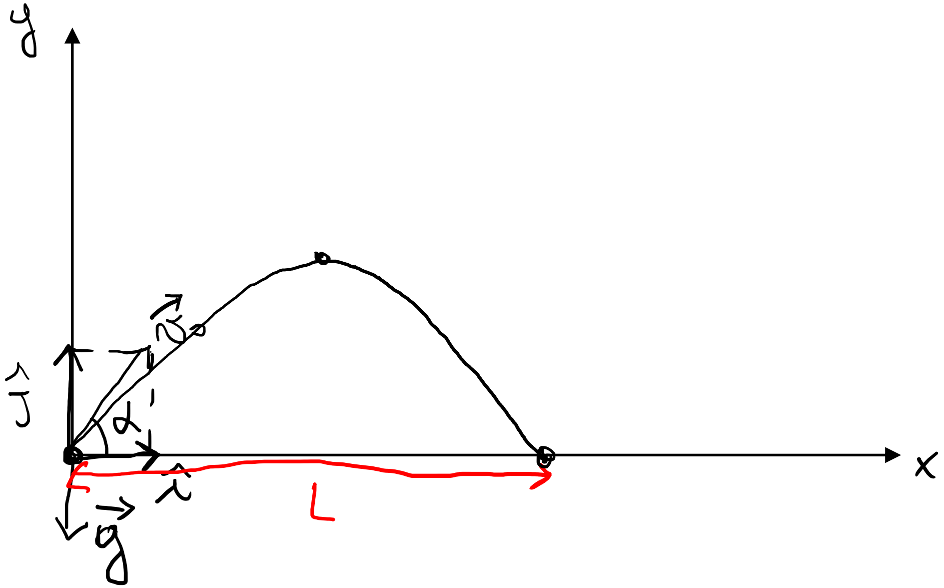
Problema 11 *(moto di caduta libera a traiettoria parabolica)*

Un cannone, situato in una zona pianeggiante, spara un colpo con una velocità iniziale v_0=500 km/h ed alzo α=30.0°.

(a) Trascurando la resistenza dell'aria, dimostrare che la traiettoria è un arco di parabola.



$v_0 = 500 \frac{km}{h} = 139 \frac{m}{s}$

$\alpha = 30{,}0°$

$\vec{a} = \vec{g} = -g\hat{j}$

condizione iniziale : $\vec{v} = \vec{v}_0$

$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)dt = \vec{v}_0 - gt\hat{j}$

$\vec{v}_0 = v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot \hat{j} + v_0 \cos\alpha \cdot \hat{i}$

velocità lungo x | velocità lungo y

$v_x = v_0 \cos\alpha$ | $v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt$

legge oraria lungo x : $x(t) = x_0 + v_0 \cos\alpha \cdot t$ MRU

y : $y(t) = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$ MRUA ricavare t da $x(t)$ $(x_0 = 0)$ $\Rightarrow$ $x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t$ $\rightarrow$ $t = \dfrac{x(t)}{v_0 \cos\alpha}$

sostituisco t in $y(t)$ $(y_0 = 0)$ $\Rightarrow$ $y(t) = v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = \cancel{v_0} \operatorname{sen}\alpha \cdot \dfrac{x}{\cancel{v_0} \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \dfrac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$

$= \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \dfrac{g}{2} \dfrac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$

$y = -ax^2 + bx + c$ $\quad c = 0$ $\rightarrow$ parabola con concavità verso il basso (*b*) Calcolare la gittata del cannone e il tempo di volo del proiettile.

gittata del cannone $= L = ?$

t. di volo del proiettile $= \tau = ?$

$$y(\tau) = 0 \Rightarrow v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot \tau - \frac{1}{2} g \tau^2 = 0$$

$$\tau \left(v_0 \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} g \tau \right) = 0$$

$\rightarrow \tau = 0$ ✗

$\rightarrow v_0 \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} g \tau = 0$

$$+ \quad \tau = + \frac{(v_0 \operatorname{sen}\alpha) \cdot 2}{g} = \frac{2 \cdot 139 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ}{9{,}81} = 14{,}2\ s \ ✓$$

$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$

$$L = x(\tau) = v_0 \cos\alpha \cdot \tau = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{2 v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{2 v_0^2 \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\alpha)}{g}$$

$$= \frac{(139)^2 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ}{9{,}81} = 1{,}70 \cdot 10^3\ m = 1{,}70\ km$$

$y(L) = 0$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot L - g\frac{L^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = 0 \qquad L\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{gL}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right) = 0 \begin{cases} \nearrow L = 0 \ \times \\ \searrow (*) \end{cases}$$

$$(*) \quad \operatorname{tg}\alpha - \frac{gL}{2v_0^2\cos^2\alpha} = 0 \rightarrow \frac{+gL}{2v_0^2\cos^2\alpha} = +\operatorname{tg}\alpha$$

$$L = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g} = \frac{2v_0^2\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} \checkmark$$

(*c*) Si massimizzi la gittata mantenendo costante v_0.

(*d*) Discutere qualitativamente il caso in cui si tenga conto della resistenza dell'aria.

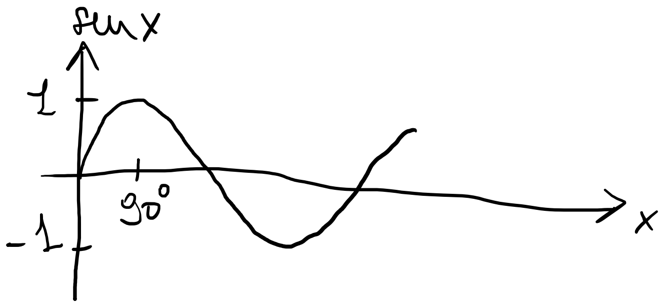
$v_0 = \text{cost}$

$$L = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen}(2\alpha)$$

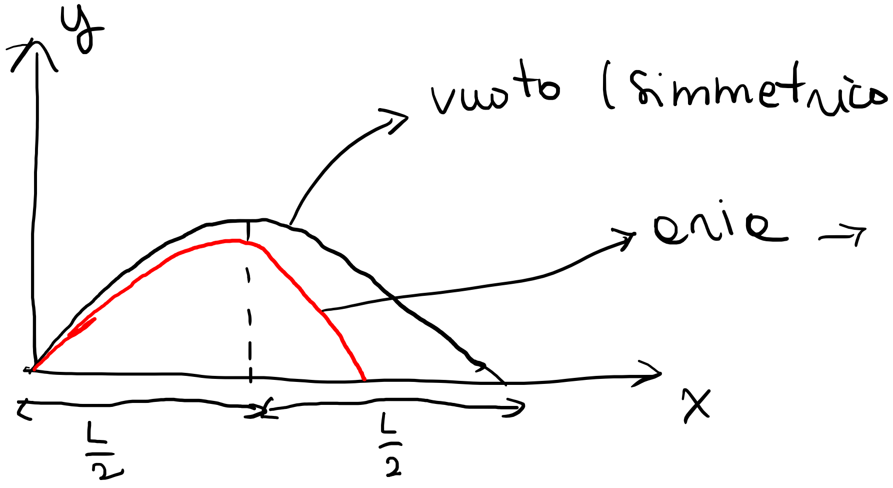
$L_{MAX} \rightarrow \operatorname{sen}(2\alpha_{MAX}) = 1$

$2\alpha_{MAX} = 90^\circ$

$$\alpha_{MAX} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$



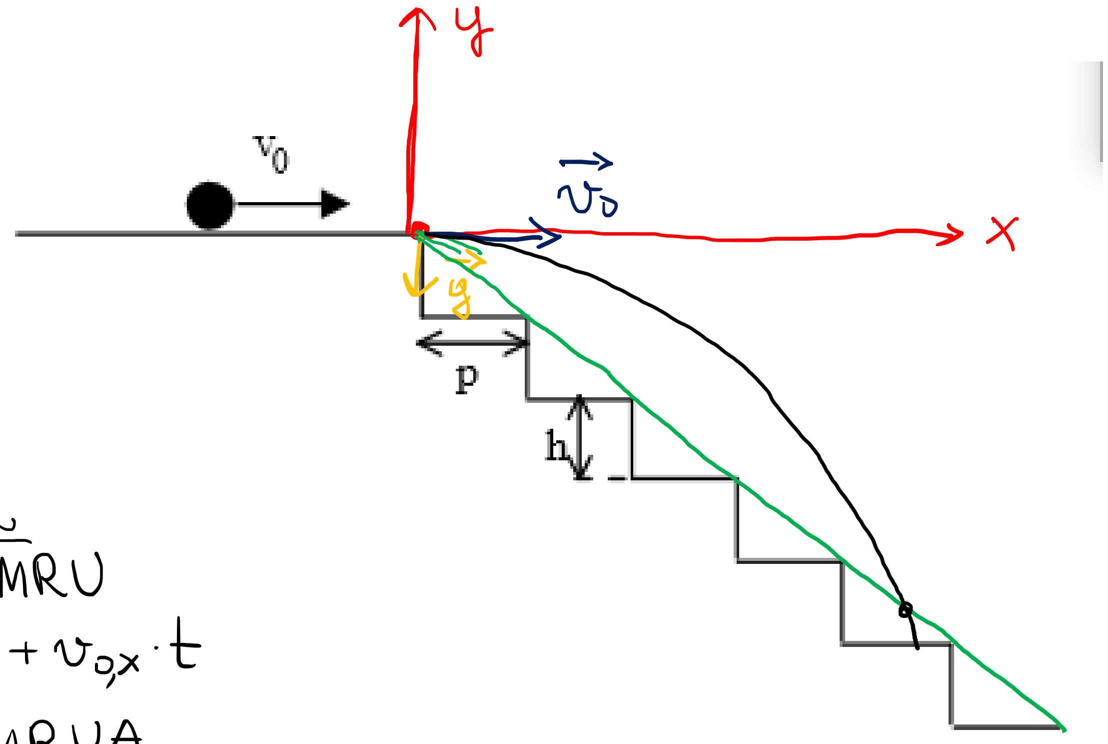
$$L_{MAX} = \frac{v_0^2}{g}$$



$\rightarrow$ soprattutto orizzontalmente l'oggetto è frenato dall'attrito dell'aria

Problema 12

Una biglia, che si muove con velocità costante v_0=10 m/s sopra un pianerottolo orizzontale, imbocca una rampa di scale. Sapendo che ogni gradino è alto h=15 cm e profondo p=20 cm, determinare il primo gradino colpito dalla biglia.



$v_0 = 10 \, \frac{m}{s}$

$h = 15 \, cm = 0{,}15 \, m$

$p = 20 \, cm = 0{,}20 \, m$

C.I.: $x_0 = 0$

$y_0 = 0$

$v_{0,y} = 0$

$v_{0,x} = 10 \, \frac{m}{s}$

$a = -g$

moto biglia

- lungo x MRU

$x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t$

- lungo y MRUA

$y(t) = y_0 + v_{0,y} t + \frac{1}{2} a t^2$

$x(t) = 0 + v_{0x} \cdot t \longrightarrow t = \frac{x}{v_{0,x}}$

$y(t) = 0 + 0 - \frac{1}{2} g t^2$

$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{0,x}}\right)^2$ (eq 1)

la palla tocca il gradino individuato dal punto in cui la traiettoria della palla interseca la retta passante per gli spigoli della scala

$y = mx \qquad m = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{h}{p} \rightarrow y = -\dfrac{h}{p} x$ (eq.2) → eq. retta passante per gli spigoli della scala

uguaglio le 2 equazioni

$$-\frac{h}{p} x = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{0,x}} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{0,x}} \right)^2 - \frac{h}{p} x = 0$$

$$x \left[\frac{1}{2} g \frac{x}{v_{0,x}^2} - \frac{h}{p} \right] = 0$$

→ $x = 0$ ✗

→ $\dfrac{1}{2} g \dfrac{x}{v_{0,x}^2} - \dfrac{h}{p} = 0$

$$\frac{1}{2} g \frac{x}{v_{0,x}^2} = \frac{h}{p} \rightarrow x = \frac{2h \cdot v_{0,x}^2}{p \cdot g} = \frac{2 \cdot 0{,}15 \cdot 10^2}{0{,}20 \cdot 9{,}81} = 15{,}3\ \text{m}$$ ✓

$$n = \frac{x}{p} = \frac{15{,}3}{0{,}20} = 76{,}5$$ → il primo gradino colpito è il 77-esimo