Problema 8

Un punto materiale si muove lungo una guida rettilinea con accelerazione $a(t) = 3.00\ t$ (unità S.I.).

(a) Classificare il moto e determinare la legge oraria del punto materiale nel caso in cui all'istante t_o= 0.00 s il punto si trovi nella posizione $s(0) = 0.00$ m a velocità nulla.

$a(t) = 3{,}00\, t$

$t_0 = 0{,}00\, s$

$s(0) = 0{,}00\, m$

$v_0 = 0{,}00\, \frac{m}{s}$

$s(t) = ?$

MRA con a variabile nel t

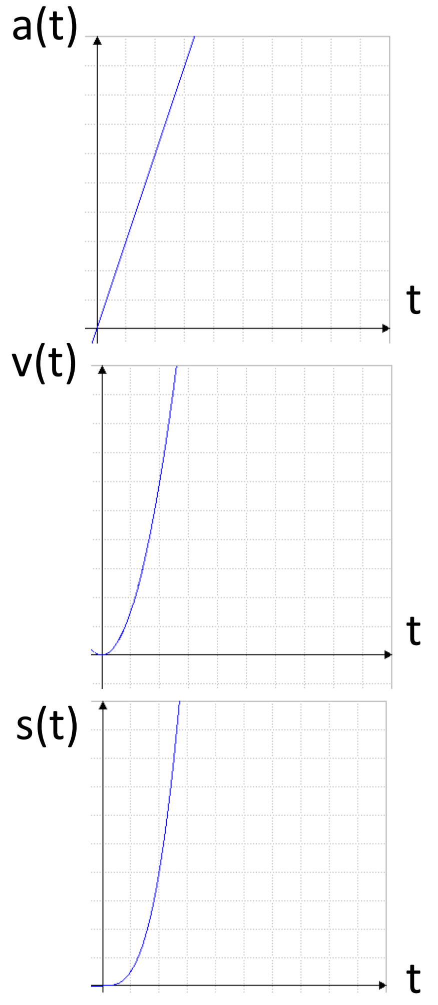
$$a(t) = \frac{dv}{dt} \rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a(t)\,dt \rightarrow v(t) - v_0 = \int_0^t a(t)\,dt$$

$$v(t) = \underbrace{v_0}_{0} + \int_0^t 3{,}00\, t\, dt = 0 + \frac{3{,}00}{2} t^2$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \rightarrow \int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t v(t)\,dt \rightarrow s(t) - s_0 = \int_0^t v(t)\,dt$$

$$s(t) = s_0 + \int_0^t \frac{3{,}00}{2} t^2\, dt = 0 + \frac{3{,}00}{6} t^3 = \frac{t^3}{2}$$

$$s(t) = \frac{t^3}{2}$$



(*b*) Determinare la velocità media del punto materiale all'istante $t_1 = 5.00$ s.

$$\boxed{v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$ SEMPRE VERA

$$s(t_1) = \frac{t^3}{2} = \frac{5{,}00^3}{2} = 62{,}5\ m$$

$$v_m = \frac{62{,}5\ m - 0}{5{,}00\ s - 0} = 12{,}5\ \frac{m}{s}$$

$$v(t = 5{,}00s) = \frac{3{,}00 \cdot 5{,}00^2}{2} = 37{,}5\ \frac{m}{s}$$

velocità istantanea

$$= \frac{3{,}00 \cdot t^2}{2}$$

? $v_m = \dfrac{v + v_0}{2}$ ← SOLO PER IL MUA

- $\Delta t = t - t_0$
- $\Delta s = \int_{t_0}^{t} (at + v_0)\,dt = \left[\frac{1}{2}at^2 + v_0 t\right]_{t_0}^{t} = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t - \frac{1}{2}at_0^2 - v_0 t_0 = \frac{1}{2}a(t^2 - t_0^2) + v_0(t - t_0) =$

$$= \frac{1}{2}a(t+t_0)(t-t_0) + v_0(t-t_0) = (t-t_0)\left(\frac{at + at_0 + 2v_0}{2}\right) = (t-t_0)\left(\frac{\overbrace{at+v_0}^{=v} + \overbrace{at_0+v_0}^{=v_0}}{2}\right)$$

$$= (t-t_0)\left(\frac{v+v_0}{2}\right)$$

s

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \cancel{(t-t_0)}\frac{(v+v_0)}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{(t-t_0)}} = \frac{v+v_0}{2}$$

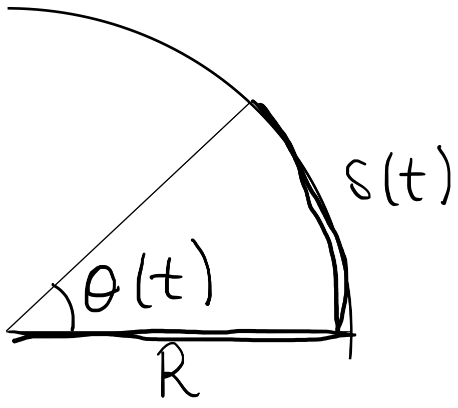
(c) Determinare la velocità angolare e l'accelerazione angolare del punto nel caso in cui esso si muova con la medesima legge oraria lungo una guida circolare.

$$s(t) = \frac{t^3}{2}$$

$$v(t) = \frac{3{,}00}{2} t^2$$

$$a(t) = 3{,}00\, t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta(t) = \dfrac{s(t)}{R} = \dfrac{t^3}{R \cdot 2} & \text{spostamento angolare} \\ \omega(t) = \dfrac{v(t)}{R} = \dfrac{3{,}00}{2R} \cdot t^2 & \text{velocità angolare} \\ \alpha(t) = \dfrac{a(t)}{R} = \dfrac{3{,}00}{R} \cdot t & \text{accelerazione angolare} \end{cases}$$



$$\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$$

Problema 9

La massima accelerazione di un'automobile è tale da passare da ferma a 100 km/h in 5.00 s.
(a) Esprimere tale accelerazione media in unità di *g*.

$i \rightarrow t = 0{,}00\,s$
$v = 0{,}00\,\frac{m}{s}$

$f \rightarrow t = 5{,}00\,s$
$v = 100\,\frac{km}{h} = \frac{100 \cdot 10^3\,m}{3600\,s} = 27{,}78\,\frac{m}{s}$

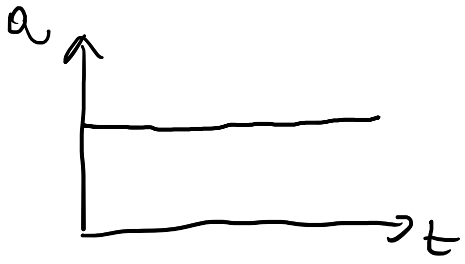
$a_m = ?$ $\qquad a_m = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{27{,}78 - 0}{5{,}00 - 0} = 5{,}56\,\frac{m}{s^2}$

$g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ $\qquad a_m = \frac{5{,}56 \cdot g}{9{,}81} = 0{,}566 \cdot g$

In generale $a_m(t_0, t_1)$ dipende da t_0 e t_1

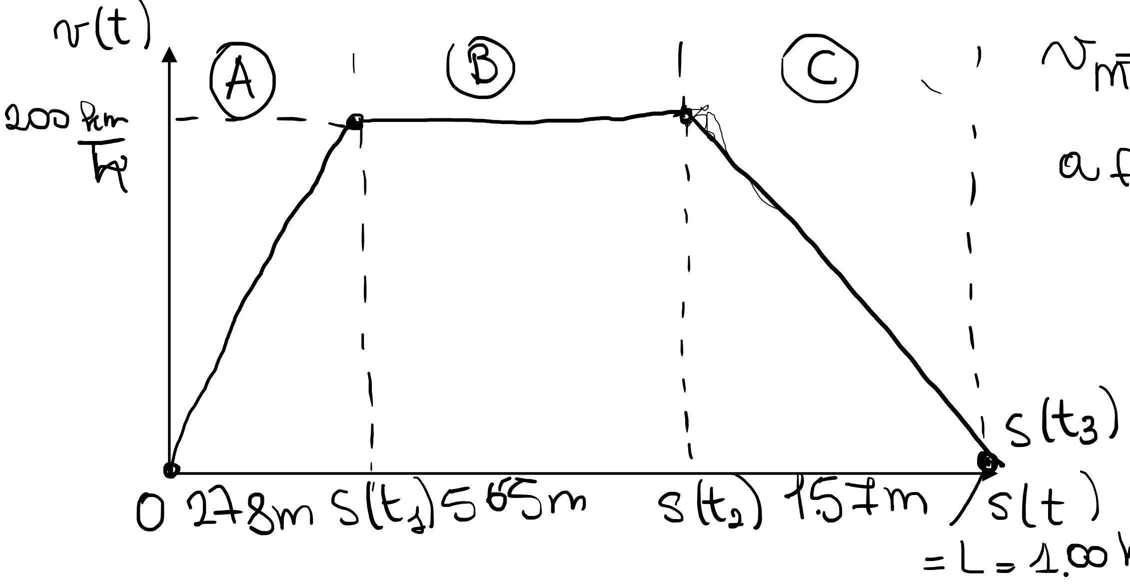
CASO PARTICOLARE $\rightarrow$ MUA $\quad a_m(t_0, t_1) = a \quad \forall\, t_0, t_1$

$a_m = a_{max} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_1}$



(b) Supponendo che la massima velocità sia $v_{max} = 200$ km/h, che tale velocità possa essere raggiunta accelerando al massimo valore consentito e che l'automobile possa frenare con accelerazione $-g$, determinare quale deve essere l'andamento della velocità in funzione del tempo per coprire la distanza L=1.00 km arrivando con velocità nulla.

(c) Calcolare il tempo impiegato τ.



$$v_{max} = 200 \frac{km}{h} = \frac{200 \cdot 10^3}{3600} \frac{m}{s} = 55,56 \frac{m}{s}$$

$$a_{frenata} = -g$$

- $0 \rightarrow t = 0 = t_0$
  $s_0 = 0$
  $v_0 = 0$

- $t_0 < t_A < t_1$ MRUA

$$\begin{cases} v(t_A) = v_0 + a_{max} \cdot t_A \\ s(t_A) = s_0 + v_0 t_A + \frac{1}{2} a_{max} t_A^2 \end{cases}$$

- $t_1 < t_B < t_2$ MRU

$$v(t_B) = v_{max}$$
$$s(t_B) = s(t_1) + v_{max} t_B$$

- $t_2 < t_C < t_3$ MRUD

$$v(t_C) = v_{max} - g t_C$$
$$s(t_C) = s(t_2) + v_{max} t_C - \frac{1}{2} g t_C^2$$

- $t = t_1$

$v_{Max} = a_{max} t_1 \rightarrow t_1 = \frac{v_{max}}{a_{max}} = \frac{55{,}56 \frac{m}{s}}{5{,}56 \frac{m}{s^2}} = 9{,}99\,s$

$s(t_1) = \frac{1}{2} a_{max} t_1^2 \rightarrow s(t_1) = \frac{1}{2} 5{,}56 \cdot \left(\frac{55{,}56 \frac{m}{s}}{5{,}56 \frac{m}{s^2}} \right)^2 = 278\,m$

- $t = t_3$

$v(t_3) = 0 = v_{max} - g t_3 \rightarrow t_3 = \frac{v_{max}}{g} = 5{,}66\,s$

$s(t_3) = s(t_2) + v_{max} t_3 - \frac{1}{2} g t_3^2 = L$

$s(t_2) = L - \frac{v_{max}^2}{g} + \frac{1}{2} \frac{v_{max}^2}{\cancel{g^2}} \cdot \cancel{g} = L - \frac{1}{2} \frac{v_{max}^2}{g} = 1000m - \frac{1}{2} \frac{(55{,}56)^2}{9{,}81} = 843\,m$

In $1000 - 843 = 157\,m$ la v cala da v_{max} a 0 con decelerat. g in 5,66 s

- $t = t_2$

$s(t_2) = s(t_1) + v_{max} t_2 \rightarrow t_2 = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{v_{max}} = \frac{843 - 278}{55{,}56} = 10{,}2\,s$

la v_{max} viene mantenuta per 10,2 s percorrendo $843 - 278 = 565\,m$

C

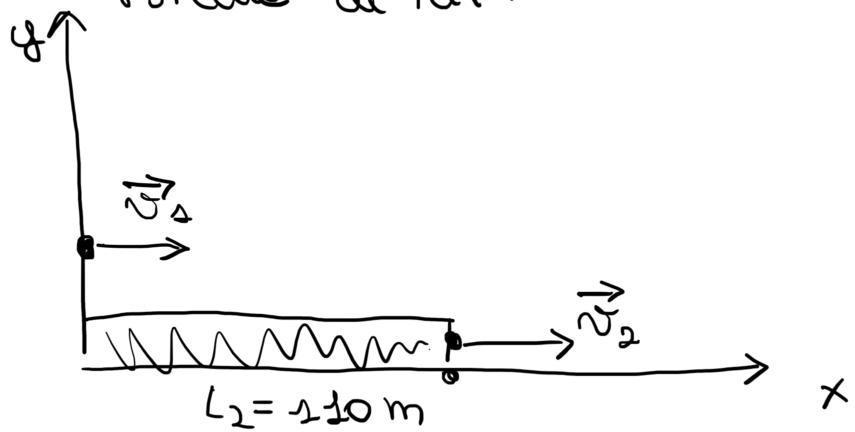
$\tau = t_1 + t_2 + t_3 = 9{,}99 + 5{,}66 + 10{,}2 = 25{,}9\,s$

Problema 10

Un'automobile viaggia alla velocità v_1=90.0 km/h e sorpassa un treno lungo L_2=110 m, che viaggia nella stessa direzione su un binario parallelo alla strada.

(a) Se la velocità del treno è v_2=80.0 km/h, calcolare quanto tempo impiegherà l'automobile a sorpassarlo completamente.

sistema di rif.



$v_1 = 90{,}0 \ \frac{km}{h} = 25{,}0 \ \frac{m}{s}$

$L_2 = 110$ m

$v_2 = 80{,}0 \ \frac{km}{h} = 22{,}2 \ \frac{m}{s}$

$t_{sorpasso,1} = \tau = ?$

legge oraria moto treno MRU

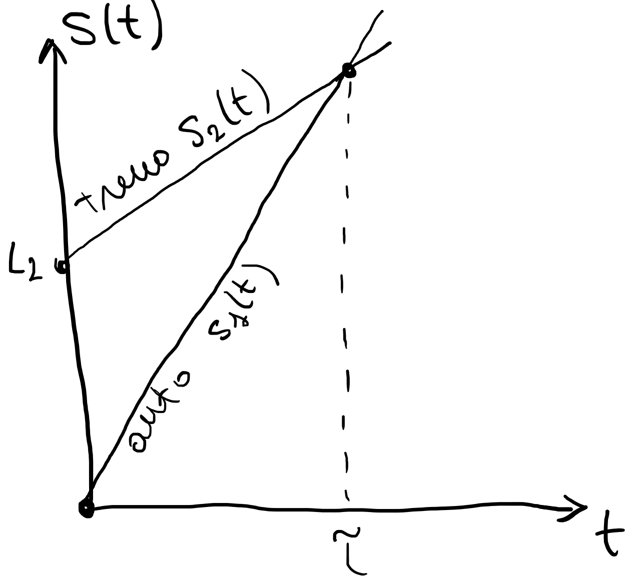
$s_2(t=0) = L_2$

$s_2(t) = L_2 + v_2 t$

legge oraria moto auto MRU

$s_1(t=0) = 0$

$s_1(t) = s_{1,0} + v_1 t = 0 + v_1 t$



$$s_1(\tau) = s_2(\tau)$$

$$L_2 + v_2 \tau = v_1 \tau$$

$$v_2 \tau - v_1 \tau = - L_2$$

$$\tau (v_1 - v_2) = L_2$$

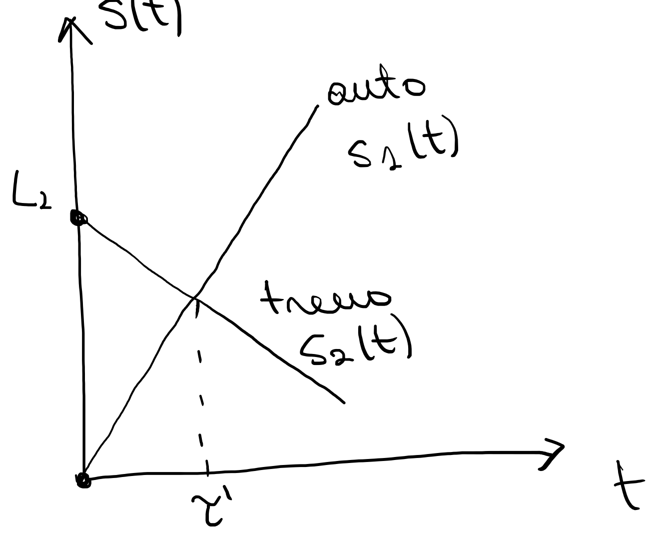
$$\tau = \frac{L_2}{v_1 - v_2} = \frac{110\,m}{(25{,}0 - 22{,}2)\,\frac{m}{s}} = 39{,}6\,s$$

(b) Quanto sarà lo spazio percorso dall'auto in tale intervallo di tempo?

$s_1(\tau) = ?$

$s_1(\tau) = v_1 \cdot \tau = 25{,}0 \frac{m}{s} \cdot 39{,}6\ s = 990\ m$

(c) Riconsiderare i punti precedenti nel caso in cui i due mezzi viaggino in senso opposto.



legge oraria treno

$$s_2(t) = L_2 - v_2 t$$

$$s_2(\tau') = s_1(\tau')$$

$$L_2 - v_2 \tau' = v_1 \cdot \tau'$$

$$v_1 \cdot \tau' + v_2 \tau' = L_2$$

$$\tau' (v_1 + v_2) = L_2$$

$$\tau' = \frac{L_2}{v_1 + v_2} = \frac{110\ m}{(25{,}0 + 22{,}2)\frac{m}{s}} = 2{,}33\ s$$

$$s_1(\tau') = v_1 \tau' = 25{,}0 \frac{m}{s} \cdot 2{,}33 s = 58{,}5\ m$$