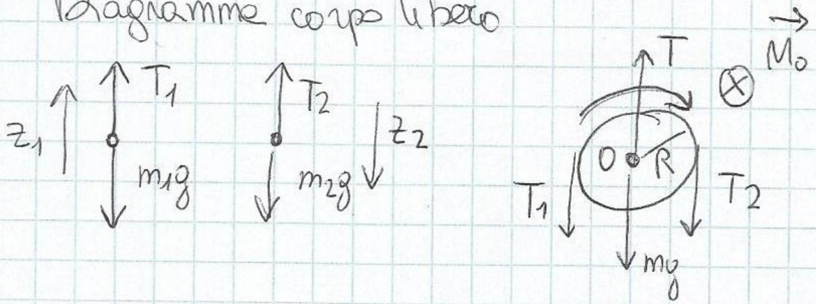
La fune scorre sulla carrucola senza scivolare

? Legge oraria con cui si muovono i 2 gravi

- cosa cambia rispetto alla carrucola di massa trascurabile? Che la carrucola ha una certa inerzia (momento di Inerzia)

$m_2 > m_1$ per cui m_1 salirà e m_2 scenderà e la carrucola ruoterà in senso orario

Diagramma corpo libero



$T = mg$ (carrucola fisso)

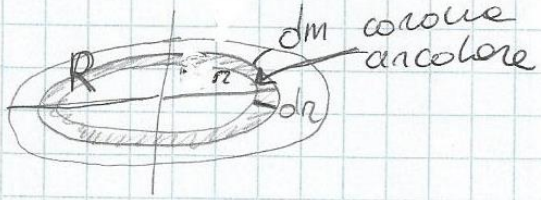
equaz. del moto

$$\begin{cases} \text{I} & m_1 a_1 = T_1 - m_1 g \\ \text{II} & m_2 a_2 = m_2 g - T_2 \\ \text{III} & a_1 = a_2 = \boxed{\alpha R} \rightarrow \text{acceleraz. carrucola nel moto rotatorio} \\ & M_0 = R(T_2 - T_1) = I_0 \alpha \end{cases}$$

Per scrivere la legge oraria mi serve trovare l'accelerazione del sistema

4 incognite a, T_1, T_2, I_0

Per prima cosa calcolo il momento di inerzia I_0



$$dI = r^2\,dm \qquad \text{(la carrucola è un disco)}$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2} \quad ; \quad dm = 2\pi r\,dr\,\rho$$

$$\Downarrow \; dI = r^2\, 2\pi r\,dr\, \frac{m}{\pi R^2} = 2m\,\frac{r^3}{R^2}\,dr$$

$$I_0 = \int_0^R \frac{2m}{R^2}\, r^3\,dr = \frac{2m}{R^2}\,\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2$$

III) $\frac{1}{2} m R^2 \alpha = R(T_2 - T_1) \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{1}{2} R m \alpha$

I)+II) $\Rightarrow$ $m_1 a_1 + m_2 a_2 = \underbrace{T_1 - T_2}_{= -\frac{1}{2} R m \alpha \ (III)} - m_1 g + m_2 g$

$$m_1 \underbrace{a_1}_{=a} + m_2 \underbrace{a_2}_{=a} + \frac{1}{2} \underbrace{R m \alpha}_{=a} = -m_1 g + m_2 g$$

$$(m_1 + m_2 + \tfrac{1}{2} m)\,a = (m_2 - m_1)\,g \qquad a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \frac{1}{2} m} \cdot g = \frac{2-1}{1+2+8/2} \cdot 9{,}81 = 1{,}40 \ m/s^2$$

oss. se $m \to 0$

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\, g$$

(b) Determinare il valore della tensione della fune nei due tratti verticali.

b) ? T_1 e T_2

$T_1 = m_1(a+g) = m_1\left(\frac{1}{7}+1\right)g = 11{,}2\,N$

$T_2 = m_2(g-a) = m_2\left(1-\frac{1}{7}\right)g = 16{,}8\,N$